ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Образцы решения уравнений из «Сборника типовых заданий по курсу высшей математики» Кузнецова Л.А.
Авторы: Смирнов А.Н., Беловодский В.Н., кафедра компьютерных систем мониторинга , ДонНТУ, 2014.

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде $\psi(x,y)=C$.)

$$20xdx-3ydy=3x^2ydy-5xy^2dx.$$

Решение: Дано *уравнение с разделяющимися переменными*. Разделим переменные: все *y* перенесём влево, а *x* – вправо. Со знаками дифференциала (*dx*, *dy*) можно обращаться как с множителями.

$$20xdx-3ydy=3x^2ydy-5xy^2dx$$

$$3x^2ydy+3ydy=20xdx+5xy^2dx$$

$$(3x^2y+3y)dy=(20x+5xy^2)dx$$

$$y(3x^2+3)dy=x(20+5y^2)dx$$

$$\frac{ydy}{5y^2+20}=\frac{xdx}{3x^2+3}$$

После разделения проинтегрируем обе части

$$\int\frac{ydy}{5y^2+20}=\int\frac{xdx}{3x^2+3}$$

$$\frac{1}{5}\int\frac{d(y^2+4)\cdot\frac{1}{2}}{y^2+4}=\frac{1}{3}\int\frac{d(x^2+1)\cdot\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{10}\ln\left|y^2+4\right|+C_1^*=\frac{1}{6}\ln\left|x^2+1\right|+C_2^*$$

Сделаем замену

$$C_1^*-C_2^*=C^*=\ln C$$

$$\frac{1}{10}\ln\left|y^2+4\right|+\ln|C|=\frac{1}{6}\ln\left|x^2+1\right|$$

При решении уравнений такого вида константу сразу можно записывать в виде $\ln|C|$ если имеются логарифмы.

$$6\ln\left|C\cdot(y^2+4)\right|=10\ln\left|x^2+1\right|\Rightarrow 3\ln\left|C\cdot(y^2+4)\right|=5\ln\left|x^2+1\right|$$

$$\ln\left(|C|(y^2+4)^3\right)=\ln(x^2+1)^5$$

Так как выражение y^2+4 и x^2+1 всегда положительны, то под модулем можно оставить только константу.,

Выполним потенцирование обеих частей

$$e^{\ln\left(|C|(y^2+4)^3\right)} = e^{\ln(x^2+1)^5} \Rightarrow |C|(y^2+4)^3 = (x^2+1)^5$$

Приведём к требуемому виду: $\dfrac{(x^2+1)^5}{(y^2+4)^3} = |C|$

Ответ: $\dfrac{(x^2+1)^5}{(y^2+4)^3} = |C|$.

Задание 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$y' = \frac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy}.$$

Решение: В данном уравнении невозможно сделать разделение переменных. Это *однородное уравнение,* что можно выяснить, проверив выполнение следующего условия: $f(\lambda y', \lambda y, \lambda x) = f(y', y, x)$.

Делаем замену: $y = tx$, где t – некая функция от x, тогда

$$y' = (tx)' = t'x + tx' = t'x + t$$

Подставим.

$$t'x + t = \frac{x^2+2xtx-5(tx)^2}{2x^2-6xtx}$$

Заменим t' на $\dfrac{dt}{dx}$ и упростим

$$\frac{dt}{dx}x = \frac{1+2t-5t^2}{2-6t} - t$$

$$\frac{dt}{dx}x = \frac{t^2+1}{2-6t}$$

Таким образом, мы получили уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{x}{dx} = \frac{t^2+1}{2-6t}\frac{1}{dt} \Rightarrow \frac{2-6t}{t^2+1}dt = \frac{dx}{x}$$

Интегрируем.

$$\int\frac{2-6t}{t^2+1}dt = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{2}{t^2+1}dt + \int\frac{-6t}{t^2+1}dt = \int\frac{dx}{x}$$

$$2\int\frac{1}{1+t^2}dt - 6\int\frac{dt^2\cdot 1/2}{t^2+1} = \int\frac{dx}{x}$$

$$2\operatorname{arctg}t - 3\ln\left|t^2+1\right| = \ln|x| + C$$

Произведём обратную замену: $y = tx \Rightarrow t = \dfrac{y}{x}$

$$2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - 3\ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right| = \ln|x| + C$$

Упростим выражение, приведём к виду общего интеграла

$$2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)-\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}\right)^3-\ln|x|=C$$

Ответ: $2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)-\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}\right)^3-\ln|x|=C$

Задание 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$y'=\frac{y+2}{2x+y-4}.$$

Решение

Это уравнение, которое сводится к однородному. Проблему создают константы в числителе и знаменателе. Необходимо выполнить преобразования, чтоб от них избавиться.

Сделаем замену

$\begin{cases} x=x_1+a \\ y=y_1+b \end{cases}$, где a и b – коэффициенты, которые необходимо найти

$$y_1'=\frac{y_1+b+2}{2(x_1+a)+y_1+b-4}$$

Необходимо подобрать такие a и b, чтоб уравнение стало однородным. Для этого необходимо решить систему линейных уравнений, составленную из числителя и знаменателя следующим образом:

$$\begin{cases} b+2=0 \\ 2a+b-4=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=-2 \\ 2a-2-4=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=-2 \\ a=3 \end{cases}$$

$$y_1'=\frac{y_1-2+2}{2(x_1+3)+y_1-2-4}\Rightarrow y_1'=\frac{y_1}{2x_1+y_1}$$

Мы получили однородное ДУ. Делаем замену $y_1=tx_1$, $y_1'=t'x_1+t$.

$$t'x_1+t=\frac{tx_1}{2x_1+tx_1}$$

Разделим переменные

$$\frac{dt}{dx_1}x_1=\frac{t}{2+t}-t\Rightarrow\frac{dt}{dx_1}x_1=\frac{t-t(2+t)}{2+t}\Rightarrow\frac{1}{dx_1}x_1=-\frac{t+t^2}{2+t}\frac{1}{dt}$$

$$\int\frac{t+2}{t(t+1)}dt=-\int\frac{dx_1}{x_1}$$

Функцию интеграла левой части разложим на элементарные дроби методом *неопределённых коэффициентов*. Имеем

$$\frac{t+2}{t(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}\Rightarrow t+2=A(t+1)+Bt\Rightarrow t+2=(A+B)t+A$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} B=-1 \\ A=2 \end{cases}$$

$$\int\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=-\int\frac{dx_1}{x_1}\Rightarrow 2\int\frac{dt}{t}-\int\frac{d(t+1)}{t+1}=-\int\frac{dx_1}{x_1}$$

$$2\ln|t|-\ln|t+1|=-\ln|x_1|+\ln|C|$$

$$\ln t^2+\ln\left|\frac{1}{t+1}\right|+\ln|x_1|=\ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{t^2x_1}{t+1}\right|=\ln|C|\Rightarrow\left|\frac{t^2x_1}{t+1}\right|=|C|$$

Делаем обратную замену: $y_1=tx_1\Rightarrow t=\frac{y_1}{x_1}$

$$\left|\frac{\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2x_1}{\frac{y_1}{x_1}+1}\right|=|C|\Rightarrow\left|\frac{\frac{y_1^2}{x_1}}{\frac{y_1+x_1}{x_1}}\right|=|C|\Rightarrow\left|\frac{y_1^2}{y_1+x_1}\right|=|C|$$

Делаем вторую обратную замену: $\begin{cases}x_1=x-3\\ y_1=y+2\end{cases}$

$$\left|\frac{(y+2)^2}{y+2+x-3}\right|=|C|\Rightarrow\left|\frac{(y+2)^2}{y+x-1}\right|=|C|$$

Ответ: $\frac{(y+2)^2}{y+x-1}=\pm C$.

Задание 4. Найти решение задачи Коши.

$y'-\frac{y}{x}=-\frac{2}{x^2},\quad y(1)=1.$

Чтоб найти решение задачи Коши, сначала необходимо найти общее решение.

Это *линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка*. В общем случае оно имеет вид: $y'+p(x)\cdot y=q(x)$.

Решение

Способ 1.

Делаем замену: $y=u\cdot v$, тогда $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$

Стоит помнить, что y, u, v – это функции от x, т.е.: $y(x)$, $u(x)$, $v(x)$.

Подставляем и выносим за скобки v.

$$u'\cdot v+u\cdot v'-\frac{uv}{x}=-\frac{2}{x^2}$$

$$\left(u'-\frac{u}{x}\right)v+u\cdot v'=-\frac{2}{x^2}$$

То, что в скобках полагаем равным нулю: $u' - \frac{u}{x} = 0$, тогда основное выражение примет вид: $0 \cdot v + u \cdot v' = -\frac{2}{x^2}$. Таким образом, мы получили два уравнения, из которых составляем систему и решаем. Это уравнения с разделяющимися переменными.

$$\begin{cases} u' - \frac{u}{x} = 0 \\ u \cdot v' = -\frac{2}{x^2} \end{cases}$$

Решаем первое уравнение.

$$u' - \frac{u}{x} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|u| = \ln|x| \Rightarrow u = \pm x$$

На данном этапе константу *C* мы не приписываем. Полученную функцию *u* нужно подставить во второе уравнение, однако она может принимать два значение. Нам нужно взять какую-либо функцию, обращающую в ноль указанную выше скобку. Поэтому можно взять любой знак. Возьмём, например со знаком «+». Если мы возьмём функцию с другим знаком, то в итоге всё равно получим тождественный ответ.

$$xv' = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow dv = -2\frac{dx}{x^3} \Rightarrow \int dv = -2\int x^{-3}dx \Rightarrow v = -2\frac{x^{-2}}{-2} + C \Rightarrow v = \frac{1}{x^2} + C$$

Во втором уравнении добавляем константу.

Когда мы наши функции *u* и *v*, можем найти и искомую функцию *y*.

$$y = u \cdot v = x\left(\frac{1}{x^2} + C\right) = \frac{1}{x} + Cx$$

Мы нашли общее уравнение, теперь найдём решение задачи Коши, что также называется *частным решением*.

Для полученного частного решения необходимо найти константу *C*, при заданных начальных условиях. По заданию $y(1) = 1$ – это означает, что при *x* = 1 должен быть y = 1.

$$y = \frac{1}{x} + Cx \Rightarrow y(1) = \frac{1}{1} + C \cdot 1 = 1 \Rightarrow 1 + C = 1 \Rightarrow C = 0$$

Подставляем значение константы и получаем ответ.

Ответ: $y = \frac{1}{x}$.

Проверка

Сначала проверим выполнение начальных условий

$y(1) = 1 \Rightarrow y(1) = \frac{1}{1} = 1$ - верно

Теперь проверим исходное уравнение.

Подставим значения функции *y* в исходное уравнение. Сначала нужно найти производную *y*.

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{\frac{1}{x}}{x} = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow -\frac{2}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$$

Тождество верно. Решение найдено правильно.

Способ 2.

Метод интегрирующего множителя

Уравнение, прежде всего, должно быть приведено к общему виду:

$y' + p(x)y = q(y)$,

Введём некую функцию μ, которая называется *интегрирующий множитель*.

$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$.

Умножим обе части уравнения на эту функцию:

$$y'e^{\int p(x)dx} + yp(x)e^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx} \qquad (1)$$

Можно заметить, что левая часть – это производная произведения μy, т.е.

$$y'e^{\int p(x)dx} + yp(x)e^{\int p(x)dx} = (\mu y)'$$

Приравниваем производную произведения к правой части уравнения (1).

$$(\mu y)' = q(x)\mu \qquad (2)$$

После интегрирования обеих частей, получим искомую функцию.

Применим метод интегрирующего множителя к нашему уравнению.

В данном случае $p(x) = -\frac{1}{x}$, тогда.

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx} = e^{-\int\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = \left(e^{\ln|x|}\right)^{-1} = |x|^{-1} = \frac{1}{|x|}$$

Интегрирующий множитель может принимать два значения: $\mu(x) = \frac{1}{|x|} = \pm\frac{1}{x}$, а для дальнейшего решения нам нужно выбрать только одно.

Далее, мы воспользуемся формулой (2). Из неё следует, что знак интегрирующего множителя μ не влияет на решение, т.к. его мы можем вынести за скобки и сократить. Возьмем, например интегрирующий множитель со знаком «+».

Составляем уравнение по формуле (2).

$$\left(\frac{1}{x}y\right)' = -\frac{2}{x^2}\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = -\frac{2}{x^3}$$

Интегрируем обе части уравнения.

$$\int\left(\frac{y}{x}\right)' dx = \int -\frac{2}{x^3}dx \Rightarrow \frac{y}{x} = -2\int\frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{x^2} + C$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{x^2} + C \Rightarrow y = \frac{1}{x} + Cx$$

Получаем $y = \frac{1}{x} + Cx$, что совпадает с предыдущим ответом.

Ответ: $y = \frac{1}{x}$.

Задание 5. Решить задачу Коши.

$$dx + \left(2x + \sin 2y - 2\cos^2 y\right)dy = 0, \quad y\big|_{x=-1} = 0.$$

Для этого уравнения будем искать решение в виде функции $x(y)$.

Решение

Разделим обе части на dy:

$$\frac{dx}{dy} + \left(2x + \sin 2y - 2\cos^2 y\right) = 0$$

$$x' + \left(2x + \sin 2y - 2\cos^2 y\right) = 0$$

Приведём к общему виду: $x' + p(y)\cdot x = q(y)$

$$x' + 2x = -\sin 2y + 2\cos^2 y$$

Решим методом замены $x = uv$, $x' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + 2uv = -\sin 2y + 2\cos^2 y$$

$$\left(u' + 2u\right)v + uv' = -\sin 2y + 2\cos^2 y$$

$$\begin{cases} u' + 2u = 0 \\ uv' = -\sin 2y + 2\cos^2 y \end{cases}$$

$$u' + 2u = 0 \Rightarrow \frac{du}{dy} = -2u \Rightarrow \frac{du}{u} = -2dy \Rightarrow \int\frac{du}{u} = -2\int dy \Rightarrow \ln|u| = -2y \Rightarrow |u| = e^{-2y}$$

$$u = e^{-2y}$$

$$uv' = -\sin 2y + 2\cos^2 y$$

$$e^{-2y}v' = -\sin 2y + 2\cos^2 y$$

$$v' = \left(2\cos^2 y - \sin 2y\right)e^{2y}$$

Находим интеграл

$$v = \int\left(2\cos^2 y - \sin 2y\right)e^{2y}dy = e^{2y}\cos^2(y) + C$$

Нахождение интеграла здесь не расписано подробно т.к. это тема прошлого семестра.

Получаем искомую функцию

$$x = uv = e^{-2y}\left(e^{2y}\cos^2(y) + C\right) = \cos^2(y) + Ce^{-2y}$$

Найдем решение задачи Коши

По заданию, начальные условия $y\big|_{x=-1} = 0$, следовательно
$x = \cos^2(0) + Ce^{-2\cdot 0} = -1$, откуда $C = -2$.

Ответ: $x = \cos^2(y) - 2e^{-2y}$

Задание 6. Найти решение задачи Коши.
$xy' + y = xy^2, \quad y(1) = 1.$

Это *уравнение Бернулли*, которое в общем случае имеет вид:

$$y' + p(x)\cdot y = q(x)y^n$$

Характерным отличием такого уравнения является наличие y^n.

Решение

Находим общее решение.

Разделим почленно уравнение на y^n, в данном случае – это y^2

$$xy' + y = xy^2 \,|: y^2 \Rightarrow \frac{xy'}{y^2} + \frac{y}{y^2} = x$$

$$\frac{xy'}{y^2} + \frac{1}{y} = x$$

Далее, необходимо заменить второе слагаемое, в котором присутствует только y новой переменной.

Замена: $z = \dfrac{1}{y}$, тогда $z' = \left(\dfrac{1}{y}\right)' = -\dfrac{y'}{y^2}$

После подстановки получим обычное линейное уравнение
$-xz' + z = x$

Решим методом замены: $z = u\cdot v$, тогда $z' = u'\cdot v + u\cdot v'$

$$-x(u'v + uv') + uv = x \Rightarrow -xu'v - xuv' + uv = x \Rightarrow (u - xu')v - xuv' = x$$

$$\begin{cases} u - xu' = 0 \\ -xuv' = x \end{cases}$$

Решаем первое уравнение

$$u - xu' = 0 \Rightarrow u = x\frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{du}{u} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|u| + \ln|x| \Rightarrow |u| = |x| \Rightarrow u = \pm x$$

Возьмём $u = -x$, чтоб знаки минус сократились в последующем.

Решаем второе уравнение

$$-(-x)v'x = x \Rightarrow v'x = 1 \Rightarrow v' = \frac{1}{x} \Rightarrow v = \int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Находим функцию z.

$$z = uv = -x\left(\ln|x| + C\right)$$

Делаем обратную замену

$$y = \frac{1}{z} = -\frac{1}{x\left(\ln|x| + C\right)}$$ – общее решение

Находим частное решение для $y(1) = 1$.

$$y(1) = -\frac{1}{1\cdot\left(\ln|1| + C\right)} = 1 \Rightarrow C = 1$$

Подставляем константу

Ответ: $y = -\dfrac{1}{x\left(\ln|x| + 1\right)}$

Проверка

Проверяем начальные условия

$y(1) = -\dfrac{1}{1\cdot\left(\ln|1| + 1\right)} = 1$ - верно

Проверяем уравнение

$$x\left(-\frac{1}{x\left(\ln|x| + 1\right)}\right)' - \frac{1}{x\left(\ln|x| + 1\right)} = x\left(-\frac{1}{x\left(\ln|x| + 1\right)}\right)^2$$

$$x\frac{\ln|x| + 2}{x^2\left(\ln|x| + 1\right)^2} - \frac{1}{x\left(\ln|x| + 1\right)} = x\frac{1}{x^2\left(\ln|x| + 1\right)^2}$$

$$\frac{\ln|x| + 2}{x\left(\ln|x| + 1\right)^2} - \frac{\ln|x| + 1}{x\left(\ln|x| + 1\right)^2} = \frac{1}{x\left(\ln|x| + 1\right)^2}$$

$$\frac{\ln|x| + 2}{\left(\ln|x| + 1\right)^2} = \frac{\ln|x| + 2}{\left(\ln|x| + 1\right)^2}$$

Решено верно.

Задание 7. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$xdx + ydy + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0.$$

Это – *уравнение в полных дифференциалах*.

Решение

Решение уравнения будем искать в виде $F(x, y, C)$. Приведём уравнение к общему виду полного дифференциала:

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy.$$

Приведём подобные для дифференциалов.

$$xdx + ydy + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow xdx + ydy + \frac{xdy}{x^2 + y^2} - \frac{ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\left(x - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0$$

Если последнее выражение является полным дифференциалом, то выражения в скобках – частные производные искомой функции.

Обозначим выражения в скобках функциями P и Q.

$$P = x - \frac{y}{x^2 + y^2},\ Q = y + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Если функции P и Q - это частные производные, то их смешанные производные должны быть равны.

$$P = \frac{\partial F}{\partial x} = x - \frac{y}{x^2 + y^2},\ \ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{x^2 + y^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$Q = \frac{\partial F}{\partial y} = y + \frac{x}{x^2 + y^2},\ \ \frac{\partial^2 Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Последние выражения тождественны, значит заданное уравнение, действительно, в полных дифференциалах.

Проинтегрируем функцию P по x.

$$F = \int\left(x - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx = \frac{x^2}{2} - y\int \frac{1}{x^2 + y^2}dx = \frac{x^2}{2} - \arctan\frac{x}{y} + \varphi(y) \qquad (3)$$

Функция $\varphi(y)$ играет роль константы при дифференцировании по x. Чтоб получить решение уравнения мы должны найти эту функцию.

Продифференцируем полученную функцию по y, сравним с функцией Q и найдём $\varphi(y)$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \varphi'(y) = Q = y + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Получаем, что $\varphi'(y) = y$.

$$\varphi(y) = \int y dy = \frac{y^2}{2} - C$$

Здесь мы записали C со знаком «минус» это было сделано для удобства, чтоб при переносе константы вправо знак «минус» сокращался.

Подставляем φ в (3)

$$F(x, y, C) = \frac{x^2}{2} - \arctan\frac{x}{y} + \frac{y^2}{2} - C$$

Ответ: $\frac{x^2}{2} - \arctan\frac{x}{y} + \frac{y^2}{2} = C$

Проверка

Для проверки необходимо находим частные производные, составить полный дифференциал и сравнить с заданным уравнением.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2} - \arctan\frac{x}{y} + \frac{y^2}{2} - C\right) = x - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} - \arctan\frac{x}{y} + \frac{y^2}{2} - C\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2} + y$$

$$dF = \left(x - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(y + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy$$

Полный дифференциал соответствует заданному уравнению. Решено верно.

Задание 8. Для данного дифференциального уравнения *методом изоклин* построить *интегральную кривую*, проходящую через точку *M*.

$y' - x = 2y, \quad M(1,\ 2).$

Решение.

Метод позволяет построить интегральную кривую, не решая уравнения аналитически. Он основан на том, что интегральная кривая, или их *семейство*, строится с помощью касательных к этим кривым, построенным специальным образом на координатной плоскости.

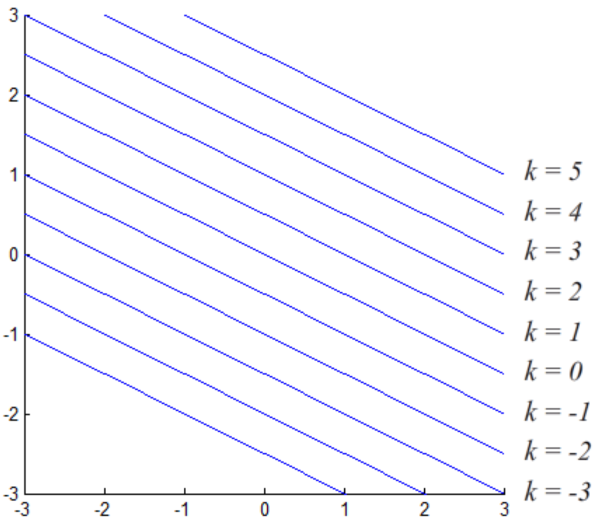
Суть метода заключается в следующем.

1. Приводим заданное уравнение к виду $y' = f(x,\ y)$, т.е. разрешаем его относительно производной

$$y' - x = 2y \;\Rightarrow\; y' = x + 2y. \tag{1}$$

2. Проводим линии уровня функции $f(x, y)$, т.е. семейство кривых $f(x, y) = k$ для различных значений k. Каждую такую кривую она называется *изоклиной*, интегральная кривая пересекает под углом α, тангенс которого равен k, т.е. $tg\alpha = k$. Таким образом, заменив в последнем уравнении y' на константу k получим *уравнение изоклин*

$$y' = x + 2y \;\Rightarrow\; k = x + 2y \;\Rightarrow\; y = \frac{k - x}{2}.$$

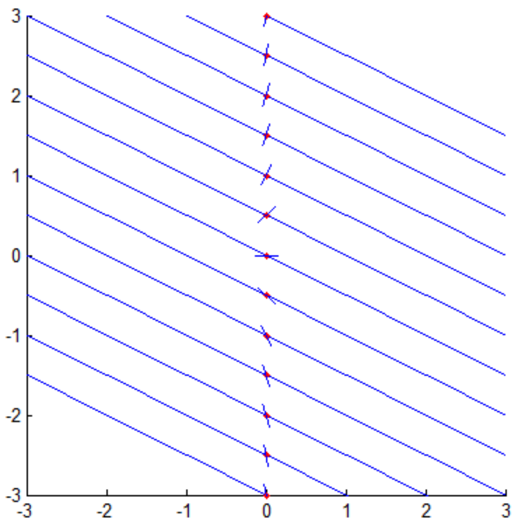


Изменяя теперь значения *k*, следует построить семейство таких линий - *изоклин*, (*ед. изоклина*), в данном случае они являются прямыми.

Особенностью этих линий является то, что касательные к интегральным кривым, проходящие через точки, расположенные на одной изоклине, будет иметь одинаковый угловой коэффициент.

3. Из правой части уравнения (1) получаем:

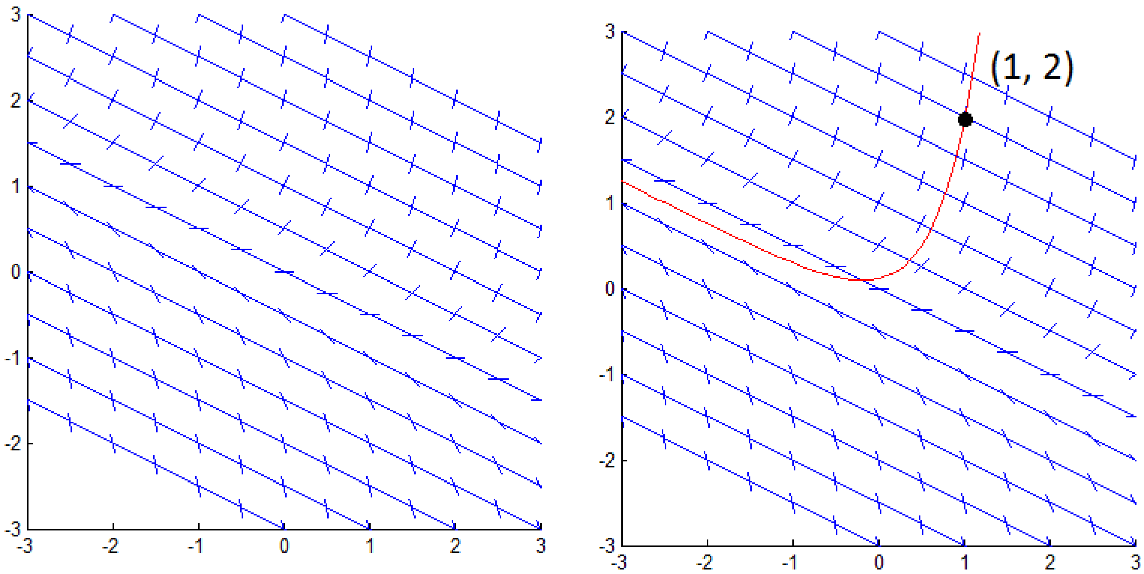
$$y' = x + 2y \;\Rightarrow\; f(x,\ y) = x + 2y$$



Численное значение функция f в произвольной точке $(x_0,\ y_0)$ равно *угловому коэффициенту* касательной в этой точке, проведенной к интегральной кривой.

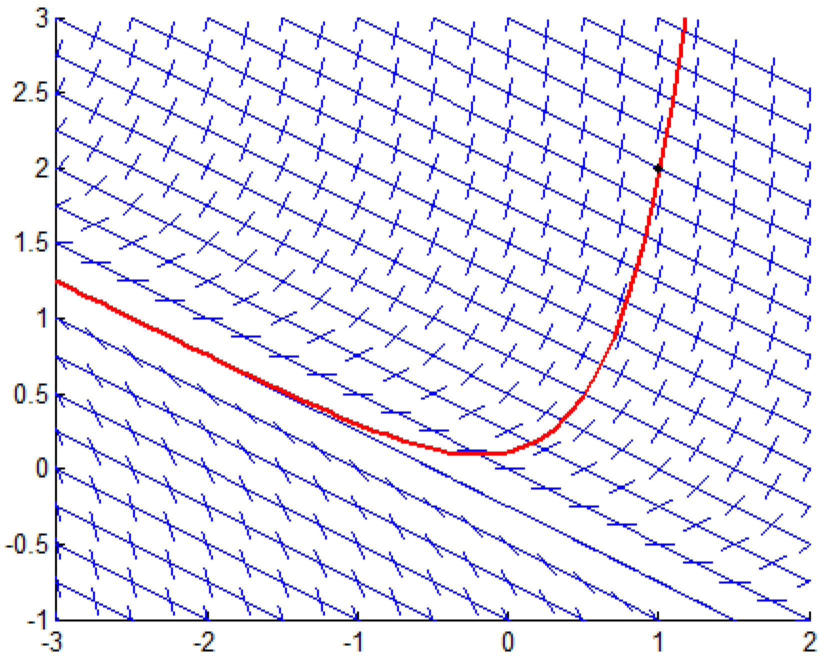
Определим угловые коэффициенты и, для начала, построим отрезки касательных к интегральным кривым, например, для значения $x = 0$.

4. Продолжая, далее, аналогичным образом, проводим определенное количество таких отрезков достаточное для качественного представления расположения касательных. В результате этой процедуры формируется *поле направлений*.



5. Проводя, теперь, линию по *направляющим* отрезкам и проходящую, через заданную точку начальных условий, мы и получаем искомую интегральную кривую. Вполне очевидно, что, чем гуще будет множество изоклин, тем более точной окажется и построенная, таким образом, интегральная кривая.

Ответ:



Некоторые дополнительные возможности

Методом изоклин можно также находить точки экстремумов и точки перегиба интегральных кривых. Вернее сказать не точки, а линии, на которых располагаются эти особые точки.

1. Экстремумы находятся в местах, где значение производной равно нулю. Рассмотрим на предыдущем примере. В уравнении (1) заменим $y' = 0$ и получим функцию:

$$y' = x + 2y \Rightarrow 0 = x + 2y \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

График этой функции и будет линией, на которой лежат точки экстремума всего семейства интегральных кривых.

2. Точки перегиба. Для примера возьмём уравнение $y' = y - x^2$.

Продифференцируем обе части уравнения:

$$(y')' = (y - x^2)' \Rightarrow y'' = y' - 2x$$

Производная y' нам известна из исходного уравнения $y' = y - x^2$, подставим в полученное:

$$y'' = y' - 2x \Rightarrow y'' = y - x^2 - 2x$$

Точки перегиба, как известно, расположены в местах, где вторая производная равна нулю. Заменим $y'' = 0$.

$$0 = y - x^2 - 2x \Rightarrow y = x^2 + 2x$$

Мы получили уравнение кривой, на которой расположены точки перегиба всех интегральных кривых заданного уравнения.

Данным способом нельзя определить точное местоположение особой точки для частного случая, а лишь предположительное место в виде линии (? не уверен).

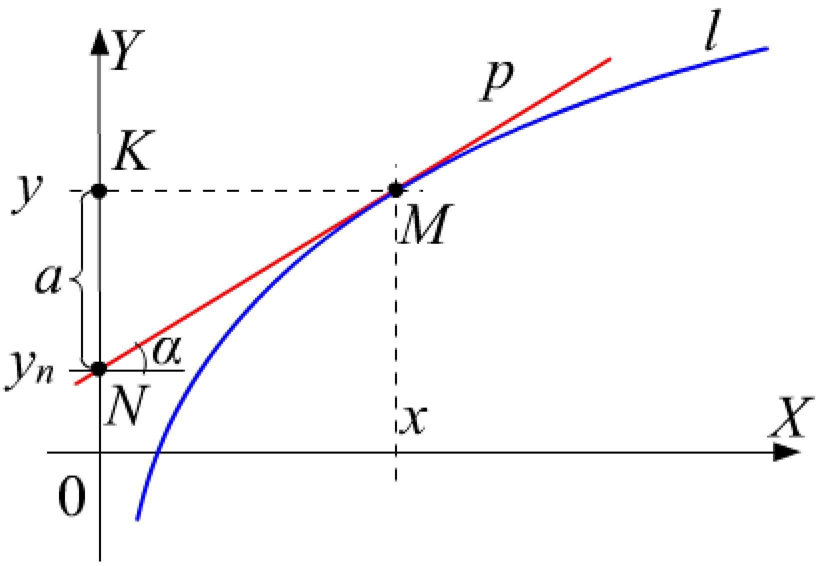
Задание 9. Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор $\overrightarrow{MN}$ с концом на оси Oy имеет проекцию на ось Oy, равную a.

$M_0(1,\ 1), \quad a = 1.$

Решение

я немного перефразировал

Рассмотрим рисунок ниже.



Пусть точка $M(x, y)$ произвольная точка искомой линии l, а $y(x)$ – уравнение линии. В условии описано поведение касательной p, уравнение которой имеет вид: $Y - y = y'(X - x)$. По условию, также $y - y_n = a$.

Рассмотрим треугольник MNK. Из тригонометрических свойств следует, что

$$\frac{\left|\overline{NK}\right|}{\left|\overline{KM}\right|} = \operatorname{tg}\alpha .$$

Так как $\left|\overline{NK}\right| = y - y_n = a$, $\left|\overline{KM}\right| = x$, $\operatorname{tg}\alpha = y'$, то предыдущее выражение примет вид

$$\frac{\left|\overline{NK}\right|}{\left|\overline{KM}\right|} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \frac{y_n - y}{x} = y' \Rightarrow y_n - y = xy' \Rightarrow a = xy'$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение $a = xy'$, где $a = 1$, а точка $M_0 = (1, 1)$ выступает в качестве начальных условий $y(1) = 1$.

Решим задачу Коши: $xy' = 1$, $y(1) = 1$.

$$xy' = 1 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow dy = \frac{dx}{x} \Rightarrow y = \ln|x| + C$$

Находим константу

$$1 = \ln|1| + C \Rightarrow C = 1$$

Ответ: уравнение кривой имеет вид $y = \ln|x| + 1$.

Решение. Пусть т. $M(x, y)$ произвольная точка искомой кривой, а $y = y(x)$ ее уравнение. Тогда, уравнение касательной к этой кривой в точке M, имеет вид

$$\eta = y'(x)(\xi - x) + y ,$$

а точка $N(0, -y(x)x + y)$ является ее точкой пересечения с осью OY. Отсюда вектор $\overline{MN} = (-x, -y'(x)x)$. Далее, проекция этого вектора на ось OY, направляющий вектор которой есть $\overline{j} = (0,1)$, равна $np_{OY}\overline{MN} = \overline{MN}\cdot\overline{j} = a$. Т.е. $-y'(x)x = 1$. Это и есть дифференциальное уравнение, описывающее кривые, обладающие указанным свойством. Нам же необходимо найти кривую, проходящую через заданную точку, т.е. решить задачу Коши

$$y'(x)x=-1,\qquad y(1)=1.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Вначале находим его общее решение, а затем из начальных условий определяем значение постоянной *С*.

Задание 10. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$(1+x^2)y''+2xy'=12x^3$.

Решение

Это дифференциальное уравнение *второго порядка*, допускающее *понижение степени*. В уравнении есть первая и вторая производные, но нет функции y в явном виде.

Поэтому необходимо сделать замену: $y'=t$, $y''=t'$.

$$(1+x^2)t'+2xt=12x^3$$

Мы получили линейное неоднородное уравнение первого порядка. Приведём его к общему виду $y'+p(x)\cdot y=q(x)$ и решим.

$$t'+\frac{2x}{1+x^2}t=\frac{12x^3}{1+x^2}$$

Делаем замену: $t=uv$, $t'=u'v+uv'$

$$u'v+uv'+\frac{2x}{1+x^2}uv=\frac{12x^3}{1+x^2}$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{2x}{1+x^2}v\right)=\frac{12x^3}{1+x^2}$$

$$\begin{cases} v'+\dfrac{2x}{1+x^2}v=0 & 1)\\ u'v=\dfrac{12x^3}{1+x^2} & 2)\end{cases}$$

1) Решаем первое уравнение

$$v'+\frac{2x}{1+x^2}v=0\Rightarrow\frac{dv}{dx}=-\frac{2x}{1+x^2}v\Rightarrow\frac{dv}{v}=-\frac{2xdx}{1+x^2}$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}\Rightarrow-\ln|v|=\ln\left|1+x^2\right|\Rightarrow\ln\left|\frac{1}{v}\right|=\ln\left|1+x^2\right|$$

$$\frac{1}{v}=1+x^2\Rightarrow v=\frac{1}{1+x^2}$$

2) Решаем второе уравнение

$$u'\frac{1}{1+x^2}=\frac{12x^3}{1+x^2}\Rightarrow u=\int 12x^3dx=3x^4+C$$

Делаем обратную замену

$$t=uv=\frac{3x^4+C}{x^2+1};\quad y=\int tdt=\int\frac{3x^4+C}{x^2+1}dt$$

$$y=\int\frac{3x^4+C}{x^2+1}dt=3\int\frac{x^4}{x^2+1}dt+C\int\frac{1}{x^2+1}dt$$

$$y=\int\frac{3x^4+C}{x^2+1}dt=3\int\frac{x^4}{x^2+1}dt+C\int\frac{1}{x^2+1}dt=3\int\frac{x^4-1+1}{x^2+1}dt+C\int\frac{1}{x^2+1}dt=$$

$$3\int\frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{x^2+1}dt+C\int\frac{1}{x^2+1}dt=3\int x^2-1+\frac{1}{x^2+1}dt+C\int\frac{1}{x^2+1}dt=$$

$$3\int x^2dx-3\int dx+3\int\frac{1}{x^2+1}dt+C\int\frac{1}{x^2+1}dt=x^3-3x+3arctg(x)+Carctg(x)+C_2$$

Обозначим $(3+C)=C_1$. Тогда

Ответ: $y=x^3-3x+C_1arctg(x)+C_2$.

Задание 11. Найти решение задачи Коши.

$y''y^3+1=0,\quad y(1)=-1,\quad y'(1)=-1$

Решение

Это дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение степени, т.к. в нем есть функция y и её производная второго порядка, а производная первого порядка отсутствует.

Для его решения необходимо сделать следующую замену.

$y'=p(y)$, тогда $y''=p'(y)=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dp}{dy}y'=\dfrac{dp}{dy}p$

Решим уравнение в два этапа

Подставив в исходное, получим первое уравнение:

1) $p\dfrac{dp}{dy}y^3+1=0$ – уравнение с разделяющимися переменными, решением которого есть $p(y)$.

$$pdp=-\frac{dy}{y^3}\Rightarrow\int pdp=-\int\frac{dy}{y^3}\Rightarrow\frac{p^2}{2}=-\frac{1}{-2y^2}+C_1\Rightarrow p^2=\frac{1}{y^2}+C_1$$

Найдём значение константы, подставив значение начальных условий.

$y(1)=-1,\quad y'(1)=-1$

$$p^2=\frac{1}{y^2}+C_1\Rightarrow(y')^2=\frac{1}{y^2}+C_1\Rightarrow(-1)^2=\frac{1}{-1}+C_1\Rightarrow C_1=0$$

В полученном выражении делаем обратную замену $p=y'$.

$$p^2=\frac{1}{y^2}\Rightarrow\left(y'\right)^2=\frac{1}{y^2}\Rightarrow y'=\frac{1}{\pm y}$$

2) $y'=\dfrac{1}{\pm y}$ – решив второе уравнение, найдём искомую функцию $y(x)$.

$$y'=\frac{1}{\pm y}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\pm y}\Rightarrow\pm ydy=dx\Rightarrow\int(\pm y)dy=\int dx\Rightarrow\frac{(\pm y)^2}{2}=x+C_2$$

$$y^2=2(x+C_2)\Rightarrow y=\pm\sqrt{2(x+C_2)}$$

Найдём константу, подставив начальные условия

$$-1=\pm\sqrt{2(1+C_2)}\Rightarrow -1=-\sqrt{2(1+C_2)}\Rightarrow \frac{1}{2}=1+C_2\Rightarrow C_2=-\frac{1}{2}$$

Ответ: $y=-\sqrt{2(x-0,5)}$.

Задание 12. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$y'''-5y''+6y'=6x^2+2x-5$

Решение

Это неоднородное линейное дифференциальное *уравнение третьего* порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид

$y_{ОН}=y_{ОО}+y_{ЧН}$,

где обозначено

$y_{ОН}$ - *общее решение неоднородного уравнения*

$y_{ОО}$ - *общее решение однородного уравнения*

$y_{ЧН}$ - *частное решение неоднородного уравнения.*

Решение такого уравнение выполняется в два этапа

1) Рассматриваем однородное уравнение. Для его получения необходимо заменить нулём правую часть исходного уравнения.

$y'''-5y''+6y'=0$

Составим *характеристическое уравнение*. Заменим производные y порядка переменными λ в соответствующей степени. Получаем кубическое уравнение.

$\lambda^3-5\lambda^2+6\lambda=0$

$\lambda(\lambda^2-5\lambda+6)=0\Rightarrow\lambda_1=0$

$\lambda^2-5\lambda+6=0$

$D=(-5)^2-4\cdot6=25-24=1$

$\lambda_{2,3}=\frac{5\pm1}{2},\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$

Тогда общее решение однородного уравнения.

$y_{ОО}=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+C_3e^{\lambda_3x}=C_1e^0+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$

Желательно найти таблицу по которой подбирается решение. **Таблицы нет. Согласно теории решения линейных дифф. уравнений с постоянными коэффициентами, после определения корней характеристического уравнения строится соответствующая фундаментальная система решений, линейная комбинация которых, с произвольными постоянными коэффициентами, и является общим решением однородного уравнения.**

Тогда нужно сделать ссылку на эти правила или описать их здесь.

В книге Краснова, Киселёва, Макаренко с.91 есть таблица, можно здесь сделать нечто подобное или хотя бы описать некоторые частные случаи.

2) Частное решение неоднородного уравнения найдем *методом неопределенных коэффициентов.* Первоначально, по виду правой части

исходного уравнения и значениям корней характеристического уравнения устанавливаем вид $y_{ЧН}$. В данном случае – это:

$$y_{ЧН}=(Ax^2+Bx+C)x=Ax^3+Bx^2+Cx$$

Найдём теперь производные этой функции:

$$y'_{ЧН}=3Ax^2+2Bx+C$$
$$y''_{ЧН}=6Ax+2B$$
$$y'''_{ЧН}=6A$$

и подставим их в левую часть исходного уравнения.

$$y'''_{ЧН}-5y''_{ЧН}+6y'_{ЧН}=6x^2+2x-5$$
$$6A-5(6Ax+2B)+6(3Ax^2+2Bx+C)=6x^2+2x-5$$

Находим значения констант, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$6A-30Ax-10B+18Ax^2+12Bx+6C=6x^2+2x-5$$
$$18Ax^2+(12B-30A)x+(6A-10B+6C)=6x^2+2x-5$$

$$\begin{cases}18A=6\\12B-30A=2\\6A-10B+6C=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1/3\\12B-10=2\\2-10B+6C=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1/3\\B=1\\-8+6C=-5\Rightarrow C=1/2\end{cases}$$

Таким образом, получаем $y_{ЧН}=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+\dfrac{1}{2}x$

Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения будет следующим:

$$y_{ОН}=y_{ОО}+y_{ЧН}=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}+\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{1}{2}x$$

Ответ: $C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}+\dfrac{1}{3}x^3+x^2+\dfrac{1}{2}x$.

Проверка

Найдём производные полученного решения и подставим в исходное уравнение $y'''-5y''+6y'=6x^2+2x-5$.

$$y'=2C_2e^{2x}+3C_3e^{3x}+x^2+2x+\frac{1}{2}$$
$$y''=4C_2e^{2x}+9C_3e^{3x}+2x+2$$
$$y'''=8C_2e^{2x}+27C_3e^{3x}+2$$

$$8C_2e^{2x}+27C_3e^{3x}+2-5(4C_2e^{2x}+9C_3e^{3x}+2x+2)+\ldots$$
$$+6(2C_2e^{2x}+3C_3e^{3x}+x^2+2x+\frac{1}{2})=6x^2+2x-5$$

$$8C_2e^{2x}+27C_3e^{3x}+2-20C_2e^{2x}-45C_3e^{3x}-10x-10+$$

$+12C_2e^{2x}+18C_3e^{3x}+6x^2+12x+3=6x^2+2x-5$

$6x^2+2x-5=6x^2+2x-5$
Выражения тождественны, решение верно.

Выполнять подобную поверку путём подстановки y_{OH} бывает затруднительно. Иногда целесообразно выполнять проверку y_{OO} и $y_{ЧН}$ по отдельности. Это будет показано в следующем примере.

Правила составления общего решения однородного уравнения
Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c=0$$

мы получаем корни этого уравнения $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$, количество которых равно степени полинома. Могут получаться различные ситуации, в зависимости от которых y_{OO} будет составляться различным образом. Далее описаны основные из низ.
а) все решения характеристического уравнения действительны и различны $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$

$$y_{OO}=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+C_3e^{\lambda_3x}$$

б) среди корней есть кратные действительные $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$

$$y_{OO}=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}+C_3x^2e^{\lambda x}$$

в) есть комплексные корни (комплексно сопряжённые) $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$

$$y_{OO}=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$$

Есть ещё один случай, но я решил не усложнять, в книге Краснова, Киселёва, Макаренко это хорошо описано.

Задание 13. Найти общее решение дифференциального уравнения.
$y'''+y''-6y'=\left(20x+14\right)\mathrm{e}^{2x}$
Решение
Имеем: $y_{OH}=y_{OO}+y_{ЧН}$
1) Находим общее решение однородного уравнения
$\lambda^3+\lambda^2-6\lambda=0$
$(\lambda^2+\lambda-6)\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=0$
$\lambda^2+\lambda-6=0$
$D=1^2-4\cdot(-6)=25$
$\lambda_{2,3}=\dfrac{-1\pm5}{2},\ \ \lambda_2=-3,\ \ \lambda_3=2$
$y_{OO}=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+C_3e^{\lambda_3x}=C_1+C_2e^{-3x}+C_3e^{2x}$
2) Рассмотрим неоднородное уравнение. Его частное решение будем искать в виде:

$y_{ЧН} = x(Ax+B)e^{2x} = (Ax^2+Bx)e^{2x}$

Находим производные

$y'_{ЧН} = (2Ax+B)e^{2x} + 2(Ax^2+Bx)e^{2x} = (2Ax^2+2Ax+2Bx+B)e^{2x}$

$y''_{ЧН} = (4Ax+2A+2B)e^{2x} + 2(2Ax^2+2Ax+2Bx+B)e^{2x} =$

$(4Ax^2+8Ax+4Bx+2A+4B)e^{2x}$

$y'''_{ЧН} = (8Ax+8A+4B)e^{2x} + 2(4Ax^2+8Ax+4Bx+2A+4B)e^{2x} =$

$(8Ax^2+24Ax+16Bx+12A+12B)e^{2x}$

Подставляем их в исходное уравнение

$y'''_{ЧН} + y''_{ЧН} - 6y'_{ЧН} = \left(20x+14\right)\mathrm{e}^{2x}$

$(8Ax^2+24Ax+16Bx+12A+12B)e^{2x} + (4Ax^2+8Ax+4Bx+2A+4B)e^{2x}...$

$-6(2Ax^2+2Ax+2Bx+B)e^{2x} = \left(20x+14\right)\mathrm{e}^{2x}$

Применяем *метод неопределённых* коэффициентов. Приравнивая коэффициенты при экспонентах, сокращая на 2 и приводя подобные, имеем

$(4Ax^2+12Ax+8Bx+6A+6B)+(2Ax^2+4Ax+2Bx+A+2B)...$

$-3(2Ax^2+2Ax+2Bx+B) = 10x+7$

$4Ax^2+12Ax+8Bx+6A+6B+2Ax^2+4Ax+2Bx+A+2B...$

$-6Ax^2-6Ax-6Bx-3B = 10x+7$

$10Ax+4Bx+7A+5B = 10x+7$

$(10A+4B)x+7A+5B = 10x+7$

Приравнивая, теперь, коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{cases} 10A+4B=10 \\ 7A+5B=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \end{cases}$$

Таким образом

$y_{ЧН} = x^2e^{2x}$

и

$y_{ОН} = y_{ОО} + y_{ЧН} = C_1 + C_2e^{-3x} + C_3e^{2x} + x^2e^{2x}$

Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-3x} + C_3e^{2x} + x^2e^{2x}$

Проверка.

1. Проверяем общее решение однородного уравнения

$y'''_{ОО} + y''_{ОО} - 6y'_{ОО} = 0$

Находим производные

$y'_{ОО} = -3C_2e^{-3x} + 2C_3e^{2x}$

$y''_{ОО} = 9C_2e^{-3x} + 4C_3e^{2x}$

$y'''_{ОО} = -27C_2e^{-3x} + 8C_3e^{2x}$

Подставляем

$-27C_2e^{-3x} + 8C_3e^{2x} + 9C_2e^{-3x} + 4C_3e^{2x} - 6(-3C_2e^{-3x} + 2C_3e^{2x}) = 0$

$-27C_2e^{-3x} + 9C_2e^{-3x} + 18C_2e^{-3x} + 8C_3e^{2x} + 4C_3e^{2x} - 12C_3e^{2x} = 0 \Rightarrow 0 = 0$

Выражения тождественные, решение верно.
2. Проверяем частное решение неоднородного уравнения
$y'''_{ЧН} + y''_{ЧН} - 6y'_{ЧН} = \left(20x + 14\right)\mathrm{e}^{2x}$
Находим производные
$y'_{ЧН} = 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}$
$y''_{ЧН} = 2e^{2x} + 8xe^{2x} + 4x^2e^{2x}$
$y'''_{ЧН} = 12e^{2x} + 24xe^{2x} + 8x^2e^{2x}$
Подставляем
$12e^{2x} + 24xe^{2x} + 8x^2e^{2x} + 2e^{2x} + 8xe^{2x} + 4x^2e^{2x} - 6(2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}) = (20x + 14)\mathrm{e}^{2x}$
$14e^{2x} + 20xe^{2x} = (20x + 14)\mathrm{e}^{2x}$
Выражения тождественны.
Т.к. y_{OO} и $y_{ЧН}$ верны, то можно утверждать, что и y_{OH}, также верно по свойству суммы производных:

$$f' + g' = (f + g)'$$

Задача 14. Найти общее решение дифференциального уравнения.
$y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}\sin 6x$
Решение
Ищем решение в виде: $y_{OH} = y_{OO} + y_{ЧН}$
1) Решаем *общее однородное* уравнение:
$y'' - 4y' + 4y = 0$
$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
$D = (-4)^2 - 4\cdot 4 = 0$
$\lambda_{1,2} = \dfrac{4}{2} = 2$
Если характеристическое уравнение имеет два кратных корня, то общее решение имеет вид: $y_{OO} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.
2) Находим *частное решение неоднородного уравнения*
Его будем искать в виде: $y_{ЧН} = e^{2x}(A\cos 6x + B\sin 6x)$. Тогда
$y'_{ЧН} = e^{2x}(2A\cos 6x + 2B\sin 6x - 6A\sin 6x + 6B\cos 6x)$
$y''_{ЧН} = e^{2x}(-32A\cos 6x - 32B\sin 6x - 24A\sin 6x + 24B\cos 6x)$
Подставляем полученные выражения в исходное уравнение
$e^{2x}(-32A\cos 6x - 32B\sin 6x - 24A\sin 6x + 24B\cos 6x)$
$-4e^{2x}(2A\cos 6x + 2B\sin 6x - 6A\sin 6x + 6B\cos 6x) +$
$4e^{2x}(A\cos 6x + B\sin 6x) = \mathrm{e}^{2x}\sin 6x$
Применяем *метод неопределённых* коэффициентов (вначале, приравнивая коэффициенты при экспонентах, затем при косинусах и синусах).

$-32A\cos 6x - 32B\sin 6x - 24A\sin 6x + 24B\cos 6x - 8A\cos 6x$

$-8B\sin 6x + 24A\sin 6x - 24B\cos 6x + 4A\cos 6x + 4B\sin 6x = \sin 6x$

$-36A\cos 6x - 36B\sin 6x = \sin 6x$

$$\begin{cases} -36A = 0 \\ -36B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -1/36 \end{cases}$$

Таким образом, $y_{ЧН} = e^{2x}(0\cos 6x - 1/36\sin 6x) = -\dfrac{1}{36}e^{2x}\sin 6x$

Тогда

Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} - \dfrac{1}{36}e^{2x}\sin 6x$

Задача 15. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$y''' - 100y' = 20\mathrm{e}^{10x} + 100\cos 10x$

Решение

Составляем характеристическое уравнение и решая его

$\lambda^3 - 100\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 10)(\lambda + 10) = 0$ получим

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 10,\ \lambda_3 = -10$

Таким образом, решение общего однородного уравнения

$y_{OO} = C_1 + C_2 e^{10x} + C_3 e^{-10x}$

Частное решение ищем в виде суммы

Для $20\mathrm{e}^{10x}$ ищем решение axe^{10x}

Для $100\cos 10x$ ищем $b\cos 10x + c\sin 10x$

Тогда частное решение неоднородного уравнения

$y_{ЧН} = axe^{10x} + b\cos 10x + c\sin 10x$

Находим производные

$y'_{ЧН} = ae^{10x} + 10axe^{10x} - 10b\sin 10x + 10c\cos 10x$

$y''_{ЧН} = 20ae^{10x} + 100axe^{10x} - 100b\cos 10x - 100c\sin 10x$

$y'''_{ЧН} = 300ae^{10x} + 1000axe^{10x} + 1000b\sin 10x - 1000c\cos 10x$

Подставляем производные в левую часть исходного уравнения

$300ae^{10x} + 1000axe^{10x} + 1000b\sin 10x - 1000c\cos 10x - \ldots$

$100(ae^{10x} + 10axe^{10x} - 10b\sin 10x + 10c\cos 10x) = 20\mathrm{e}^{10x} + 100\cos 10x$

$300ae^{10x} + 1000axe^{10x} + 1000b\sin 10x - 1000c\cos 10x$

$-100ae^{10x} - 1000axe^{10x} + 1000b\sin 10x - 1000c\cos 10x = 20\mathrm{e}^{10x} + 100\cos 10x$

$200ae^{10x} + 2000b\sin 10x - 2000c\cos 10x = 20\mathrm{e}^{10x} + 100\cos 10x$

$$\begin{cases} 200a = 20 \\ 2000b = 0 \\ -2000c = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/10 \\ b = 0 \\ c = -1/20 \end{cases}$$

$y_{ЧН} = \dfrac{1}{10}xe^{10x} - \dfrac{1}{20}\sin 10x$

Ответ: $C_1 + C_2 e^{10x} + C_3 e^{-10x} + 0.1xe^{10x} - 0.05\sin 10x$

Задача 16. Найти решение задачи Коши.

16.31. $y'' + y = 1/\cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Решение

Общее однородное решение

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda^2 = -1$

$\lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

Корни уравнения комплексные $\lambda = \alpha \pm i\beta$, значит, решение имеет вид

$y_{OO} = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

т.к. $\alpha = 0,\ \beta = 1$, то

$y_{OO} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Частное неоднородное решение найдём методом вариации произвольных постоянных. Согласно ему, частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$y_{ЧН} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2,$$

где $C_1(x), C_2(x)$ - неизвестные функции, а $y_1(x) = \cos x,\ y_2(x) = \sin x$ - фундаментальная система решений.

$C_1 = C_1(x),\ C_2 = C_2(x)$.

$y_1 = \cos x;\ y_1' = -\sin x;$

$y_2 = \sin x,\ y_2' = \cos x$

$f = \dfrac{1}{\cos x}$

$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$

Составим систему уравнений для нахождения $C_1(x),\ C_2(x)$.

Имеем

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ C_1'(-\sin x) + C_2' \cos x = 1/\cos x \end{cases}.$$

Решим ее по *правилу Крамера*.

Находим определитель.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Тогда

$$C_1' = \frac{0 \cdot y_2' - y_2 f}{W} = \frac{-\sin x \cdot \dfrac{1}{\cos x}}{1} = -\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow C_1 = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x|$$

$$C_2' = \frac{y_1 f - 0\cdot y_1'}{W} = \frac{\cos x \cdot \dfrac{1}{\cos x}}{1} = 1 \Rightarrow C_2 = \int dx = x$$

Здесь константы не учитываются, т.к. мы находим частное решение.
Таким образом, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{ЧН} = \ln|\cos x|\cos x + x\sin x$$

и, складывая его с общим решением однородного уравнения, получаем общее решение неоднородного уравнения

$$y_{OH} = y_{OO} + y_{ЧН} = C_1\cos x + C_2\sin x + \ln|\cos x|\cos x + x\sin x =$$
$$\left(\ln|\cos x| + C_1\right)\cos x + \left(x + C_2\right)\sin x$$

Используя теперь начальные условия, найдем значения постоянных. Имеем

$$y' = -\left(\ln|\cos x| + C_1\right)\sin x + \left(x + C_2\right)\cos x$$

$$y' = -\sin x\frac{1}{\cos x}\cos x - \left(\ln|\cos x| + C_1\right)\sin x + \sin x + \left(x + C_2\right)\cos x =$$
$$= -\left(\ln|\cos x| + C_1\right)\sin x + \left(x + C_2\right)\cos x$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\ln|\cos 0| + C_1\right)\cos 0 + \left(0 + C_2\right)\sin 0 = 1 \\ -\left(\ln|\cos 0| + C_1\right)\sin 0 + \left(0 + C_2\right)\cos 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Подставляем значения констант

Ответ: $y = \left(\ln|\cos x| + 1\right)\cos x + x\sin x$

Проверка.

Выполним проверку полученного решения.

1. Проверим начальные условия $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

$$y(0) = \left(\ln|\cos 0| + 1\right)\cos 0 + 0\sin 0 = 1$$

$$y' = -\left(\ln|\cos x| + 1\right)\sin x + x\cos x$$

$$y'(0) = -\left(\ln|\cos 0| + 1\right)\sin 0 + 0\cos 0 = 0$$

Условия выполняются.

2. Проверим решение, подставив его в уравнение.

Найдём вторую производную.

$$y'' = \frac{\sin^2 x}{\cos x} - \left(\ln|\cos x| + 1\right)\cos x + \cos x - x\sin x$$

Подставим в уравнение.

$$y'' + y = 1/\cos x$$

$$y'' + y = \frac{\sin^2 x}{\cos x} - \left(\ln|\cos x| + 1\right)\cos x + \cos x - x\sin x + \left(\ln|\cos x| + 1\right)\cos x + x\sin x =$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

Выражения тождественны. Решение верно.