

Министерство образования и науки Украины  
Донецкий национальный технический университет  
Факультет вычислительной техники и информатики  
Кафедра компьютерных систем мониторинга

**В. Н. Беловодский**

**Восемь лекций по численным методам**

(Конспект лекций по курсу  
«Численные методы в информатике»  
для студентов специальности  
7.080407 «Компьютерный эколого-экономический мониторинг»)

Рассмотрено на заседании кафедры КСМ  
протокол № 1 от 30 августа 2005г.

Утверждено на учебно-методическом  
совете ДонНТУ № 4956

Донецк-2005

УДК 519.95

Беловодский В.Н. Восемь лекций по численным методам: Конспект лекций по курсу «Численные методы в информатике» для студентов специальности 7.080407 «Компьютерный эколого-экономический мониторинг»). – Донецк: ДонНТУ, 2005. - 101 с.

Содержит минимальные теоретические сведения, рассчитанные на 32 лекционных часа, излагаемые студентам специальности КЭМ по курсу «Численные методы в информатике». Каждая лекция (3 - 5 аудиторных часов) посвящена одному из разделов курса, приводятся варианты индивидуальных заданий по каждому из них.

## Содержание

Введение	5
Лекция 1. Элементы теории погрешностей	6
1.1. Типы и источники погрешностей	6
1.2. Абсолютные и относительные погрешности приближённых чисел	6
1.3. Погрешности выполнения арифметических операций	7
1.4. Погрешность вычисления функции	10
1.5. Запись приближённых чисел	12
1.6. Правила действий над приближёнными числами	13
1.7. Погрешности при машинном представлении чисел	14
1.8. Задание, варианты	16
Лекция 2. Интерполяция функций	17
2.1. Постановка задачи	17
2.2. Алгебраическая интерполяция, существование и единственность интерполяционного многочлена	17
2.3. Интерполяционный многочлен Лагранжа	18
2.4. Конечные и разделенные разности	19
2.5. Интерполяционный многочлен Ньютона	21
2.6. Сравнительный анализ интерполяционных многочленов	22
2.7. Погрешности интерполяционных формул	22
2.8. Интерполяционные формулы для равноотстоящих узлов	24
2.9. Сплайн интерполяция	27
2.10. Задание, варианты	30
Лекция 3. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений	31
3.1. Предварительные замечания	31
3.2. Точные методы решения	32
3.3. Приближенные методы решения	35
3.4. Сходимость и погрешность приближённых методов	37
3.5. Приведение системы $Ax=b$ к нормальному виду	41
3.6. Задание, варианты	44
Лекция 4. Решение нелинейных уравнений	46
4.1. Предварительные замечания	46
4.2. Методы, основанные на алгебраическом интерполировании	48
4.3. Метод последовательных приближений	51
4.4. Задание, варианты	52
Лекция 5. Решение систем нелинейных уравнений	55
5.1. Метод итераций	55
5.2. Метод Ньютона	59
5.3. Сравнительный анализ методов	60
5.4. Задание, варианты	60

Лекция 6. Приближенное вычисление определенных интегралов	65
6.1 Вступительные замечания	65
6.2 Формулы Ньютона-Котеса	65
6.3 Простейшие квадратурные правила	68
6.4 Погрешности квадратурных формул	71
6.5 Понятие о методах Монте-Карло	73
6.6 Задание, варианты	74
Лекция 7. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений	78
7.1 Вступительные замечания	78
7.2 Аналитические методы решения	78
7.3 Численные методы, правило Рунге	81
7.4 Задание, варианты	87
Лекция 8. Основы спектрального анализа	90
8.1 Элементы общей теории	90
8.2 Комплексная форма рядов Фурье	93
8.3 Дискретная форма рядов Фурье	94
8.4 Задание, варианты	95
Дополнительная литература	101

## Введение

Данное учебное пособие представляет собой конспект лекций по курсу «Численные методы в информатике», который читается студентам специальности 7.080407 «Компьютерный эколого-экономический мониторинг» и является, по существу, введением в соответствующий раздел математики. Структурно состоит из восьми лекций, каждая из которых посвящена одному из разделов курса, и содержит базовые теоретические сведения, призванные создать фундамент, необходимый для дальнейшего самостоятельного изучения данного предмета.

При формировании тематики курса учитывалось содержание известных пакетов прикладных программ. Из-за незначительного времени, выделяемого на данный курс (32 лекционных часа) в него не удалось включить ряд важных разделов. Это в первую очередь относится к вычислительным методам линейной алгебры и приближенным методам решения уравнений в частных производных. Отчасти их отсутствие компенсируется кратким обзором приближенных методов в курсе «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», а разностные схемы включены в курс «Краевые задачи математической физики».

Основная часть индивидуальных заданий, приводимых в конце каждой главы, разработана доцентом Пчелкиным В.Н.

## Лекция 1. Элементы теории погрешностей

*В которой рассматриваются основные понятия теории погрешностей, а также характер распространения погрешности при выполнении арифметических операций и вычислении функции. Приводятся правила записи приближенных чисел и практические правила действия над ними. Отмечаются особенности машинного представления чисел.*

### 1.1. Типы и источники погрешностей

Возникающие при математическом моделировании погрешности условно делят на три типа, - **неустранимую, погрешность аппроксимации и вычислительную**. Источниками первой из них являются неточности в составлении математической модели, а также в задании исходных данных. Вычислитель, как правило, лишён возможности влиять на величину этой погрешности, по-видимому, поэтому она так и называется, - **неустраняемая**. Источником **погрешности аппроксимации** является замена исходной математической модели иной, более удобной для исследования. Такой переход обычно производится с целью упрощения или видоизменения модели, сокращающего, или открывающего путь к получению решения. Погрешность, возникающая вследствие ошибок округления, производимого в процессе вычислений, называется **вычислительной**.

Поясним это на примере.

Предположим, что вычисление значения  $\sin x$  решено проводить по формуле  $f(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ .

Тогда неточность в задании значения  $x$ , если она есть, образует неустранимую погрешность. Величина  $\sin x - f(x)$  представит собой погрешность аппроксимации. А проводимые в процессе вычислений округления, обусловят вычислительную погрешность.

Целью данного раздела является разработка методов численного анализа готовых математических моделей. Поэтому в первую очередь в поле зрения раздела попадают погрешность аппроксимации и вычислительная. Величина и особенности их поведения в процессе вычислений относятся к числу важных показателей, характеризующих качество вычислительных схем.

### 1.2. Абсолютные и относительные погрешности приближённых чисел

Эти понятия относятся к числу базовых в теории погрешностей.

Обозначим через  $x^*$  точное значение некоторой величины, через  $x$ , - его приближенное значение. Тогда разность  $\varepsilon(x) = x^* - x$  называется **погрешностью приближённого числа  $x$** . При действиях с приближёнными

числами обычно известно, что абсолютная величина погрешности  $\varepsilon(x)$  не превосходит некоторой величины  $\Delta(x)$ , т.е.

$$|\varepsilon(x)| \leq \Delta(x).$$

Величина  $\Delta(x)$  представляет собой оценку абсолютной величины погрешности и называется **абсолютной погрешностью приближённого числа  $x$** . Естественно, в качестве  $\Delta(x)$ , по имеющейся информации, выбирают наименьшую величину, удовлетворяющую указанному условию. Отметим, что при наличии  $\Delta(x)$  может быть установлен и диапазон расположения точного значения  $x$ . Действительно, т.к.  $|x^* - x| \leq \Delta(x)$ , то  $x - \Delta(x) \leq x^* \leq x + \Delta(x)$ .

Отношение

$$\frac{\varepsilon(x)}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

представляет собой относительную погрешность приближенного числа  $x$ . Но т.к.  $\varepsilon(x)$ , вообще говоря, не известна, то в качестве относительной принимают верхнюю оценку  $\delta(x)$  модуля этого отношения. Т.е. величина  $\delta(x)$ , такая, что

$$\left| \frac{x^* - x}{x} \right| \leq \delta(x)$$

называется **относительной погрешностью** числа  $x$ . Очевидно, что

$$\delta(x) = \frac{\Delta(x)}{|x|} \quad \text{и} \quad \Delta(x) = |x|\delta(x).$$

Иногда величину  $\delta(x)$  выражают и в процентах. Заметим, что при наличии  $\delta(x)$  также может быть установлен диапазон расположения точного значения. Действительно, так как

$$|x^* - x| \leq \delta(x)|x|,$$

то

$$x - |x|\delta(x) \leq x^* \leq x + |x|\delta(x).$$

### 1.3. Погрешности выполнения арифметических операций

Установим характер развития погрешностей при выполнении арифметических операций. Обозначим  $z = x * y$ , где  $*$  - один из символов  $\pm, \cdot, \div$ . Будем считать известными погрешности операндов  $\Delta(x), \Delta(y), \delta(x), \delta(y)$  и обозначим через  $x^*, y^*, z^*$  их точные значения.

**Сложение.** В данном случае  $z = x + y$ , где  $x, y$  - числа одного знака. Тогда справедливы следующие оценки

$$|z^* - z| = |(x^* + y^*) - (x + y)| = |(x^* - x) + (y^* - y)| \leq |x^* - x| + |y^* - y| \leq \Delta(x) + \Delta(y)$$

Таким образом, имеем

$$\Delta(x + y) = \Delta(x) + \Delta(y) \quad , \quad (1.1)$$

т.е. **абсолютная погрешность суммы двух приближённых чисел равно сумме абсолютных погрешностей слагаемых.**

Полученный результат очевидным образом обобщается и на произвольное число слагаемых.

Далее, так как

$$\left| \frac{z^* - z}{z} \right| \leq \frac{\Delta(x) + \Delta(y)}{|z|} = \frac{|x| \cdot \frac{\Delta(x)}{|x|} + |y| \cdot \frac{\Delta(y)}{|y|}}{|z|} = \frac{1}{|z|} (|x|\delta(x) + |y|\delta(y)),$$

то

$$\delta(x + y) = \frac{1}{|x + y|} (|x|\delta(x) + |y|\delta(y)). \quad (1.2)$$

**Вычитание.** В данном случае  $z = x - y$ , где значения  $x, y$  - числа одного знака. Также, как и в случае сложения, здесь

$$|z^* - z| = |(x^* - y^*) - (x - y)| = |(x^* - x) + (y - y^*)| \leq |x^* - x| + |y^* - y| \leq \Delta(x) + \Delta(y)$$

т.е.

$$\Delta(x - y) = \Delta(x) + \Delta(y), \quad (1.3)$$

что совпадает с (1.1).

Таким же образом,

$$\left| \frac{z - z^*}{z} \right| \leq \frac{|x| \cdot \delta(x) + |y| \cdot \delta(y)}{|z|},$$

и

$$\delta(x - y) = \frac{1}{|x - y|} (|x|\delta(x) + |y|\delta(y)), \quad (1.4)$$

что совпадает с (1.2).

Анализ выражений (1.3), (1.4) показывает, что при вычитании близких чисел, т.е. при  $z \rightarrow 0$ , погрешность  $\Delta(z)$  может превышать результат, а величина  $\delta(z) \rightarrow \infty$ . Поэтому при вычислениях необходимо избегать вычитания близких чисел.

**Умножение.** В данном случае  $z = x \cdot y$ . Тогда

$$|z^* - z| = |x^* y^* - xy| = |x^* y^* - x^* y + x^* y - xy| = |x^* (y^* - y) + y(x^* - x)| \leq |x^*| \cdot \Delta(y) + |y| \cdot \Delta(x) + \Delta(x) \cdot \Delta(y).$$

Далее, учитывая

$$|x^*| \leq |x| + \Delta(x),$$

имеем

$$|z^* - z| \leq |x| \cdot \Delta(y) + |y| \cdot \Delta(x) + \Delta(x) \cdot \Delta(y).$$

Таким образом

$$\Delta(xy) = |x| \cdot \Delta(y) + |y| \cdot \Delta(x) + \Delta(x) \cdot \Delta(y), \quad (1.5)$$

а

$$\delta(xy) = \frac{\Delta(xy)}{|xy|} = \delta(x) + \delta(y) + \delta(x) \delta(y). \quad (1.6)$$

Отметим, если  $\delta(x)$  или  $\delta(y) \ll 1$ , то

$$\delta(xy) = \delta(x) + \delta(y). \quad (1.6_1)$$

**Деление.** В данном случае  $z = x \div y$ . Тогда

$$\begin{aligned} |z^* - z| &= \left| \frac{x^*}{y^*} - \frac{x}{y} \right| = \frac{|x^* y - xy^*|}{|y| \cdot |y^*|} = \frac{|x^* y - xy + xy - xy^*|}{|y| \cdot |y^*|} = \frac{|y(x^* - x) + x(y - y^*)|}{|y| \cdot |y^*|} \leq \\ &\leq \frac{|y| \cdot \Delta(x) + |x| \Delta(y)}{|y| \cdot |y^*|}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $|y^*| \geq |y| - \Delta(y)$ , имеем

$$|z^* - z| \leq \frac{|y| \cdot \Delta(x) + |x| \cdot \Delta(y)}{|y|(|y| - \Delta(y))}.$$

Таким образом

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{|x| \cdot \Delta(y) + |y| \cdot \Delta(x)}{|y|(|y| - \Delta(y))}, \quad (1.7)$$

Здесь, естественно, предполагается, что  $\Delta(y) < |y|$ .

Далее, так как

$$\left| \frac{z^* - z}{z} \right| \leq \frac{|x| \cdot \Delta(y) + |y| \cdot \Delta(x)}{|y| \cdot (|y| - \Delta(y))} \div \frac{x}{y} = \frac{\delta(x) + \delta(y)}{1 - \delta(y)},$$

то

$$\delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\delta(x) + \delta(y)}{1 - \delta(y)} \quad (1.8)$$

Если  $\delta(y) \ll 1$ , то

$$\delta\left(\frac{x}{y}\right) \approx \delta(x) + \delta(y),$$

что совпадает с (1.6<sub>1</sub>).

Сведём в таблицу полученные результаты.

**Таблица 1.1.** Погрешности выполнения арифметических операций

№	Операция	$\Delta(z)$	$\delta(z)$	Примечания
1.	$z = x + y$	$\Delta(x) + \Delta(y)$	$\frac{1}{ z }( x \delta(x) +  y \delta(y))$	
2.	$z = x - y$	$\Delta(x) + \Delta(y)$	$\frac{1}{ z }( x \delta(x) +  y \delta(y))$	
3.	$z = x \cdot y$	$ x \Delta(y) +  y \Delta(x) + \Delta(x) \cdot \Delta(y)$	$\delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y)$	$\delta(z) \approx \delta(x) + \delta(y)$ , если $\delta(x)$ или $\delta(y) \ll 1$
4.	$z = x \div y$	$\frac{ x \Delta(y) +  y \Delta(x)}{ y ( y  - \Delta(y))}$	$\frac{\delta(x) + \delta(y)}{1 - \delta(y)}$	$\delta(z) \approx \delta(x) + \delta(y)$ , если $\delta(y) \ll 1$

#### 1.4. Погрешность вычисления функции

С целью упрощения математических преобразований, рассмотрим функцию двух аргументов  $z = f(x, y)$ , предполагая её достаточно гладкой,

т.е. имеющей в достаточной окрестности точки  $(x, y)$  непрерывные производные первого порядка. Предположим также, что известны абсолютные  $\Delta(x)$ ,  $\Delta(y)$  и относительные  $\delta(x)$ ,  $\delta(y)$  погрешности её аргументов. Поставим задачу определить абсолютную  $\Delta(z)$  и относительную  $\delta(z)$  погрешности вычисления функции в точке  $(x, y)$ .

Оценим абсолютную величину погрешности функции. С этой целью, используя теорему Лагранжа, получим

$$\begin{aligned} |z^* - z| &= |f(x^*, y^*) - f(x, y)| = |(f(x^*, y^*) - f(x^*, y)) + (f(x^*, y) - f(x, y))| = \\ &= \left| \frac{\partial f(x^*, \bar{y})}{\partial y} (y^* - y) + \frac{\partial f(\bar{x}, y)}{\partial x} (x^* - x) \right|, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $\bar{x} \in D_x = [x - \Delta(x), x + \Delta(x)]$ ,  $\bar{y} \in D_y = [y - \Delta(y), y + \Delta(y)]$ .

Используя, далее свойство модуля суммы, имеем

$$|z^* - z| \leq \left| \frac{\partial f(x^*, \bar{y})}{\partial y} \right| \cdot |y^* - y| + \left| \frac{\partial f(\bar{x}, y)}{\partial x} \right| \cdot |x^* - x|.$$

И, наконец, исключая зависимость оценки от неизвестных величин  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ , получим

$$|z^* - z| \leq M_y \cdot \Delta(y) + M_{ox} \cdot \Delta(x),$$

где  $M_y = \max_{(\xi, \eta) \in D} \left| \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|$ ,  $M_{ox} = \max_{\xi \in D_x} \left| \frac{\partial f(\xi, y)}{\partial \xi} \right|$ ,

$$D = \{ (\xi, \eta), \text{ где } \xi \in D_x, \eta \in D_y \}.$$

Обозначим

$$\Delta_1(z) = M_y \cdot \Delta(y) + M_{ox} \cdot \Delta(x).$$

Если в начале преобразований (1.9) к исходному выражению прибавить  $\pm f(x, y^*)$ , то в результате аналогичных действий получим вторую оценку

$$|z^* - z| \leq \Delta_2(z),$$

где

$$\Delta_2(z) = M_{oy} \cdot \Delta(y) + M_x \cdot \Delta(x),$$

где

$$M_{oy} = \max_{\eta \in D_y} \left| \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial \eta} \right|, \quad M_x = \max_{\xi \in D} \left| \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right|.$$

Тогда, очевидно, в качестве  $\Delta(z)$  необходимо взять наименьшую из них, т.е. положить

$$\Delta(z) = \min\{\Delta_1(z), \Delta_2(z)\}.$$

Если же допустить, что вполне естественно, достаточную малость абсолютных погрешностей  $\Delta(x)$   $\Delta(y)$ , то в качестве  $\Delta(z)$  можно взять более простую, однако несколько завышенную оценку

$$\Delta(z) = M_x \cdot \Delta(x) + M_y \cdot \Delta(y) \quad (1.10)$$

Действительно, в силу  $M_x \geq M_{ox}$ ,  $M_y \geq M_{oy}$ , очевидно  $\Delta(z) \geq \Delta_1(z)$  и  $\Delta(z) \geq \Delta_2(z)$ .

В этом случае из (1.10) для  $\delta(z)$  следует выражение

$$\delta(x) = \frac{1}{|f(x, y)|} (M_x \cdot |x| \delta(x) + M_y |y| \cdot \delta(y)) \quad (1.11)$$

Аналогичным образом, для функции нескольких переменных  $z = f(x_1, \dots, x_n)$ , получим

$$\Delta(z) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta(x_i)$$

и

$$\delta(z) = \frac{1}{|f(x_1, \dots, x_n)|} \sum_{i=1}^n M_i |x_i| \cdot \delta(x_i),$$

где

$$M_i = \max_{D_n} \left| \frac{\partial f(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\partial \xi_i} \right|.$$

### 1.5. Запись приближённых чисел

Приближённые числа принято записывать, указывая лишь **верные значащие цифры**. Рассмотрим  $x = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \cdot b_1 \dots b_{m-1} b_m$ - число, представленное в виде десятичной, а вообще говоря,  $n$ -ичной дроби. Его цифры, начиная с первой отличной от нуля слева, называются **значащими**. Например, в числе 0.010230 пять значащих цифр, это - 1, 0, 2, 3, 0. Значащая цифра называется **верной**, если модуль погрешности числа не превышает единицу разряда, соответствующей этой цифре. Так как погрешность числа,

как правило, неизвестна, то при определении верных знаков используют абсолютную погрешность. Так, пусть, например, погрешность  $\Delta(x)$  числа  $x = 12.3405$  равна  $0.001$ . Тогда верными значащими цифрами являются 1, 2, 3, 4, 0.

Для записи числа с верными значащими цифрами используют как  $n$ -ичную, так и показательную формы. Пусть, например, исходное приближённое число  $x = 1203.045$ , а  $\Delta(x) = 0.03$ . Тогда верными являются цифры 1, 2, 0, 3, 0 и возможны записи:  $x = 1203.0$  или  $120.30 \cdot 10$  или  $0.12030 \cdot 10^4$  и т.д.

Заметим, что запись без последнего справа нуля, например,  $120.3 \cdot 10$  неверна. Если же  $\Delta(x) = 5$ , то верными являются цифры 1, 2, 0 и число следует записать так:  $x = 120 \cdot 10$  или  $0.120 \cdot 10^4$ , т. е. сохраняя его в записи ровно три значащие цифры. Запись  $x = 1200$  или  $x = 0.12 \cdot 10^4$  будет неверна.

Запись чисел, содержащая лишь верные значащие цифры, обладает определённым достоинством, т.к. даёт возможность составлять суждения о величине абсолютной и относительной погрешности. Действительно, пусть запись  $x = 0.012$  содержит лишь верные знаки. Тогда, при отсутствии иной информации, следует считать  $\Delta(x) = 0.001$ , откуда  $\delta(x) = \frac{\Delta(x)}{x} = \frac{1}{12}$ .

## 1.6. Правила действий над приближёнными числами

Полученные выше соотношения, описывающие характер распространения погрешностей при единичных вычислениях, непригодны для оценки погрешностей при значительных объёмах вычислений. Они не учитывают возможность взаимного погашения погрешностей, имеющее место при реальных вычислениях и дают сильно завышенные оценки. Поэтому на практике рекомендуют поступать в соответствии с определёнными правилами, подтверждёнными специально проведёнными вычислениями. Приведём некоторые из них.

**Правило 1.** При небольшом объёме вычислений (несколько десятков операций) и различном числе верных значащих цифр в исходных данных необходимо провести округление до наименьшего числа значащих цифр, оставив, по возможности, одну дополнительную. Также следует поступать и с промежуточными результатами, отбросив дополнительную цифру в окончательном, проведя округление.

**Правило 2.** При значительном объёме вычислений (сотни и более операций) и при необходимости получить в результате  $n$  верных значащих цифр рекомендуется провести округление исходных данных до  $(n+2)$ -х верных цифр. Также следует поступать и с промежуточными результатами, проведя округление заключительного до  $n$  знаков.

В связи с этим сделаем следующее замечание.

При проведении машинных вычислений, как правило, не предусматривается возможность учёта значащих цифр в промежуточных вычислениях. Однако наличие большого числа знаков в окончательном результате не должно создавать иллюзию высокой точности произведённых вычислений. Доверие, по – прежнему, должны вызывать знаки, указанные в приведённых правилах. Иногда для оценки достоверности полученного результата задачу решают различными методами и совпадающие знаки полагают верными.

В заключение напомним одно из основных правил округления, называемое **округлением с поправкой**.

Если отбрасываемая часть числа превышает половину младшего оставляемого разряда, то соответствующая ему цифра увеличивается на единицу. Если отбрасываемая часть равна половине указанного разряда, то соответствующая цифра увеличивается на единицу, если является нечётной.

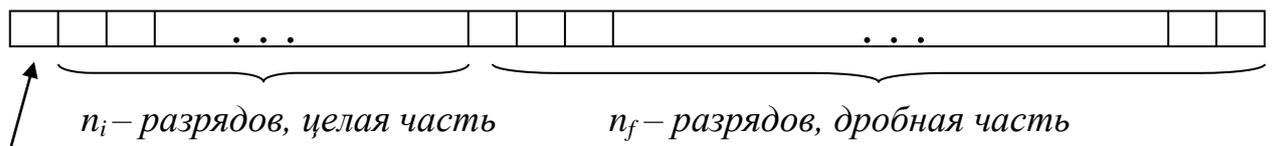
Так, например,

$$\begin{aligned} 1.346 &\rightarrow 1.3 \\ 1.346 &\rightarrow 1.35 \rightarrow 1.4 \end{aligned} \quad ,$$

отбрасываемые части выделены. Обратим внимание на различный итоговый результат, зависящий от порядка проводимых округлений. Однако в обоих случаях оставшиеся цифры являются верными.

### 1.7. Погрешности при машинном представлении чисел

При машинном представлении чисел используются две формы, - с **фиксированной** и **плавающей** запятой. В первом случае условно фиксируется расположение знака, отделяющего целую часть числа от дробной. Т.е. выделяется неизменное число разрядов для целой и дробной частей числа. Так, при общем числе  $n$  двоичных разрядов, выделяемых для представления числа один разряд резервируется под знак числа,  $n_i$  знаков, - под целую и  $n_f = n - n_i - 1$  знаков, - под дробную (Рисунок 1.1).



знак числа

Рисунок 1.1 – Распределение разрядной сетки при представлении числа с фиксированной запятой.

Отметим следующую особенность. Если исходные данные имеют неограниченное число верных знаков, то форма представления с фиксированной запятой позволяет их представить с абсолютной величиной погрешности не превышающей половину младшего разряда, т.е.

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{-n_f}. \text{ Таким образом, и абсолютная величина погрешности}$$

представления таких чисел не превышает  $2^{-n_f-1}$ . Этот факт, опуская подробности, иногда формулируют и так: в форме с фиксированной запятой числа представляются с одинаковой абсолютной погрешностью.

Форма представления с плавающей запятой предполагает, что оно представлено в виде

$$x = \pm 0.1a_2 \dots a_{n_m} \cdot 2^p,$$

где  $a_i = 0$  или  $1$ ,  $i = 2, \dots, n_m$ , число  $m_x = 0.1 a_2 \dots a_{n_m}$  называется **мантиссой**, число  $p$ , - **порядком**. В этом случае разрядная сетка распределяется таким образом: два разряда выделяется под знаки мантиссы  $m_x$  и порядка,  $n_m$  разрядов выделяется под мантиссу и  $n_p = n - n_m - 2$  разрядов, - под порядок (Рисунок 1.2).

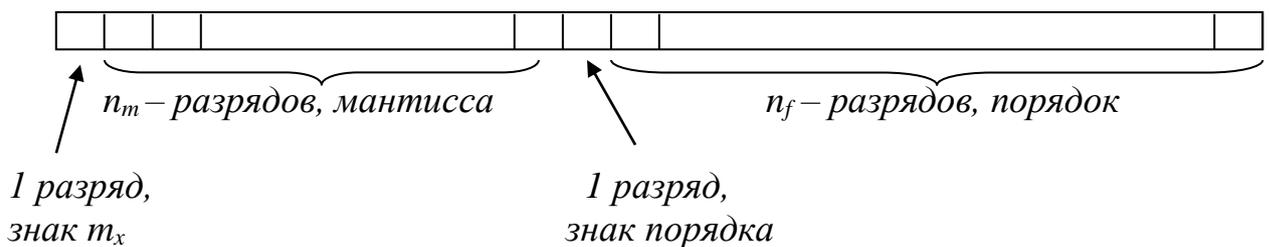


Рисунок 1.2. – Один из вариантов распределения разрядной сетки при представлении числа с плавающей запятой.

В данном случае интересным является то обстоятельство, что верхние оценки для относительных погрешностей чисел, представленных в форме с плавающей запятой, являются одинаковыми. Действительно, предположим, что исходные данные имеют неограниченное число верных знаков. Тогда, вследствие погрешности округления абсолютная величина погрешности их

представления  $|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{-n_m} \cdot 2^p$  и оценка для относительной имеет вид

$$\left| \frac{x^* - x}{\bar{x}} \right| \leq \frac{\frac{1}{2} \cdot 2^{-n_m} \cdot 2^p}{(1 \cdot 2^{-1} + a_2 \cdot 2^{-2} + \dots + a_{n_m} \cdot 2^{-n_m}) \cdot 2^p} \leq 2^{-n_m}.$$

Таким образом,  $\delta(x) \leq 2^{-n_m}$  для любого  $x$  допускаемого разрядной сеткой.

### 1.8. Варианты индивидуальных заданий

Дана функция

$$z = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

В таблице 1.2 приведены приближённые значения  $x_i$ , содержащие верные значащие цифры. Значения  $a_{ij}$  являются точными.

Необходимо:

1. определить абсолютные  $\Delta(x_i)$  и относительные  $\delta(x_i)$  погрешности исходных данных, указать диапазоны расположения их точных значений;
2. вычислить значение функции с учётом и без учета правила подсчёта значащих цифр, сравнить результаты;
3. определить абсолютную  $\Delta(z)$  и относительную  $\delta(z)$  погрешности функции, указать диапазон расположения её точного значения.

Таблица 1.2. Исходные данные для расчёта

Вариант №	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{22}$	$x_1$	$x_2$
1	1	-0,1	3	-0,17	0,4973
2	2	-4	0,5	1,47	-0,34134
3	-2	1	-0,8	-1,01	0,49992
4	3	-0,9	7	4,97	-0,43576
5	6	1	0,8	-2,01	19,3412
6	2	3	-0,6	0,18	-1,396
7	1	-3	0,7	2,0	-0,9754
8	4	0,7	9	-0,62	1,93985
9	6	0,4	-7	0,39	-0,1697
10	3	-0,6	2	-3,6	0,48129
11	0,8	5	-1	-1,5	0,98817
12	8	0,3	-9	0,67	4,97117
13	0,4	-8	2	1,10	-3,2222
14	4	0,2	-3	0,4984	-0,18
15	0,9	5	7	-0,43143	1,56
16	-5	0,1	7	-0,49299	1,20
17	5	0,5	-4	0,45387	-7,49
18	0,9	4	-8	-1,93421	2,00
19	2	3	0,9	6,391	-0,81
20	0,5	-9	6	0,5749	-2,0
21	8	0,2	6	1,99358	-0,26
22	3	-0,3	8	1,69740	-0,93
23	-2	0,4	8	-4,8291	6,3
24	0,7	3	-5	9,1878	-5,1
25	4	0,8	9	7,94711	-7,6

## Лекция 2. Интерполяция функций

*В которой формулируется постановка задачи и проводится построение основных интерполяционных многочленов. Кратко описана методика построения кубических сплайнов.*

### 2.1. Постановка задачи

В общем случае задача аппроксимации формулируется следующим образом.

В точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , называемых **узловыми**, даны значения функции  $y = f(x)$  и, быть может, её производных. Необходимо по этим данным найти значение функции в точке  $x$  отличной от узловой.

В теории интерполяции эта задача решается следующим образом. В предварительно выбранном классе функций строится такая функция  $P(x)$ , она называется **интерполирующей**, которая в узловых точках удовлетворяет исходным данным, после чего искомое значение  $f(x)$  принимается равным  $P(x)$ .

В зависимости от выбранного класса функций методика построения интерполирующей функции имеет свои особенности. Ниже рассмотрим случаи, когда интерполирующая функция является алгебраическим многочленом, такая интерполяция называется **алгебраической**, или представленной в виде совокупности многочленов (**сплайн-интерполяция**).

### 2.2. Алгебраическая интерполяция, существование и единственность интерполяционного многочлена

Как уже отмечено выше, при алгебраической интерполяции интерполирующая функция ищется в виде многочлена, он называется **интерполяционным многочленом**. Задача его нахождения формулируется следующим образом.

Даны значения  $y_i = f(x_i)$  функции  $y = f(x)$  в различных узловых точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Необходимо найти многочлен  $P_n(x)$  степени  $n$ , принимающий в узловых точках заданные значения.

Оказывается, что данная задача разрешима и имеет единственное решение. Действительно, пусть

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

– искомый многочлен,  $a_i$  – неизвестные коэффициенты.

Тогда для определения коэффициентов  $a_i$  имеем линейную систему уравнений

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases} \quad (2.1)$$

Главным определителем системы (2.1), обозначим его через  $W(x_1, \dots, x_n)$ , является определитель

$$W(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix},$$

который называется **определителем Вандермонда**.

Индукцией по  $n$  можно показать, что

$$W(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^n (x_i - x_j).$$

Очевидно, что при  $x_i \neq x_j$  ( $i \neq j$ ) значение  $W \neq 0$ . Следовательно, система (2.1) имеет единственное решение и, следовательно, существует единственный интерполяционный многочлен.

### 2.3. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Он ищется в виде

$$P_n(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + \dots + l_n(x)y_n \quad (2.2)$$

где коэффициенты  $l_i(x)$  являются многочленами и удовлетворяют условиям

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Оказывается, что этих требований достаточно для однозначного определения  $l_i(x)$ . Действительно, многочлен  $l_i(x)$  обращается в ноль в узловых точках  $x = x_j$  ( $i \neq j$ ). Следовательно, он имеет разложение

$$l_i(x) = C_i(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n).$$

Положим теперь  $x = x_i$ . Тогда

$$l_i(x_i) = 1 = C_i(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n),$$

откуда

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

С целью сокращения записи введем функцию

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n), \quad (2.3)$$

тогда

$$C_i = \frac{1}{\omega'(x_i)},$$

$$l_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}$$

и многочлен (2.2) принимает вид

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)} y_i, \quad (2.4)$$

где  $\omega(x)$  описывается выражением (2.3). Многочлен (2.4) и называется **интерполяционным многочленом Лагранжа**.

## 2.4. Конечные и разделенные разности

Конечные и разделённые разности играют особую роль в теории интерполяции. Они используются как для формирования новых интерполяционных формул, так и для оценки погрешности интерполяции.

Пусть дана таблица  $y_i = f(x_i)$  значений функции  $y = f(x)$ . **Конечной разностью первого порядка в точке  $x_i$**  (обозначается символом  $\Delta y_i$ ), называется выражение

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$

**второго порядка**, обозначается  $\Delta^2 y_i$ , – выражение

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i,$$

**к-го порядка**, –

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i.$$

Так, например,  $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ ,  $\Delta y_1 = y_2 - y_1$ ,  $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$

**Разделенной разностью первого порядка в точках  $x_i, x_j$** , обозначается  $f(x_i, x_j)$ , называется выражение

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i},$$

**второго порядка в точках  $x_i, x_j, x_k$** , обозначается  $f(x_i, x_j, x_k)$ , – выражение

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i},$$

$k$ -го порядка в точках  $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ , – выражение

$$f(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \frac{f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) - f(x_{i_0}, \dots, x_{i_{k-1}})}{x_{i_k} - x_{i_0}}.$$

Так, например,

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1) &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \\ f(x_0, x_1, x_2) &= \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}, \\ f(x_0, x_1, \dots, x_n) &= \frac{f(x_1, \dots, x_n) - f(x_0, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}. \end{aligned}$$

Получим некоторые полезные для дальнейшего соотношения, связанные с разделенными разностями.

Выразим  $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$  через значения функции в узловых точках. Так, непосредственно из определения следует

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0},$$

и, после очевидных преобразований,

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Продолжая, далее, по индукции, получим

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Или, для сокращения записи, используя функцию  $\omega$  (2.3),

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)} \quad (2.5)$$

**Замечание.** Если в  $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$  поменять местами значения  $x_i$ , то это приведет лишь к перестановке соответствующих слагаемых правой части соотношения (2.5). Следовательно, разделенные разности являются симметричными функциями узловых точек.

Так, например

$$f(x_0, x_1) = f(x_1, x_0),$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = f(x_1, x_0, x_2) = f(x_1, x_2, x_0) = f(x_2, x_1, x_0) \text{ и т.д.}$$

Получим теперь второе полезное соотношение.

Выразим  $f(x_m)$  через разделенные разности. Так, непосредственно из определения следует

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0)f(x_0, x_1),$$

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_1, x_2) = f(x_0) + (x_1 - x_0)f(x_0, x_1) + (x_2 - x_1)f(x_1, x_2).$$

Прибавляя теперь к правой части  $\pm(x_2 - x_1)f(x_0, x_1)$  после очевидных преобразований получим

$$f(x_2) = f(x_0) + (x_2 - x_0)f(x_0, x_1) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)f(x_0, x_1, x_2).$$

Рассуждая далее по индукции по  $m$  придем к искомому соотношению

$$\begin{aligned} f(x_m) = & f(x_1) + (x_m - x_0)f(x_0, x_1) + \\ & + (x_m - x_0)(x_m - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots \\ & + (x_m - x_0)(x_m - x_1)\dots(x_m - x_{m-1})f(x_0, x_1, \dots, x_m) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Если теперь изменить нумерацию точек и обозначить  $x_m$  через  $x_0$ ,  $x_{m-1}$  через  $x_2$  и т.д., то соотношение (2.6) с учетом **симметричности распределенных разностей** принимает вид

$$\begin{aligned} f(x_0) = & f(x_m) + (x_0 - x_m)f(x_{m-1}, x_m) + \\ & + (x_0 - x_m)(x_0 - x_{m-1})f(x_{m-2}, x_{m-1}, x_m) + \dots \\ & + (x_0 - x_m)\dots(x_0 - x_1)f(x_0, x_1, \dots, x_m). \end{aligned} \quad (2.6_1)$$

## 2.5. Интерполяционный многочлен Ньютона

По аналогии с (2.6) рассмотрим многочлен степени  $n$ .

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + \dots + \\ & + (x - x_0)\dots(x - x_n)f(x_0, x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Определим его значения в узловых точках. Так, непосредственно из (2.7) имеем

$$P_n(x_0) = f(x_0)$$

Далее,

$$P_n(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0)f(x_0, x_1),$$

но, с учетом (2.6) при  $x_m = x_1$  это равняется  $f(x_1)$ .

Т.о.

$$P_n(x_1) = f(x_1)$$

Аналогичным образом получаем, что

$$P_n(x_2) = f(x_2), \dots$$

$$P_n(x_n) = f(x_n).$$

Таким образом, многочлен (2.7) принимает заданные значения в заданных точках и, следовательно, является интерполяционным. Он и называется **интерполяционным многочленом Ньютона**. Заметим, что в силу единственности (п. 2.2) различия между интерполяционными многочленами Лагранжа и Ньютона чисто внешние.

## 2.6. Сравнительный анализ интерполяционных многочленов

Внешние различия интерполяционных многочленов влекут за собой ряд особенностей, влияющих на удобство их применения. Отметим некоторые из них. Прежде всего укажем, что общим является то, что нумерация точек абсолютно произвольна и никак не связана с их числовыми значениями.

К числу достоинств многочленов Лагранжа можно отнести то обстоятельство, что при фиксированных  $x_i$ ,  $x$  и изменении  $y_i$  коэффициенты  $P_i(x)$  не пересчитываются. К числу особенностей, – роль коэффициентов  $l_i(x)$ . Их можно рассматривать, как своего рода, весовые коэффициенты при  $y_i$  и по величине  $l_i(x)$  можно судить о значимости возможных изменений  $y_i$ . Это свойство оказывается полезным при теоретическом анализе.

В качестве достоинств многочлена Ньютона можно отметить то обстоятельство, что при добавлении дополнительных узловых точек отсутствует необходимость пересчета коэффициентов. В силу отмеченной произвольности нумерации узловых точек к уже имеющемуся многочлену просто добавляются дополнительные слагаемые. Многочлен Лагранжа такой особенностью не обладает.

## 2.7. Погрешности интерполяционных формул

Ниже остановимся лишь на основных элементах методики оценки погрешности интерполяционных формул, постараюсь сохранить ее логическую схему.

Пусть  $y=f(x)$ , – интерполируемая функция, а  $P_n(x)$ - ее интерполяционный многочлен. Тогда погрешность  $R_n(x)$  интерполяции функции в точке  $x$  равна

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

откуда

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad (2.8)$$

Добавим теперь точку  $x$  к заданным узловым точкам и рассмотрим интерполяционный многочлен  $P_{n+1}(z)$  в форме Ньютона, построенный уже по  $(n+2)$  точкам  $x_0, x_1, \dots, x_n, x$ . Его значение в точке  $x$  равно:

$$P_{n+1}(x) = f(x) + (x-x_0)f(x_0, x_1) + \dots + (x-x_0)\dots(x-x_n)f(x_0, \dots, x_n, x)$$

Но, по построению,  $P_{n+1}(x) = f(x)$ , а первые  $(n+1)$  слагаемых правой части представляют собой  $P_n(x)$ . Таким образом,

$$f(x) = P_n(x) + \omega(x)f(x_0, \dots, x_n, x).$$

Сравнивая теперь это соотношение с (2.8), получаем

$$R_n(x) = \omega(x)f(x_0, \dots, x_n, x). \quad (2.9)$$

Это и есть одна из форм представления погрешности аппроксимации. Её недостатком является то обстоятельство, что для вычисления  $f(x_0, \dots, x_n, x)$  необходимо значение  $f(x)$ , которое неизвестно. В качестве выхода из такого положения остаётся взять лишь его приближённое значение, т.е.  $P_n(x)$ , однако в этом случае соотношение (2.9) становится уже приближённым.

Если же предположить, что функция  $y = f(x)$  достаточно гладкая и имеет непрерывные производные до  $(n+1)$ -го порядка включительно, то из формулы

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_n} f^{(n+1)}(x_0 + \sum_{i=1}^n t_i(x_i - x_{i-1}) + t_{n+1}(x - x_n)) dt_{n+1},$$

справедливость которой следует по индукции, по теореме о среднем вытекает соотношение

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

где  $\xi \in \left[ \min_i(x_i, x); \max_i(x_i, x) \right]$ . Тогда (2.9) принимает вид

$$R_n(x) = \frac{\omega(x)f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (2.10)$$

Недостатком этого соотношения является то, что неизвестно значение  $\xi$ . Однако, если известен вид функции  $y = f(x)$ , то полезной может оказаться оценка

$$|R_n(x)| \leq \frac{|\omega(x)| \max_{\xi} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}.$$

В том случае, когда узловые точки равноотстоящие и  $x_k = x_0 + h(k-1)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , то по индукции можно показать, что

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} \quad (2.11)$$

Если к ним добавить точку  $x$  не изменяющую характер расположения узлов, то формула остаётся справедливой и для разделённой разности следующего порядка. Т.е.

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)! h^{n+1}}.$$

В противном случае, последнее равенство становится приближённым, и сделав в  $\omega(x)$  замену  $\frac{x-x_0}{h} = t$ , получим

$$R_n(x) \approx \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_0 \quad (2.12)$$

## 2.8. Интерполяционные формулы для равноотстоящих узлов

Рассмотрим формулу Ньютона (2.7) и предположим, что узлы являются равноотстоящими, а именно,  $x_k = x_0 + (k-1)h$ , где  $k = \overline{1, n}$ . Сделаем в ней замену  $\frac{x-x_0}{h} = t$  и учтя (2.11), получим

$$P_n(t) = y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0 \quad (2.13)$$

Это и есть многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов, а погрешность интерполяции при его использовании оценивается выражением (2.12).

Отметим, что с увеличением порядка значение конечной разности  $\Delta^n y_0$  убывает. Поэтому нередко требуемая точность вычисления значения функции достигается при меньшем количестве слагаемых, т.е. при меньшем числе использованных узловых точек. В связи с этим, в зависимости от расположения значения  $x$  среди массива значений  $x_0, x_1, \dots, x_n$  на основе (2.7) формируют частные формулы, используемые для интерполяции в начале, конце и середине таблицы. Рассмотрим эти случаи.

Пусть значение  $x$  близко к  $x_0$ . Тогда выбирая для интерполяции узловые точки  $x_0, x_0 + h, x_0 + m h$  получим

$$P_n(t) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-m+1)}{m!} \Delta^m y_0 \quad (2.14),$$

её погрешность, в соответствии с (2.12)

$$R_m(t) \approx \frac{t(t-1)\dots(t-m)}{(m+1)!} \cdot \Delta^{m+1} y_0$$

Пусть теперь значение  $x$  близко к  $x_n$ , т.е. к концу таблицы. Тогда выбирая для интерполяции узлы  $x_n, x_n - h, \dots, x_n - mh$  и сделав замену  $\frac{x - x_n}{h} = t$  из (2.7) получаем

$$P_m(t) = y_n + t \cdot \Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+m-1)}{m!} \Delta^m y_{n-m} \quad (2.15),$$

погрешность интерполяции

$$R_n(t) \approx \frac{t(t+1)\dots(t+m)}{(m+1)!} \cdot \Delta^{m+1} y_{n-m-1}.$$

Если значение  $x$  близко к некоторому  $x_k$ , расположенному в средней части таблицы, то для интерполяции обычно используют точки  $x_k, x_k + h, x_k - h, \dots, x_k + mh, x_k - mh$ . Соответствующий интерполяционный многочлен также получается из (2.7) и после замены  $\frac{x - x_k}{h} = t$  принимаем

$$P_{2m}(t) = y_k + t \cdot \Delta y_k + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_{k-1} + \frac{t(t-1)(t+1)}{3!} \Delta^3 y_{k-1} + \dots + \frac{t(t-1)(t+1)\dots(t-m)}{(2m)!} \Delta^{2m} y_{k-m} \quad (2.16),$$

его погрешность оценивается выражением.

$$R_{2m}(t) \approx \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\dots(t^2-m^2)}{(2m+1)!} \cdot \Delta^{2m+1} y_{k-m}.$$

Интерполяционному многочлену (2.16) можно придать более симметричный вид. Так, разбивая нечётные слагаемые, начиная с третьего, на два, и группируя с чётными, получим

$$P_{2m}(t) = y_k + t(\Delta y_k - \frac{1}{2} \Delta^2 y_{k-1}) + \frac{t^2}{2!} \Delta^2 y_{k-1} + \frac{t(t-1)(t+1)}{3!} (\Delta^3 y_{k-1} - \frac{1}{2} \Delta^4 y_{k-2}) + \frac{t^2(t^2-1)}{4!} \Delta^4 y_{k-1} + \dots + \frac{t(t^2-1)\dots(t^2-(m-1)^2)}{(2m-1)!} (\Delta^{2m-1} y_{k-m+1} - \frac{1}{2} \Delta^{2m} y_{k-m}) + \frac{t^2(t^2-1)\dots(t^2-(m-1)^2)}{(2m)!} \Delta^{2m} y_{k-m}$$

Представим теперь разности в скобках в виде

$\Delta^2 y_{k-1} = \Delta y_k - \Delta y_{k-1}$ ,  $\Delta^4 y_{k-2} = \Delta^3 y_{k-1} - \Delta^3 y_{k-2}$  и т.д., получим  
многочлен,

$$\begin{aligned}
 P_{2m}(t) = & y_k + t \cdot \frac{\Delta y_k + \Delta y_{k-1}}{2!} + \frac{t^2}{2!} \Delta^2 y_{k-1} + \\
 & + \frac{t(t^2 - 1)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{k-1} + \Delta^3 y_{k-2}}{2} + \frac{t^2(t^2 - 1)}{4!} \Delta^4 y_{k-1} + \dots + \\
 & + \frac{t(t^2 - 1) \dots (t^2 - (m-1)^2)}{(2m-1)!} \cdot \frac{\Delta^{2m-1} y_{k-m+1} + \Delta^{2m-1} y_{k-m}}{2} + \\
 & \frac{t^2(t^2 - 1^2) \dots (t^2 - (m-1)^2)}{(2m)!} \Delta^{2m} y_{k-m},
 \end{aligned}$$

который называется **интерполяционным многочленом Ньютона – Стирлинга**.

## 2.9. Сплайн – интерполяция

Одним из недостатков рассмотренных методов является высокая степень интерполяционного многочлена, что не всегда является желательным. Разбиение же исходного отрезка на частичные и построение на них отдельных интерполяционных многочленов приводит к тому, что в точках стыка многочленов производные разрывны. Этому недостатка лишены интерполирующие функции, построенные на основе **сплайнов**.

**Сплайном на отрезке [a, b]** называется функция, непрерывная на отрезке вместе со своими производными до заданного порядка включительно, которая на частичных промежутках этого отрезка описывается различными алгебраическими многочленами.

Рассмотрим методику построения сплайна, основанного на алгебраических многочленах третьей степени, т.е. так называемую, **кубическую сплайн – интерполяцию**.

Как и ранее, считаем заданной таблицу значений функции  $y = f(x)$  в точках  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ . На каждом из отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$  многочлен  $P_i(x)$  будем искать в виде

$$P_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3.$$

Таким образом, общее число многочленов равно  $n$ , а число неизвестных коэффициентов, —  $4n$ . Поэтому для их определения необходимо такое же количество условий.

Потребуем, чтобы каждый многочлен в крайних точках своего отрезка удовлетворял условиям

$$P_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad P_i(x_i) = y_i, \quad i = \overline{1, n},$$

что даёт  $2n$  соотношений. Далее, потребуем, чтобы во внутренних узловых точках первая и вторая производные интерполирующей функции были непрерывными, т.е.

$$P_i^{(k)}(x_i) = P_{i-1}^{(k)}(x_i), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad n = 1, 2.$$

Это даёт ещё  $2(n-1)$  ограничений. Для получения двух недостающих можно дополнительно потребовать, что в крайних точках отрезка интерполирующая функция имела нулевую кривизну, т.е.,

$$P_1''(x_0) = 0, \quad P_n''(x_n) = 0$$

Таким образом, для определения коэффициентов многочленов имеем систему уравнений.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(x_0) = y_0 \\ P_1''(x_0) = 0 \\ P_i(x_i) = y_i \\ P_i'(x_i) = P_{i-1}'(x_i) \\ P_i''(x_i) = P_{i-1}''(x_i) \\ P_{i-1}(x_i) = y_i \\ P_n(x_n) = y_n \\ P_n''(x_n) = 0 \end{array} \right. \quad i = \overline{1, n-1},$$

которая оказывается линейной. В том случае, когда узловые точки являются равноотстоящими, т.е.  $x_i = x_0 + ih$ , она существенно упрощается и принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = y_0 \\ c_1 = 0 \\ a_i + b_i h + c_i h^2 + d_i h^3 = y_i \\ b_i + 2c_i h + 3d_i h^2 = b_{i+1} \\ c_i + 3d_i h = c_{i+1} \\ a_{i+1} = y_i \\ a_n + b_n h + c_n h^2 + d_n h^3 = y_n \\ c_n + 3d_n h = 0 \end{array} \right. \quad i = \overline{1, n-1} .$$

В частности, для трёх равноотстоящих узлов, т.е.  $n=2$ , имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = y_0 \\ c_1 = 0 \\ a_1 + b_1 h + c_1 h^2 + d_1 h^3 = y_1 \\ b_1 + 2c_1 h + 3d_1 h^2 = b_2 \\ c_1 + 3d_1 h = c_2 \\ a_2 = y_1 \\ a_2 + b_2 h + c_2 h^2 + d_2 h^3 = y_2 \\ c_2 + 3d_2 h = 0 \end{array} \right.$$

которая легко решается в общем виде. Действительно, из 1-го, 2-го, 5-го и 6-го уравнений следует  $a_1 = y_0$ ,  $c_1 = 0$ ,  $a_2 = y_1$  и  $d_1 = \frac{c_2}{3h}$ , а оставшаяся часть после традиционных преобразований приводится к треугольному виду

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + \frac{h}{3}c_2 = \frac{\Delta y_0}{h} \\ b_2 - \frac{2h}{3}c_2 = \frac{\Delta y_0}{h} \\ c_2 + 3d_2h = 0 \\ d_2 = -\frac{\Delta^2 y_0}{4h^3} \end{array} \right. .$$

## 2. 10. Варианты индивидуальных заданий

На промежутке  $[a, b]$  составить таблицу значений функции  $y=f(x)$  в  $(n+1)$ -ой равностоящих узловых точках. По этой таблице построить интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона. В обоих случаях определить приближённые значения функции в точке  $x = \frac{a+b}{2}$  по формуле  $f(x) \approx P_n(x)$ . Оценить погрешность  $R_n(x)$  полученных значений, сравнить её с “точной” погрешностью  $\varepsilon(x) = f(x) - P_n(x)$ .

В вариантах 1-12 считать  $f(x) = \sin kx$ ,  $[a, b] = \left[ -\frac{\pi(14-k)}{2(13-k)}; \frac{\pi(13-k)}{14-k} \right]$ ,

в вариантах 13-25, -  $f(x) = \cos(25-k)x$ ,  $[a, b] = \left[ -\frac{\pi k}{2(k-1)}; \frac{\pi(k-1)}{k} \right]$ ,

где  $k$  - номер варианта. Значение  $n$  задается преподавателем.









чего использовать третье для исключения из первых двух переменных  $x_3$ . И так далее. При такой организации вычислений на каждом шаге в работе участвует не вся система, а только её часть. Показано, что при равных объёмах используемой оперативной памяти это позволяет примерно в два раза, по сравнению с методом Гаусса, повысить порядок решаемой системы.

*Замечание.* К числу точных относятся и методы, основанные на разложении матрицы  $A$  левой части системы (3.1<sub>1</sub>) в виде произведения двух треугольных матриц  $B$  и  $C$ , т.е.  $A=BC$ , где

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n_1} & b_{n_2} & b_{n_3} & \dots & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае система принимает вид

$$BCX=b,$$

и, обозначив  $Y=CX$ , вместо системы (3.1<sub>1</sub>), имеем две системы уравнений с треугольными матрицами

$$\begin{aligned} BY &= b \\ CX &= Y. \end{aligned}$$

Центральным моментом таких методов является реализация указанного разложения матрицы  $A$ . Показано, что для симметрических и невырожденных матриц такие процедуры существуют.

### 3.3. Приближённые методы решения

При использовании приближённых методов предполагается, что система (3.1<sub>1</sub>) представлена в виде

$$x=Bx+d, \tag{3.3}$$

который называется **нормальной формой** системы уравнений.

Процесс вычислений в этом случае организуют следующим образом. По тем или иным соображениям выбирается начальное приближение  $x^{(0)}$  к решению системы. Оно подставляется в правую часть (3.3), полученное значение обозначается через  $x^{(1)}$ , принимается в качестве следующего



компоненты которого упорядочиваются по убыванию их модулей. Установленный в результате этого порядок переносится и на последовательность вычисления компонент  $(k+1)$ -го приближения по правилам (3.5).

Можно показать, что **стационарный** метод Зейделя (3.5), т.е. когда порядок вычисления компонент неизменен, сводится к методу простой итерации. Действительно, обозначим через  $B_1, B_2$  следующие матрицы

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n_1} & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n_1} & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3n_1} & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Тогда в матричном виде процесс (3.5) выглядит так

$$x^{(k+1)} = B_1 x^{(k+1)} + B_2 x^{(k)} + d.$$

Отсюда

$$(E - B_1)x^{(k+1)} + B_2 x^{(k)} + d$$

и

$$x^{(k+1)} = (E - B_1)^{-1} * B_2 x^{(k)} + d.$$

Таким образом, стационарный метод Зейделя с матрицей  $B$  эквивалентен методу простой операции с матрицей  $(E - B_1)^{-1} \cdot B_2$ .

### 3.4. Сходимость и погрешность приближённых методов

Для описания сходимости вычислительного процесса и оценки погрешности приближённого решения необходимы дополнительные понятия.

**Понятие нормы.** Нормой вектора  $x$ , обозначается  $\|x\|$ , называется величина удовлетворяющая условиям:

1.  $\|x\| \geq 0$ ;
  2.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- (3.6)

3.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ;
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

В теории метрических пространств получили распространение следующие типы норм:

1.  $\|x\|_I = \max_i |x_i|$ ;
2.  $\|x\|_{II} = \sum_i |x_i|$ ;
3.  $\|x\|_{III} = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ .

В зависимости от типа геометрической фигуры, получаемой в трёхмерном пространстве, описываемой условием  $\|x\|_I \leq I$ , первая из них называется **кубической**, вторая, - **октаэдрической** и третья, - **сферической**.

**Нормой матрицы  $A$** , обозначается  $\|A\|$ , называется величина, удовлетворяющая помимо требований (3.6) дополнительному условию

$$\|AB\| \leq \|A\| * \|B\|.$$

Обычно, используются одна из следующих норм:

1.  $\|A\|_I = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ ;
2.  $\|A\|_{II} = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ ;
3.  $\|A\|_{III} = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$ .

При одновременном использовании норм необходимо их согласование. А именно, норма вектора первого типа используется с нормой матрицы первого типа и т.д.

**Понятие расстояния.** Расстоянием между векторами  $x$ ,  $y$ , обозначается символом  $\rho(x, y)$ , называется величина

$$\rho(x, y) = \|y - x\|.$$

Из свойства 4 (3.6) следует важное для дальнейшего, так называемое, **неравенство треугольника**

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Действительно,

$$\rho(x, z) = \|z - x\| = \|(z - y) + (y - x)\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

**Сжимающие отображения.** Пусть  $F$ ,- некоторое отображение в линейном пространстве векторов. Оно называется **сжимающим**, - если существует такое число  $\alpha \in (0, 1)$ , что для любых векторов  $x, y$  выполняется соотношение

$$\rho(F(x), F(y)) < \alpha \rho(x, y).$$

Применительно к нормальной форме системы уравнений (3.3) в качестве  $F$  рассмотрим правую часть системы уравнений. А именно,

$$F(x) = Bx + d.$$

Тогда

$$\rho(F(x), F(y)) = \|F(y) - F(x)\| = \|B(y - x)\| \leq \|B\| \cdot \rho(x, y).$$

Таким образом, для того, чтобы отображение, определяемое системой (3.3) было сжимающим достаточно, чтобы одна из норм матрицы  $B$  была меньше 1.

**Понятие сходимости.** Пусть  $\{x^{(k)}\}$ , где  $k = 1, 2, \dots$ , - некоторая бесконечная последовательность векторов. Говорят, что она сходится к вектору  $x$  по норме, если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)}\| = \|x\|.$$

Последовательность  $x^{(k)}$  сходится к вектору  $x$  **покомпонентно**, если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i \quad \text{для } i = \overline{1, n}.$$

Нетрудно показать, что два эти понятия в некотором роде эквивалентны. А именно, если последовательность  $x^{(k)}$  сходится по норме, то она сходится покомпонентно и наоборот.

При анализе сходимости последовательностей центральное место принадлежит **признаку Коши**:

Последовательность  $\{x^{(k)}\}$  сходится тогда и только тогда, когда для  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  такой номер  $N(\varepsilon)$ , что для  $k > N(\varepsilon)$  и  $\forall m > 0$  выполняется

$$\|x^{(k)} - x^{(k+m)}\| < \varepsilon$$

$$\text{(или } |x_i^{(k)} - x_i^{(k+m)}| < \varepsilon \text{ для } i = \overline{1, n}).$$

**Сходимость итерационного процесса. Оценка погрешности.** Пусть  $\{x^{(k)}\}$ , - итерационная последовательность, т.е.

$$x^{(k)} = F(x^{(k-1)}), \quad (3.7)$$

где  $F$ , - сжимающее отображение с коэффициентом сжатия  $\alpha \in (0;1)$ .

Рассмотрим  $\rho(x^{(k)}, x^{(k+1)})$ . По индукции имеем

$$\rho(x^{(k)}, x^{(k+1)}) = \rho(F^{(k)}x^{(0)}, F^{(k)}x^{(1)}) \leq \alpha^k \cdot \rho(x^{(0)}, x^{(1)}). \quad (3.8)$$

Далее, по свойству треугольников и с учетом (3.8), справедливым оказывается соотношение

$$\begin{aligned} \rho(x^{(k)}, x^{(k+m)}) &\leq \rho(x^{(k)}, x^{(k+1)}) + \rho(x^{(k+1)}, x^{(k+2)}) + \dots + \\ &+ \rho(x^{(k+m-1)}, x^{(k+m)}) \leq (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-1})\rho(x^{(k)}, x^{(k+1)}) \leq (3.9) \\ &\leq \frac{1 - \alpha^m}{1 - \alpha} \cdot \alpha^k \cdot \rho(x^{(0)}, x^{(1)}) < \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \rho(x^{(0)}, x^{(1)}). \end{aligned}$$

Потребовав теперь, чтобы

$$\frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \rho(x^{(0)}, x^{(1)}) < \varepsilon,$$

очевидно, можно найти номер  $N(\varepsilon)$ , начиная с которого  $\rho(x^{(k)}, x^{(k+m)}) < \varepsilon$  для  $\forall k > N(\varepsilon), \quad m > 0$ .

Таким образом, для сжимающего отображения признак Коши выполнен и, следовательно, итерационный процесс (3.7) сходится.

Оценим теперь погрешность  $k$ -го приближения, а именно, величину  $\rho(x^{(k)}, x)$ , где  $x$ - точное решение. С этой целью рассмотрим соотношение (см. (3.9))

$$\rho(x^{(k)}, x^{(k+m)}) \leq \frac{1 - \alpha^m}{1 - \alpha} \cdot \rho(x^{(k)}, x^{(k+1)}) \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \rho(x^{(k-1)}, x^{(k)}).$$

Переходя в нём к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , получим, таким образом,

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|x^{(k-1)} - x^{(k)}\|, \quad (3.10)$$

и доказанным становится утверждение:

Если одна из норм матрицы  $B$  системы уравнений (3.3) меньше единицы, то итерационный процесс (3.4) является сходящимся при любом начальном приближении. Погрешность  $k$ -го приближения описывается соотношением (3.10).

### 3.5 Приведение системы $Ax=b$ к нормальному виду

Из предыдущего следует, что успех приближённого решения системы линейных алгебраических уравнений (3.1) во многом определяется возможностью её приведения к нормальному виду (3.3), для которого выполняются достаточные условия сходимости. Приведём некоторые соображения и рекомендации на этот счёт.

**Первый вариант.** Рассмотрим систему

$$Ax=b.$$

Представим матрицу  $A$  в виде суммы  $A=A_1+A_2$ , где  $\det A_1 \neq 0$ . Тогда

$$(A_1+A_2)x=b,$$

отсюда

$$x = -A_1^{-1}A_2x + A_1^{-1}b.$$

Обозначив через  $B = -A_1^{-1}A_2$ ,  $d = A_1^{-1}b$ , получим

$$x = Bx + d,$$

что и требовалось. Тогда для того, чтобы обеспечить выполнение достаточного условия сходимости  $\|B\| < 1$ , в качестве  $A_1$  достаточно взять матрицу близкую к  $A$ , т.е.  $A_1 \approx A$ , в качестве  $A_2$ , - «малую» матрицу  $(\varepsilon_{ij})_{m,n}$ .

Поясним это предложение на примере. Рассмотрим

$$\begin{cases} 1x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$$

Здесь  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Пусть

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon & 2 - \varepsilon \\ 3 - \varepsilon & 4 - \varepsilon \end{pmatrix},$$

Тогда  $A_2 = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Найдём  $B = -A_1^{-1}A_2$ .

Имеем  $\det A_1 = -2 \neq 0$  и

$$A_1^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 - \varepsilon & -(2 - \varepsilon) \\ -(3 - \varepsilon) & 1 - \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$B = -A_1^{-1}A_2 = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = -\frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -1 - \varepsilon \end{pmatrix}$$

и система принимает вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -1 - \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Очевидно, для сходимости метода итераций достаточно взять  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ .

**Второй вариант.** Состоит в следующем. Путём эквивалентных преобразований стараются добиться того, чтобы диагональные элементы в матрице  $A$  доминировали в левой части соответствующих уравнений, т.е. были по модулю существенно больше остальных. После этого каждое из уравнений делят на  $a_{ii}$  и, первое уравнение разрешают относительно  $x_1$  второе,- относительно  $x_2$  и т.д.

В качестве примера рассмотрим следующую систему

$$\begin{cases} 2,3x_1 - 4,2x_2 - 11,6x_3 = 14,4 \\ 8,0x_1 + 5,2x_2 + 0,2x_3 = -6,4 \\ 3,9x_1 - 7,9x_2 + 8,4x_3 = 55,6 \end{cases}$$

В результате анализа коэффициентов левой части уравнений производится их перестановка

$$\begin{cases} 8,0x_1 + 5,2x_2 + 0,2x_3 = -6,4 \\ 3,9x_1 - 7,9x_2 + 8,4x_3 = 55,6 \\ 2,3x_1 - 4,2x_2 - 11,6x_3 = 14,4 \end{cases}$$

и для обеспечения доминирования во втором уравнении коэффициента  $a_{22}$ , который пока равен  $-7,9$ , ко второму уравнению прибавляется третье. В результате этого имеем

$$\begin{cases} 8,0x_1 + 5,2x_2 + 0,2x_3 = -6,4 \\ 6,2x_1 - 12,1x_2 - 3,2x_3 = 70,0 \\ 2,3x_1 - 4,2x_2 - 11,6x_3 = 14,4 \end{cases}$$

или, в нормальной форме,

$$\begin{cases} x_1 = & -\frac{5,2}{8,0}x_2 & -\frac{0,2}{8,0}x_3 & -\frac{6,4}{8,0} \\ x_2 = & -\frac{6,2}{12,1}x_1 & & +\frac{3,2}{12,1}x_3 & -\frac{70}{12,1} \\ x_3 = & -\frac{2,3}{11,6}x_1 & -\frac{4,2}{11,6}x_2 & & -\frac{14,4}{11,6} \end{cases}$$

Здесь матрица

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5,2}{8,0} & -\frac{0,2}{8,0} \\ \frac{6,2}{12,1} & 0 & \frac{3,2}{12,1} \\ \frac{2,3}{11,6} & -\frac{4,2}{11,6} & 0 \end{pmatrix},$$

очевидно, её норма  $\|B\|_1 < 1$ , и, следовательно, формируемый ею итерационный процесс сходится.

**Третий вариант.** Является обоснованным теоретически, формализуемым и, по этой причине, пожалуй, наиболее удобным. Он заключается в следующем.

Рассмотрим систему (3.1<sub>1</sub>)

$$Ax=b$$

и предположим, что  $\det A_1 \neq 0$ . Умножим обе части на  $A^T$ , получим

$$A_1 x = b_1,$$

где  $A_1 = A^T A$ ,  $b_1 = A^T b$ . Здесь матрица  $A_1$  является симметрической, т.е.  $A_1^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = A_1$ , причём её диагональные элементы  $c_{ii} > 0$ , в противном случае, по крайней мере, один из столбцов матрицы  $A$  равен нулю и, следовательно,  $\det A = 0$ . Далее делим уравнение на диагональные элементы  $c_{ii}$  и, разрешая их относительно  $x_1, x_2$  и т.д. получим нормальную систему

$$x = Bx + d,$$

где  $B = (C_{ii} \delta_{ij})_{n,n}^{-1} (A_1 - (C_{ii} \delta_{ij})_{n,n}) x + ((C_{ii} \delta_{ij})_{n,n}^{-1} \cdot b_1)$ .

Показано, что для нормальной системы, полученной таким образом, метод Зейделя сходится.

### 3.6. Варианты индивидуальных заданий

1. При помощи ручного просчета найти решение системы линейных уравнений  $Ax=b$  методом Жордана – Гаусса, заданную своей расширенной матрицей согласно варианта задания. Вычисления провести с выбором определяющего элемента.

2. Написать программу решения системы методом Зейделя  $Ax=b$ , заданной своей расширенной матрицей. Максимальное количество уравнений в системе равно восьми. Исходные данные программы - расширенная матрица системы и значение допустимой погрешности. Выходные данные - вектор-столбец  $X$  решения системы, проверка решения  $A^*x$  и количество итераций, выполненное для получения решения.

## Варианты систем для задания 1

№ 1 -6 -2 -4 68 -4 2 5 -1 -3 -1 -5 43	№ 2 -5 3 2 -24 3 3 5 -29 -4 -1 5 -43	№ 3 -1 1 1 5 1 2 -5 -6 -2 -5 2 -25	№ 4 -2 4 -3 -2 -4 -1 2 5 -5 1 1 4	№ 5 -1 -2 -2 7 1 -3 -4 -3 3 -3 -2 -25
№ 6 -6 -1 5 6 -6 -2 -6 32 -6 -3 5 14	№ 7 -4 -4 -4 40 3 4 4 -37 2 -1 -6 26	№ 8 1 -3 -5 2 2 1 4 -17 4 -6 1 -19	№ 9 -4 -2 -5 16 1 -6 5 7 -4 3 1 -28	№ 10 -4 -3 4 -21 3 1 5 12 5 5 2 30
№ 11 -3 1 -1 -6 -4 -2 3 15 -2 1 -5 -18	№ 12 5 -6 5 20 -1 -4 -1 14 1 2 3 -28	№ 13 2 5 -1 -41 -2 5 1 -29 2 -4 -3 14	№ 14 1 -6 4 65 2 2 5 28 -1 -3 2 25	№ 15 5 5 -4 -42 -2 4 -1 -9 -2 4 -5 -21
№ 16 1 5 -3 -5 -5 5 -4 30 -4 -5 4 15	№ 17 4 1 -5 11 3 4 2 1 1 5 5 -10	№ 18 -5 2 -2 25 -5 -2 -3 30 -6 5 -6 14	№ 19 -1 -4 -1 22 -5 -4 -2 46 -6 -1 -1 40	№ 20 5 -6 -2 15 -6 2 -6 30 -5 -4 -4 57
№ 21 -6 2 -5 37 4 -6 -4 16 4 4 2 -42	№ 22 -3 5 1 17 1 1 -3 5 1 -4 5 -12	№ 23 4 -5 -2 -3 -4 5 -1 3 -2 -5 1 39	№ 24 -5 1 -3 -7 3 -1 -5 -35 1 4 1 -13	№ 25 -1 -4 -6 -17 -4 2 1 -10 5 5 -4 63

## Лекция 4. Решение нелинейных уравнений

*В которой излагаются простейшие методы решения нелинейных уравнений (половинного деления, касательных, хорд, итераций). На основе сжимающих отображений рассматриваются вопросы их сходимости и оценки погрешности.*

### 4.1. Предварительные замечания

Обычно процесс решения уравнения

$$f(x) = 0, \quad (4.1)$$

где  $f(x)$  - некоторая непрерывная функция, распадается на два этапа.

Первый из них заключается в установлении промежутка  $[a, b]$ , на котором находится, по крайней мере, один корень уравнения (4.1). Этот этап называется **отделением корней** и может осуществляться различными способами. Один из них базируется на фундаментальном свойстве непрерывных функций, описанном теоремой Больцано-Коши :

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и на его концах принимает значения разных знаков. Тогда существует внутренняя точка  $c \in (a, b)$ , в которой  $f(c) = 0$ .

Геометрически это означает, что при выполнении указанных условий график функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , хотя бы один раз, пересечёт ось  $ox$  (Рисунок 4.1).

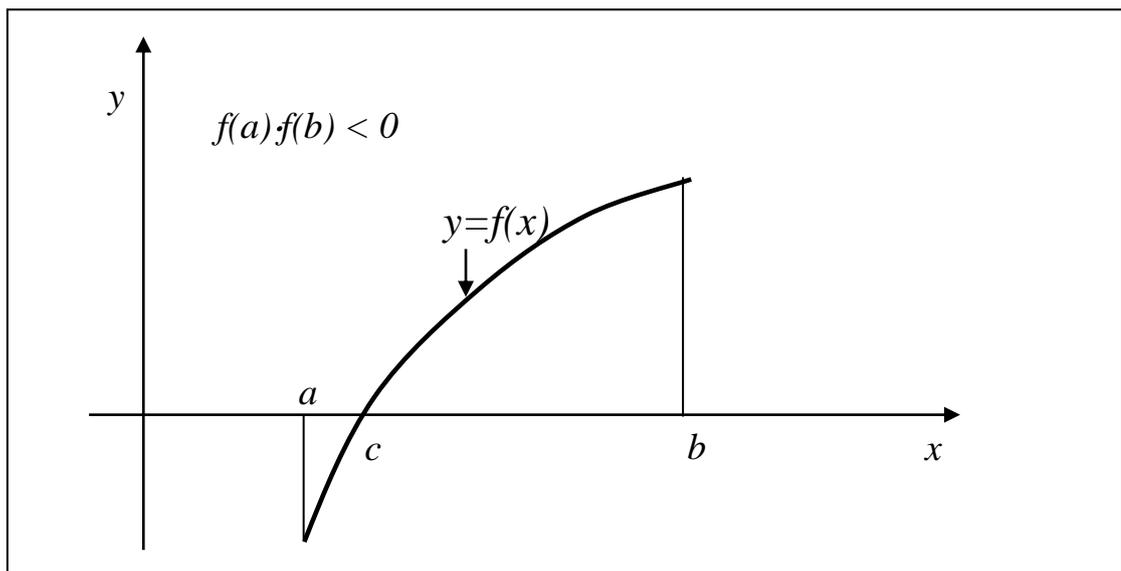


Рисунок 4.1. Иллюстрация к теореме Больцано-Коши

Отсюда следует, что для отделения корней уравнения (4.1) на первоначально заданном отрезке  $[A; B]$  необходимо с некоторым шагом  $h$  провести вычисление функции в точках  $x_i = A + (i - 1)h$  и выделить тот или те отрезки  $[x_i, x_{i+1}]$ , для которых  $f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0$ . Если с выбранным значением  $h$  такой промежуток выбрать не удалось, то необходимо повторить вычисления, уменьшая до разумных пределов значение  $h$ .

Другой способ отделения корней, - графический. При современном уровне развития вычислительной техники он, по-видимому, является и более предпочтительным. Заключается в построении графика функции  $y = f(x)$  на промежутке  $[A; B]$  и в установлении, исходя из графика, отрезка  $[a, b]$ , на котором он пересекает ось  $OX$ .

**Замечание.** На теореме Больцано-Коши основан один из методов решения нелинейных уравнений, - **метод половинного деления**. Он состоит в следующем. Пусть установлен отрезок  $[a, b]$ , на котором  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .

Далее, рассматривается середина этого отрезка точка  $c = \frac{a+b}{2}$ , определяется  $f(c)$  и из отрезков  $[a; c]$ ,  $[c; b]$  выбирается тот, на котором функция  $f(x)$  меняет знак.

На выбранном отрезке, обозначим его через  $[a_1, b_1]$ , величина которого равна  $\frac{b_1 - a_1}{2}$ , снова рассматривается середина отрезка  $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ , определяется  $f(c_1)$  и из отрезков  $[a_1; c_1]$ ,  $[c_1; b_1]$  выбирается тот, на котором  $f(x)$  изменяет знак. Он обозначается через  $[a_2, b_2]$  и процедура повторяется. На  $n$ -ом шаге величина отрезка  $[a_n, b_n]$  равна  $\frac{b - a}{2^n}$ . Если она меньше  $2\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - требуемая точность решения уравнения, то процесс последовательного деления завершается и в качестве приближенного решения выбирается  $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ .

## 4.2. Методы, основанные на алгебраическом интерполировании

Рассмотрим уравнение (4.1). Пусть  $x_0$  - некоторое приближение к его решению. Разложим левую часть уравнения по формуле Тейлора в точке  $x_0$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) = 0. \quad (4.2)$$

**Метод Ньютона.** Ограничимся в разложении (4.2) первыми двумя слагаемыми

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \cong 0$$

и разрешим полученное выражение относительно  $x$

$$x \cong x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Последнее соотношение принимается в качестве базового для формирования вычислительного процесса. Он описывается формулой

$$x_{n+1} \cong x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.3)$$

и называется **методом Ньютона**. Заметим, что правило (4.3) имеет вполне определённый геометрический смысл.

Действительно, рассмотрим уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $(x_n, y_n)$

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

и определим её точку пересечения с осью  $ox$ . Имеем  $y = 0$ , откуда

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Из сравнения полученного выражения с (4.2) следует вывод, что

абсцисса точки пересечения касательной, проведённой к графику функции в точке  $(x_n, f(x_n))$  и представляет собой следующее приближение к решению уравнения (4.1) (Рисунок 4.2).

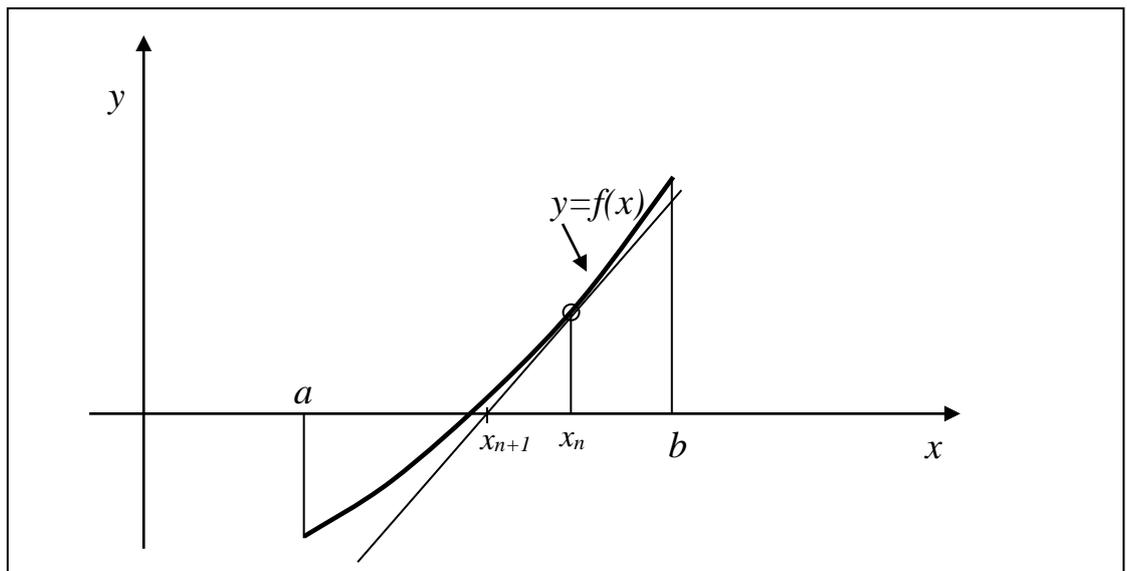


Рисунок 4.2. Метод Ньютона

По этой причине метод Ньютона называют ещё **методом касательных**.

**Метод хорд.** Рассмотрим (4.3). Заменяем в нём

$$f'(x_n) \text{ на } \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

В результате этого получим новое вычислительное правило

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (4.4)$$

называемое **методом хорд**.

Выясним его геометрический смысл.

Рассмотрим точки кривой  $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ ,  $(x_n, f(x_n))$  и проведем через них прямую

$$\frac{x - x_n}{x_n - x_{n-1}} = \frac{y - f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Найдем, далее, ее точку пересечения с осью абсцисс. Имеем

$$y = 0, \quad x = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}).$$

Сравнивая полученные выражения с соотношением (4.4), приходим к выводу, что

абсцисса точки пересечения прямой, проходящей через точки кривой, определяемые двумя последними приближениями, представляет собой следующее приближение к решению уравнения (4.1) (Рисунок 4.3).

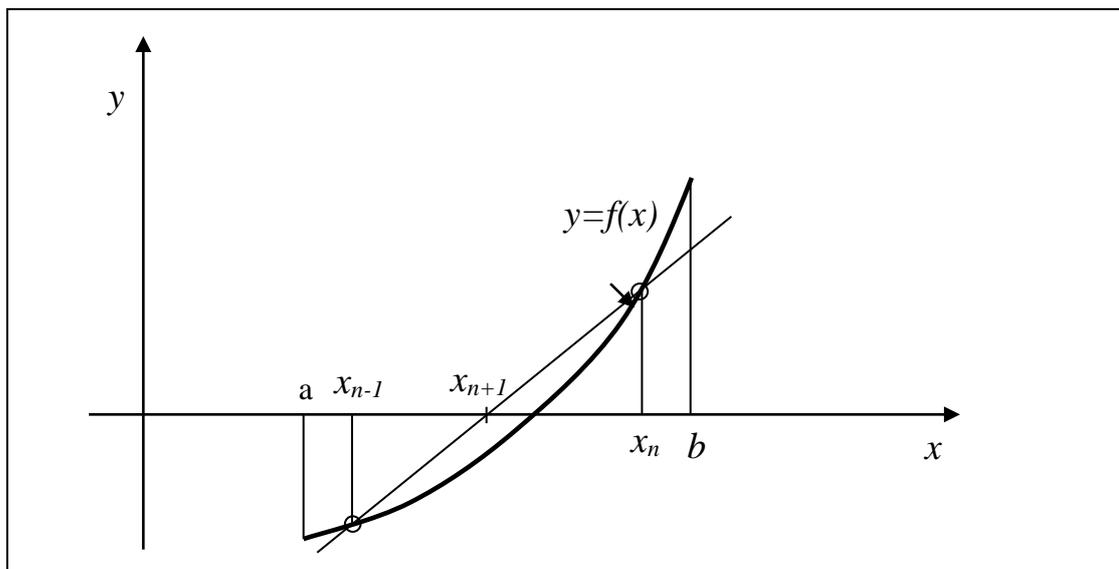


Рисунок 4.3. Метод хорд

**Сходимость, оценка погрешности.** Рассмотрим эти вопросы на примере метода Ньютона.

Рассмотрим отображение

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

где  $f(x)$ , - левая часть уравнения (4.1),  $f'(x) \neq 0$ .

Заметим, что неподвижная точка отображения  $F(x)$ , если она есть, является и решением уравнения (4.1). Действительно, пусть существует значение  $x$  такое, что  $x = F(x)$ . Отсюда

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x,$$

откуда  $f(x) = 0$ , что и требовалось.

Далее, пусть  $x_1, x_2$ , - произвольные значения  $x$ , оценим величину  $\rho(F(x_1), F(x_2))$ . Имеем

$$\begin{aligned} \rho(F(x_1), F(x_2)) &= |F(x_1) - F(x_2)| = \\ &= \left| (x_1 - x_2) - \left( \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \right) \right| = \\ &= |x_1 - x_2| \cdot \left| 1 - \frac{\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}}{x_1 - x_2} \right|. \end{aligned}$$

Тогда по теореме Лагранжа

$$\rho(F(x_1), F(x_2)) = \rho(x_1, x_2) \cdot \left| 1 - \left( \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{f'(x)} \right)_{x=c} \right|,$$

где  $c \in (x_1, x_2)$ , или

$$\rho(F(x_1), F(x_2)) \leq \alpha \rho(x_1, x_2),$$

$$\text{где } \alpha = \max_{[a,b]} \left| 1 - \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{f'(x)} \right) \right|.$$

Отсюда следует утверждение.

Если  $\alpha < 1$  или, что то же  $0 < \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{f'(x)} \right) < 2$ , то отображение  $F(x)$  является сжимающим, последовательность (4.3), им формируемая, является сходящейся и, следовательно, метод касательных в этом случае сходится.

Предельная точка  $x$  последовательности (4.3) является неподвижной точкой отображения  $F$  и является искомым решением. Погрешность  $\varepsilon_n$ , -  $n$ -го приближения к решению, как и ранее, описывается соотношением (3.10).

### 4.3. Метод последовательных приближений

В этом случае уравнение (4.1) приводится к виду

$$x = F(x) \quad (4.5)$$

Далее, выбирается начальное приближение  $x_0$  к решению и на основе (4.5) по правилу

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (4.6)$$

строится последовательность  $\{x_n\}$ .

Рассмотрим отображение, формируемое функцией  $F(x)$ . Пусть  $x_1, x_2$ , - некоторые произвольные значения переменной  $x \in [a, b]$ , оценим величину  $\rho(F(x_1), F(x_2))$ . Имеем

$$\begin{aligned} \rho(F(x_1), F(x_2)) &= |F(x_1) - F(x_2)| = |x_1 - x_2| \cdot \left| \frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \\ &= \rho(x_1, x_2) \cdot \left| \frac{dF(c)}{dx} \right| \leq \alpha \rho(x_1, x_2), \end{aligned}$$

где  $\alpha = \max \left| \frac{dF(x)}{dx} \right|$ .

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Если  $\alpha < 1$  или то же  $\left| \frac{dF}{dx} \right| \leq \alpha < 1$  для  $\forall x \in [a, b]$ , то отображение  $F(x)$  является сжимающим. Следовательно, итерационный процесс в этом случае сходится.

Погрешность  $n$ -го приближения определяется соотношением (3.10).  
 Остановимся в заключение на процедуре приведения уравнения (4.1) к виду (4.5). Один из её вариантов состоит в следующем:

$0 = f(x)$  - исходное уравнение;

$0 = mf(x)$  - где  $m$ , - подлежащий определению параметр;

$x = x + mf(x)$  - новая форма уравнения;

$x = F(x)$ , где  $F(x) = x + mf(x)$  - требуемая форма.

Наконец, значение параметра  $m$  выбирается из условия

$$|1 + mf'(x)| < 1$$

для  $\forall x \in [a, b]$ .

#### 4.4. Задание

1. Путем ручного просчета найти корень заданного уравнения двумя методами (из четырех рассмотренных) с заданной точностью. Отделение корней провести графически. Привести все необходимые промежуточные вычисления. Результаты свести в итоговую таблицу:

№ итерации	$X_n$	$ X_n - X_{n-1} $ или $ B_n - A_n $	$F(X_n)$

*Замечание.* Для каждого уравнения необходимо найти один корень. Если уравнение имеет более одного корня, необходимо отыскать ближайший к началу координат.

Номер уравнения выбрать по формуле:  $k + 21 \cdot (q - 1)$ .

Здесь  $k$  – номер студента в списке группы;  $q=1$  для группы А и 2 для группы Б.

Допустимая погрешность вычисляется по формуле:

$$\varepsilon = [(k - q) \text{MOD } 4] * 0.05 + 0.1.$$

Номера применяемых методов (1-дихотомии; 2-хорд; 3-касательных; 4-простой итерации) вычислить по формуле:

$$N_1 = (k - q) \text{MOD } 2 + 1; \text{ (первый метод)}$$

$$N_2 = [(k + q) \text{DIV } 2] \text{MOD } 2 + 3 \text{ (второй метод).}$$

## Варианты к заданию

1.  $x^3 - 6x + 2 = 0$ .
2.  $x^4 - x - 1 = 0$ .
3.  $x - 0,1 \sin x = 2$ .
4.  $\cos x = x^2$ .
5.  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10x$ .
6.  $x \lg x = 1$ .
7.  $\cos x \cdot \operatorname{ch} x = 1$ .
8.  $x + e^x = 0$ .
9.  $x \operatorname{th} x = 1$ .
10.  $\operatorname{tg} x = x$ .
11.  $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$ .
12.  $x^3 + 2x - 11 = 0$ .
13.  $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$ .
14.  $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ .
15.  $x^3 - 3x^2 - 3 = 0$ .
16.  $3x - \cos x - 1 = 0$ .
17.  $2x - \lg x - 7 = 0$ .
18.  $x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = 0$ .
19.  $x^3 - 6x + 2 = 0$ .
20.  $x^4 - x - 1 = 0$ .
21.  $e^x + x = 0$ .
22.  $x^3 - 6x^2 + 3x + 5 = 0$ .
23.  $\sin 2x - x = 0$ .
24.  $\cos x - x = 0$ .
25.  $\cos x - x^2 = 0$ .
26.  $\operatorname{tg} x - x = 0$ .
27.  $x^3 + 6x - 8 = 0$ .

28.  $x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 5 = 0.$

29.  $x^4 - 3x^2 + 4x - 1 = 0.$

30.  $x^3 - 3x + 1 = 0.$

31.  $x^4 + 10x - 100 = 0.$

32.  $x^3 - 4x - 1 = 0.$

33.  $x^5 - x - 0,2 = 0.$

34.  $x^3 - 3x + 5 = 0.$

35.  $2\sin x - x = 0.$

36.  $e^x - \operatorname{tg} x = 0.$

37.  $e^x - \sin x = 0.$

38.  $x^4 + 4x - 2 = 0.$

39.  $2x^3 - x^2 - 7x + 5 = 0.$

40.  $x - \operatorname{tg} x = 0.$

41.  $x - \sin(x) = 0,25$

42.  $x^2 - 20\sin(x) = 0$

43.  $x^2 - \sin(5x) = 0$

44.  $1,8x^2 - \sin(10x) = 0$

45.  $2 - xe^x = 0$

## Лекция 5. Решение систем нелинейных уравнений

*В которой, рассмотренные выше, методы Ньютона и итераций обобщаются на случай систем нелинейных уравнений.*

Ниже ограничимся рассмотрением метода итераций и метода Ньютона, которые относятся к числу основных.

### 5.1. Метод итераций

Предполагается, что система уравнений представлена в виде

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ x_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \dots \dots \dots \\ x_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}, \quad (5.1)$$

где  $f_i(x_1, \dots, x_n)$ , - непрерывно дифференцируемые функции переменных  $x_1, \dots, x_n$  в области  $D$ , содержащей решение системы (5.1). Обозначив через  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  и  $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ , систему (5.1) можно представить в более удобном для изложения виде

$$x = f(x^T).$$

Пусть  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$ , - некоторое приближение к искомому решению. Тогда вычислительный процесс, организуемый по формуле

$$x^{(\kappa+1)} = f(x^{(\kappa)T}), \quad (5.2)$$

где  $\kappa = 0, 1, 2, \dots$  называется **методом итераций**. Если при вычислении очередной координаты  $\kappa+1$  - го приближения использовать вычисленные перед этим значения предыдущих координат этого же приближения, получим модификацию, называемую **методом Зейделя**. В ней алгоритм вычислений описывается следующим образом

$$\begin{cases} x_1^{(\kappa+1)} = f_1(x_1^{(\kappa)}, x_2^{(\kappa)}, \dots, x_{n-1}^{(\kappa)}, x_n^{(\kappa)}) \\ x_2^{(\kappa+1)} = f_2(x_1^{(\kappa+1)}, x_2^{(\kappa)}, \dots, x_{n-1}^{(\kappa)}, x_n^{(\kappa)}) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n^{(\kappa+1)} = f_n(x_1^{(\kappa+1)}, x_2^{(\kappa+1)}, \dots, x_{n-1}^{(\kappa+1)}, x_n^{(\kappa)}) \end{cases}.$$

При определенных условиях метод итераций (5.2) сходится к точному решению системы (5.1). Установим эти условия, используя, как и выше, понятие сжимающего отображения.

В  $n$ -мерном пространстве  $R_n = \{(x_1, \dots, x_n), x_i \in R, i = \overline{1, n}\}$  набор функций  $f(x)$  определяет некоторое непрерывно дифференцируемое отображение. Выше (см. Лекция 3) было показано, что сходимость итерационной последовательности обеспечивается сходимостью образующего ее отображения.

Пусть  $x, y$  - произвольные точки  $R_n$ , оценим  $\|f(x) - f(y)\|$ . Предположим, что величина  $\|x - y\|$  достаточно мала и в тейлоровских разложениях функций  $f_i(x)$  в точке  $x$  позволительно ограничиться величинами первого порядка малости. Тогда

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\cong \|f(x) - (f(x) - I(f(x)) \cdot (y - x))\| = \\ &= \|I(f(x)) \cdot (y - x)\| \leq \|I(f(x))\| \cdot \|y - x\| \end{aligned}$$

где

$$I(f(x)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

- матрица Якоби системы функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$ .

Если  $\|I\| \leq \alpha < 1$  в области  $D$ , отображение  $f$  является сжимающим и есть основания считать, что итерационный процесс (5.2) сходится к решению системы (5.1). Более определенно это формулируется в виде следующей **теоремы:**

Пусть в области  $D$  система (5.1) имеет, по крайней мере, одно решение, принадлежащее ее внутренней части и норма якобиевой матрицы в замыкании  $\bar{D}$  области  $D$  меньше единицы. То есть,  $\exists$  такое  $\alpha \in (0; 1)$ , что  $\sup_{x \in \bar{D}} \|I\| = \alpha < 1$ . Тогда в области  $D$  система (5.1) имеет решение и итерационный процесс (5.2) сходится к одному из решений при любом выборе начального приближения  $x^{(0)}$ .

Погрешность  $\kappa$ -го приближения, как и ранее (см. Лекция 3), можно оценить соотношением

$$\|x^{(\kappa)} - x\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|x^{(\kappa)} - x^{(\kappa-1)}\|.$$

**Замечание.** Нередко исходная система уравнений бывает представленной в неявной форме

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}, \quad (5.4)$$

где якобиан системы

$$\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0.$$

Тогда для приведения (5.4) к виду (5.1), обеспечивающему сходимость, можно использовать соображения, аналогичные высказанным выше (см. Лекция 4). А именно, умножим обе части (5.4) на некоторую неособенную квадратную матрицу  $A$

$$0 = A\varphi,$$

прибавим, далее к обеим частям  $x$

$$x = x + A\varphi,$$

обозначим

$$f(x) = x + A\varphi$$

и потребуем, чтобы

$$\|I(f(x))\| = \alpha < 1.$$

Из этого соотношения можно определить коэффициенты матрицы  $A$ . Если это сделать затруднительно для всей области  $D$ , то указанную операцию можно производить пошагово на каждом шаге итерационного процесса.

Поясним это на примере двух уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) = 0 \\ \varphi_2(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Тогда система (5.1) принимает вид

$$\begin{cases} x = x + a\varphi_1 + b\varphi_2 \\ y = y + c\varphi_1 + d\varphi_2 \end{cases}.$$

Отсюда

$$I(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{pmatrix} 1 + a \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & a \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + b \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \\ c \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + d \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & 1 + c \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + d \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Зададим далее,  $\alpha < 1$  и потребуем, чтобы

$$\begin{cases} 1 + a \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\alpha}{2} \\ a \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + b \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \frac{\alpha}{2} \end{cases}.$$

Отсюда, по правилу Крамера, например,

$$a = \frac{\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}}{\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y)}},$$

$$b = \frac{\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}}{\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y)}}.$$

Аналогичным образом, потребовав

$$\begin{cases} c \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + d \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\alpha}{2} \\ 1 + c \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + d \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

Найдем  $c$  и  $d$ .

Проводя указанные преобразования на каждом шаге итерационного процесса, тем самым создаем условия для сходимости его со скоростью  $\alpha$  в целом.

## 5.2. Метод Ньютона

В принципиальном плане он представляет собой обобщение ранее рассмотренного метода касательных.

Предположим, что исходная система уравнений имеет вид (5.4) или в свернутом виде

$$\varphi(x^T) = 0. \quad (5.4_1)$$

Пусть  $x^{(0)}$ , - некоторое приближение к решению. Разложим левые части (5.4), (5.4<sub>1</sub>) по формуле Тейлора, ограничиваясь учетом малых первого порядка. В результате этого, получим

$$\begin{cases} \varphi_1(x^{(0)T}) + d\varphi_1(x^{(0)T}) \cong 0 \\ \varphi_2(x^{(0)T}) + d\varphi_2(x^{(0)T}) \cong 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_n(x^{(0)T}) + d\varphi_n(x^{(0)T}) \cong 0 \end{cases},$$

или, в более удобном, матричном виде

$$\varphi(x^{(0)T}) + I(\varphi(x^{(0)T}))(x - x^0) \cong 0,$$

где  $I(\varphi(x^{(0)T}))$ , - матрица Якоби системы функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Предполагая, что  $\det I \neq 0$ , разрешим последнее уравнение относительно  $x$ . Тогда

$$x \cong x^{(0)} - I^{-1}(\varphi(x^{(0)T})) \cdot \varphi(x^{(0)T})$$

и на основе этого соотношения формируется вычислительный процесс

$$x^{(\kappa+1)} \cong x^{(\kappa)} - I^{-1}(\varphi(x^{(\kappa)T})) \cdot \varphi(x^{(\kappa)T}), \quad (5.5)$$

который и называется **методом Ньютона**.

Если последовательность  $\{x^{(k+1)}\}$  сходится к некоторому вектору  $x$ , то он очевидно, и является решением системы (5.4<sub>1</sub>). Действительно, в этом случае из (5.5) следует

$$x = x - I^{-1}(\varphi(x^T)) \cdot \varphi(x^T),$$

откуда, в силу  $\det I \neq 0$ ,  $\varphi(x^T) = 0$ .

Вопросы сходимости последовательности (5.5) могут быть изучены также, как в п. 5.2. Достаточным для реализации метода в области  $D$ , содержащим решение, является требование  $\det I(\varphi(x^T)) \neq 0$ .

### 5.3. Сравнительный анализ методов

Сделаем некоторые замечания общего характера, касающиеся особенностей рассмотренных методов, вытекающие непосредственно из их алгоритмов.

В обоих методах присутствует требование невырожденности якобиевой матрицы. При равном числе итераций, безусловно, более трудоемким является метод Ньютона, требующий, на каждом шаге итерационного процесса, обращения матрицы. Однако этот недостаток может компенсироваться более высокой скоростью сходимости, определяемый конкретным видом уравнений. В обоих случаях трудоемкой операцией является обеспечение сходимостей генерируемых ими итерационных последовательностей. Возможно, разумным окажется переход с метода на метод по ходу выполнения итерационного процесса в случае нарушения условий сходимости одного из них.

### 5.4. Задание

Составить программу для ЭВМ, находящую решения системы 2-х уравнений с двумя неизвестными (согласно варианту задания) методами простой итерации и Ньютона с произвольно заданной точностью.

#### *Требования к программе*

- Вывод учетной информации о программе (тема работы, Ф.И.О. автора).
- Наличие меню для выбора метода поиска решения с указанием вида соответствующих систем.
- Для выбора начального приближения графическим методом в программе должна быть предусмотрена возможность вывода на экран графика каждой из функций. При невозможности явно выразить одну из переменных из уравнений (2.1) для построения графиков следует воспользоваться методом построчного сканирования.

- Ввод исходных данных (после выбора метода решения системы): начальные значения  $x, y$  и величина допустимой погрешности.

- Программа должна быть в состоянии найти все корни данного уравнения указанным методом, если корней конечное число, или три корня, ближайших к началу координат, если уравнение имеет бесконечное число корней.

- Вывести результаты расчета на экран в виде таблицы:

№ итерации	$x_n$	$y_n$	$ x_n - x_{n-1} $	$ y_n - y_{n-1} $	$F(x)$	$G(x)$

*Замечание.* Графики функций допустимо строить, используя пакеты прикладных программ (MathCAD, MatLab и т.п.)

### ***Требования к отчету***

Отчет должен содержать следующие обязательные пункты:

- титульный лист установленного образца;
- формулировку задания;
- краткие теоретические сведения о применяемых методах;
- графики функций;
- результаты расчетов: ручного и при помощи программы;
- текст программы;
- выводы.

### Варианты к заданию

$$1. \begin{cases} \sin(x - 0,5y) - x + y^2 = 0, \\ (y + 0,1)^2 + x^2 = 1; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \operatorname{tg}(x - y) - xy = 0, \\ 0,5x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \cos(x^2 + y^2) - x + y = 0, \\ (x + y - 2)^2 + (x - y)^2 / 0,9 = 1; \end{cases}$$

4. 
$$\begin{cases} e^{x+y} - e^2 + y = 2, \\ (x+0,5)^2 + y^2 = 1; \end{cases}$$
5. 
$$\begin{cases} e^{y-0,1x} - xy = 1,4, \\ x^2 + 2y^2 = 4; \end{cases}$$
6. 
$$\begin{cases} \operatorname{tg}(y-x) + xy = 0,3, \\ x^2 + y^2 = 1,5; \end{cases}$$
7. 
$$\begin{cases} \sin(x-y) - xy = -1, \\ x^2 - y^2 = 0,75; \end{cases}$$
8. 
$$\begin{cases} e^{xy} = x^2 - y + 1, \\ (x+0,5)^2 + y^2 = 1; \end{cases}$$
9. 
$$\begin{cases} \sin(x) - y = 1,32, \\ \cos(y) - x = 0,85; \end{cases}$$
10. 
$$\begin{cases} x^2y^2 - 3x^3 - 6y^2 = -8, \\ x^4 - 9y = -2; \end{cases}$$
11. 
$$\begin{cases} x + 3\ln(x) - y^2 = 0, \\ 2x^2 - xy - 5x = -1; \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0, \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0; \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x^3 - y^2 - 1 = 0, \\ xy^3 - y - 4 = 0; \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \operatorname{tg}(xy) = x^2, \\ x^2 + 4y^2 = 2; \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \cos(x^2 + y) + x^2 + y^2 = 1,6, \\ 1,5(x + 0,1)^2 - (y - 0,1) = 1; \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0, \\ x + 3\lg x - y^2 = 0; \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \sin x - y = 1,32, \\ \cos y - x = -0,85; \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 1,5x^3 - y^2 - 1 = 0, \\ xy^3 - y - 4 = 0; \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0, \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \cos(0,4y + x^2) + x^2 + y^2 - 1,6, \\ 1,5x^2 - \frac{y^2}{0,36} - 1 = 0. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} \sin(x) - y = -1,25, \\ \cos(y) - x^2 = 0,74; \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} \operatorname{tg}(x - y) - 2xy = 0, \\ (x - 0,1)^2 + y^2 = 4; \end{cases}$$

## Лекция 6. Приближенное вычисление определенных интегралов

*В которой формулируются основные идеи, реализованные при приближенном вычислении определенных интегралов, рассмотрены простейшие квадратурные формулы для равноотстоящих узлов, обсуждаются вопросы погрешности. Дано понятие о методах Монте-Карло.*

### 6.1. Вступительные замечания

Ниже рассматриваются методы приближенного интегрирования собственных интегралов Римана

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Традиционный подход заключается в следующем.

На отрезке  $[a, b]$  выбирается ряд узловых точек  $x_0, x_1, \dots, x_n$  и значение интеграла представляется в виде линейной комбинации значений подинтегральной функции в узловых точках

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i),$$

которая называется **квадратурной формулой**. При заданном числе  $n$  расположение узлов и значения коэффициентов  $A_i$  подбирается так, чтобы обеспечивалась наивысшая точность результата. Наиболее просты и употребительны методы, в которых узловые точки выбираются равноотстоящими. На их рассмотрении далее мы и остановимся.

### 6.2. Формулы Ньютона-Котеса

Предположим, что отрезок  $[a, b]$  разделен на  $n$  равных частей величиной  $h = \frac{b-a}{n}$  и обозначим точки деления через  $x_i = a + ih, i = \overline{0, n}$ .

Представим подинтегральную функцию (1) с помощью многочлена Лагранжа

$$f(x) \approx P_n(t) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} t(t-1)\dots(t-n)}{i!(n-i)!(t-i)} y_i,$$

где  $t = \frac{x - x_0}{h}$ .

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \int \sum_{0 \leq i \leq n} \frac{(-1)^{n-i} t(t-1)\dots(t-n)}{i!(n-i)!(t-i)} y_i dt \quad (2)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^n H_i y_i,$$

где

$$H_i = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} dt. \quad (3)$$

Соотношения (2), (2<sub>1</sub>) и называются **квадратурными формулами Ньютона-Котеса**.

В случае, когда деление отрезка  $[a, b]$  не производится и на нем выбирается единственная узловая точка, обозначим ее через  $x_0$ , интерполяционный многочлен принимает вид  $P_0(x) = y_0$ , а квадратурная формула, –

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) y_0. \quad (4)$$

Рассмотрим другие простейшие случаи, предварительно обосновав важное, для вычисления коэффициентов  $H_i$ , **свойство**:

**При фиксированном  $n$  значения  $H_i$  и  $H_{n-i}$ , где  $i = \overline{0, n}$ , равны.**

**Доказательство.** Пусть  $n=2m$ . Не умаляя общности можно считать, что  $i < m$ . Рассмотрим числитель подинтегральной функции из соотношения (2)

$$\omega(t) = t(t-1)\dots(t-i)\dots(t-m)\dots(t-(2m-i))\dots(t-2m).$$

Удалим из  $\omega(t)$  множители  $(t-i)$  и  $(t-(2m-i))$  и обозначим произведение оставшихся, – через  $\omega_1(t)$ . Т.е.

$$\omega(t) = (t-i)(t-(2m-i)) \omega_1(t).$$

Тогда

$$H_i = \frac{(-1)^{2m-i}}{i!(2m-i)!} \int_0^{2m} (t-(2m-i)) \omega_1(t) dt$$

и

$$H_{2m-i} = \frac{(-1)^i}{(2m-i)!i!} \int_0^{2m} (t-i) \omega_1(t) dt$$

Сделаем в последних интегралах замену  $t-m=z$  или  $t=z+m$ . Тогда

$$\omega_1(t) = \omega_1(z+m) = z \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m-i}}^m (z^2 - k^2) = \bar{\omega}_1(z)$$

и является нечетной функцией переменной  $z$ . Выражения для определения  $H_i$ ,  $H_{2m-i}$  после очевидных преобразований примут вид

$$H_i = \frac{(-1)^{2m-i}}{i!(2m-i)!} \left\{ \int_{-m}^m z \bar{\omega}_1(z) dz - (m-i) \int_{-m}^m \omega_1(z) dz \right\},$$

$$H_{2m-i} = \frac{(-1)^i}{(2m-i)!i!} \left\{ \int_{-m}^m z \bar{\omega}_1(z) dz + (m-i) \int_{-m}^m \omega_1(z) dz \right\}.$$

Вторые слагаемые в фигурных скобках, в силу нечетности  $\omega_1(z)$ , равны 0, а числа  $2m-i$  и  $i$  имеют одинаковую четность. Поэтому  $H_i = H_{2m-i}$ , что и требовалось.

Случай  $n=2m+1$  рассматривается аналогично.

Вернемся к вычислению коэффициентов  $H_i$ .

Рассмотрим  $n=1$ . Тогда из (3) следует

$$H_0 = \frac{-1}{0!1!} \int_0^1 (t-1) dt = -\frac{(t-1)^2}{2!} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Отсюда  $H_1 = \frac{1}{2}$  и квадратурная формула (2) принимает вид

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (y_0 + y_1)} \quad (5)$$

Пусть теперь  $n=2$  Из (3) имеем

$$H_0 = \frac{1}{0!2!} \int_0^2 (t-1)(t-2) dt = \frac{1}{3},$$

$$H_1 = \frac{-1}{1!1!} \int_0^2 t(t-2) dt = \frac{4}{3}.$$

Тогда

$$H_2 = H_0 = \frac{1}{3}$$

и

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)}. \quad (6)$$

Рассмотрим  $n=3$ . Согласно (3)

$$H_0 = \frac{1}{0!3!} \int_0^3 (t-1)(t-2)(t-3)dt = \frac{3}{8},$$

следовательно, и  $H_2 = \frac{3}{8}$ ,

$$H_1 = \frac{1}{1!2!} \int_0^1 t(t-2)(t-3)dt = \frac{9}{8},$$

следовательно, и  $H_3 = \frac{9}{8}$ .

Тогда квадратурная формула (2) принимает вид

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)}. \quad (7)$$

### 6.3. Простейшие квадратурные правила

Стремление повысить точность приближенного вычисления интеграла путем повышения степени интерполяционного многочлена неизбежно приводит к возрастанию технических сложностей при вычислении квадратурных коэффициентов. Поэтому на практике стараются обойтись многочленами невысокой степени, разбивая исходный отрезок интегрирования на меньшие части. В результате этого получают семейства квадратурных правил, зависящих от степени использованных интерполяционных многочленов. Рассмотрим простейшие из них.

**Правило прямоугольников.** Исходный отрезок  $[a, b]$  разбивается на  $n$  равных частей величиной  $h = \frac{b-a}{n}$ , на каждом из них выбирают по одной

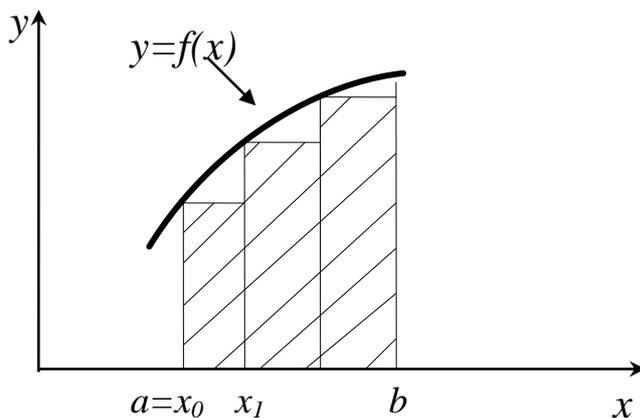
точке  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ . Далее, применяя к каждой из них формулу (4) получаем правило

$$\int_a^b f(x) dx \approx h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) \quad , \quad (8)$$

называемое **правилом прямоугольников**.

Если  $f(x) \geq 0$ , то площадь криволинейной трапеции выражаемой  $\int_a^b f(x) dx$ , согласно (8), вычисляется как площадь фигуры, состоящей из прямоугольников с основанием  $h$  и высотами  $y_i$ . В зависимости от выбора точек  $x_i$  различают формулы **левых** и **правых** **прямоугольников** (Рисунок 1).

а)



б)

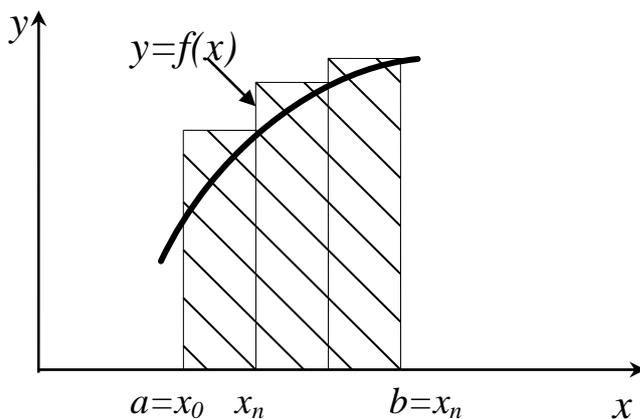


Рисунок 1. Правило прямоугольников : а)- левых; б)- правых

**Правило трапеций.** Разделим отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных частей и обозначим точки деления через  $x_i = a + ih, i = \overline{0, n}, h = \frac{b-a}{n}$ . Применяя, далее, к каждому из отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$  формулу (5), получим квадратурное правило

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [y_0 + 2(y_1 + \dots + y_{n-1}) + y_n], \quad (9)$$

называемое **формулой трапеций**. Ее геометрический смысл состоит в замене кривой  $y=f(x)$  ломаной и замене криволинейной трапеции, соответствующей участку  $[x_{i-1}, x_i]$ , обычной, – прямолинейной

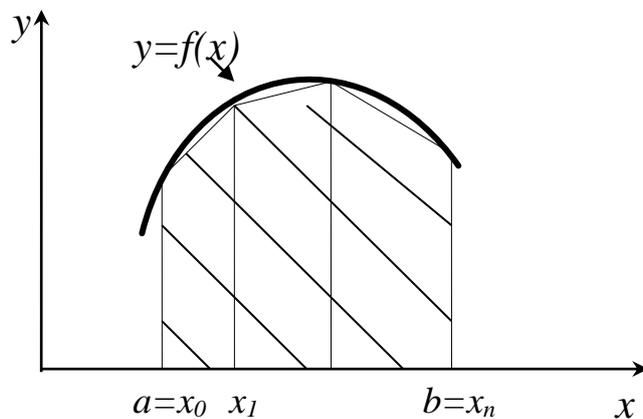


Рисунок 2. Правило трапеций

**Правило парабол.** Разделим отрезок  $[a, b]$  на  $n = 2m$  частей, обозначим точки деления через  $x_0, x_1, \dots, x_{2m}$  и рассмотрим сдвоенные отрезки. К каждому из них применим формулу (6), в результате чего получим правило

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + y_{2m}], \quad (10)$$

где  $h = \frac{b-a}{2m}$ , которое называется **формулой парабол** или **Симпсона**. Название также отчасти объясняется геометрическими особенностями, состоящими в

том, что на каждом сдвоенном отрезке кривая  $y=f(x)$  заменяется участком параболы.

**Правило трех восьмых.** Разделим исходный отрезок на  $3m$  частей, образуем строенные отрезки  $[x_{i-1}, x_{i+2}]$  и к каждому из них применим формулу (7). В результате этого получим правило

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8} [y_0 + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \dots + y_{3m-2} + y_{3m-1}) + 2(y_3 + y_6 + \dots + y_{3m-3}) + y_{3m}], \quad (11)$$

где  $h = \frac{b-a}{3m}$ , называемое **формулой трех восьмых**.

#### 6.4. Погрешности квадратурных формул

Погрешности квадратурных формул, рассмотренных в п.3, устанавливаются похожим образом. А именно, в каждом случае определяются локальные погрешности, которые затем суммируются.

Рассмотрим формулу левых прямоугольников (8). Согласно формуле Тейлора погрешность интерполяционной формулы на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$

составляет  $r_i(x) = \frac{f'(\xi_i)}{1!}(x - x_{i-1})$ , где  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Тогда погрешность интегрирования формулы вида (4) описывается выражением

$$R_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} r_i(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x - x_{i-1})dx,$$

которое, согласно обобщенной теореме о среднем значении, можно представить в более удобной для последующего использования форме

$$R_i = f'(\bar{\xi}_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})dx = f'(\bar{\xi}_i) \frac{h^2}{2},$$

где  $\bar{\xi}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

Тогда погрешность  $R$  формулы (8) равна

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} R_i = \frac{h^2}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i) = \frac{h(b-a)}{2} \cdot \frac{f'(\bar{\xi})}{n}.$$

Далее, предположим функцию  $f(x)$  непрерывно дифференцируемой на отрезке  $[a, b]$ . Тогда по теореме Вейерштрасса найдется значение  $\xi \in [a, b]$  и выражение для описания погрешности принимает окончательный вид

$$R = \frac{h(b-a)}{2} f'(\xi), \xi \in [a, b]. \quad (12)$$

Используя (12), можно выбрать шаг  $h$  и число  $n$ , обеспечивающих заданную точность интегрирования  $\varepsilon$ . Действительно, пусть  $M_1 = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ , тогда

$$|R| \leq \frac{h(b-a)}{2} M_1.$$

Потребовав

$$\frac{h(b-a)}{2} M_1 = \varepsilon,$$

получим

$$h = \frac{2\varepsilon}{M_1(b-a)}.$$

Рассмотрим формулу трапеций (9).

Определим локальную погрешность интегрирования на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Погрешность интерполяции равна

$$r_i(x) = \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{2!} f''(\xi_i),$$

где  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Тогда, согласно теореме о среднем значении

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} r_i(x) dx = \frac{f''(\bar{\xi}_i)}{2} * \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})(x - x_i) dx = -\frac{f''(\bar{\xi}_i)}{12} h^3,$$

где  $\bar{\xi}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Далее, проводя суммирование локальных погрешностей, получим глобальную, допускаемую на отрезке  $[a, b]$  при использовании формулы трапеции

$$R = -\sum_i \frac{f''(\bar{\xi}_i)}{12} h^3 = \frac{h^2(b-a)}{12} \cdot f''(\xi),$$

где  $\xi \in [a, b]$

Проведем без доказательства погрешности для правила Симпсона,—

$$R = -\frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi)$$

и для правила 3/8, -

$$R = -\frac{h^4(b-a)}{80} f^{(4)}(\xi).$$

Их обоснование см. в монографии : Крылов В.И., Бобков, Монастырский. Вычислительные методы. т2. —М.: Наука, 1977. -400с.

В заключении обратим внимание на следующий любопытный факт. Несмотря на более высокую степень интерполяционного многочлена, используемого в правиле 3/8, его итоговая погрешность интегрирования, при прочих равных условиях, выше, чем в правиле Симпсона.

## 6.5. Понятие о методах Монте–Карло

Методы Монте-Карло приближенного вычисления интегралов основаны на использовании равномерно распределенных последовательностей.

Рассмотрим на плоскости некоторую ограниченную область  $D$  площадью  $V_D$  и предположим, что в ней задана некоторая бесконечная последовательность точек  $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ . Пусть  $d \subset D$  некоторая произвольная область площадью  $V_d$ . Рассмотрим первые  $N$  точек последовательности  $\{P_i\}$  и обозначим через  $S_N$  число точек из них, попадающих в  $d$ . Тогда

Последовательность  $\{P_i\}$  равномерно распределена в  $D$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N}{N} = \frac{V_d}{V_D}$$

для произвольной области  $d \subset D$ .

Отсюда следует, что при достаточно больших значениях  $N$  отношение

$$\frac{S_N}{N} \approx \frac{V_d}{V_D},$$

откуда площадь области приближенно равна

$$V_d \approx \frac{S_N}{N} \cdot V_D. \quad (13)$$

Таким образом, если площадь области  $D$  известна, то, генерируя в ней равномерно распределенную последовательность, площадь произвольной области, расположенной в ней, можно определить простым подсчетом числа точек попадающих в последовательность  $\{P_i\}$ .

На этих особенностях и базируется методы приближенного интегрирования Монте-Карло.

Рассмотрим интеграл (1) и для упрощения предположим, что  $f(x) \geq 0$ . Тогда, значение (1) представляет собой площадь криволинейной фигуры, ограниченной графиком  $y=f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Возьмем в качестве области  $D$  прямоугольник  $[a, b; 0, M]$ , где  $M \in \max f(x)$  площадью  $V_D = M(b-a)$ . Далее формируя в  $D$  равномерно распределенную последовательность и осуществляя подсчет  $S_N$ , – числа точек попавших в фигуру, ограниченную графиком  $y=f(x)$ , по формуле (13) определим приближенное значение площади и, тем самым, приближенное значение интеграла(1).

Известны различные способы генерирования равномерно распределенных последовательностей, в частности, случайно распределенные,  $ЛПП_\tau$  – последовательности. Более подробно о них см. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями.–М.: Наука, 1981. -110стр.

## 6.6. Задание

1. Применяя ручной просчет, вычислить значение заданного определенного интеграла (согласно варианту задания) с точностью  $0,005*(1+k \text{ MOD } 6)$  одним из 3-х методов:

- 1) прямоугольников;
- 2) трапеций;
- 3) Симпсона.

Метод выбрать по формуле:  $(k-1) \text{MOD } 3+1$ .  $k$  – номер студента в списке группы.

Построить график подынтегральной функции на отрезке интегрирования. Необходимое количество разбиений отрезка интегрирования для каждого из методов найти, используя соответствующие формулы для погрешности. Привести все промежуточные вычисления и построить графики всех необходимых функций.

2. Составить программу, вычисляющую значение данного интеграла тремя указанными методами с произвольно заданной точностью. Контроль точности производить по методу Рунге (двойного просчета):

$$|I_N - I_{2N}| / (2^m - 1) < \epsilon,$$

где  $I_N$  и  $I_{2N}$  – значения интеграла, найденные с числом подотрезков, равным соответственно  $N$  и  $2N$ ;  $m$  – порядок точности метода.

Входные данные программы: значение допустимой погрешности и начальное количество разбиений отрезка интегрирования (одинаковое для всех методов). Выходные данные: значение интеграла, найденные каждым методом и конечное число подотрезков для каждого метода.

Результаты расчетов свести в итоговую таблицу:

	Методы		
	Прямоугольников	трапеций	Симпсона
Значение интеграла			
Кол-во разбиений			

## Варианты заданий

$$1. \int_0^{0,2} \cos \frac{\pi x^2}{2} dx$$

$$2. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

$$3. \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$$

$$4. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-0,25x^2)}}$$

$$5. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-0,75x^2)}}$$

$$6. \int_0^{0,5} \cos \frac{x^2}{4} dx$$

$$7. \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$$

$$8. \int_0^{0,5} \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{x} dx$$

$$9. \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\sqrt{1-0,25 \sin^2 x}}$$

$$10. \int_0^{0,5} \sqrt{\frac{1-0,25x^2}{1-x^2}} dx$$

$$11. \int_0^{0,5} \sqrt{\frac{1-0,75x^2}{1-x^2}} dx$$

$$12. \int_0^1 \sqrt{x} \sin x dx$$

$$13. \int_0^1 \sqrt{x} \cos x dx$$

$$14. \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+x+\sqrt{\sin x}}$$

$$15. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x+\sqrt{\cos x}}$$

$$16. \int_2^3 \frac{dx}{1+\sqrt{\ln x}}$$

$$17. \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^3 x}$$

$$18. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$$

$$19. \int_0^1 e^{-5x^3+x+0,5} dx$$

$$20. \int_0^1 e^{-4x^3+2x+1} dx$$

$$21. \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2+1} dx$$

$$22. \int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$23. \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-0,5 \sin^2 x} dx$$

$$24. \int_0^1 e^{-3x^3+4x+2} dx$$

$$25. \int_0^1 e^{-6x^3+3x+4} dx$$

## Лекция 7. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

*В которой рассматриваются простейшие аналитические последовательных приближений и рядов Тейлора) и численные (Эйлера, трапеций и Рунге-Кутты) методы решения задачи Коши обыкновенных дифференциальных уравнений.*

### 7.1. Вступительные замечания

Ниже рассматриваются некоторые, получившие распространение аналитические и численные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Условие (2) называется **начальным**.

Достаточные условия разрешимости таких задач формулируются теоремой существования и единственности, один из наиболее простых вариантов которой, состоит в следующем.

Пусть в точке  $(x_0, y_0)$  и некоторой ее окрестности функция  $f(x, y)$  и ее производная  $\frac{\partial f}{\partial y}$  непрерывны. Тогда существует единственная функция  $y=y(x)$  непрерывно дифференцируемая в точке  $x_0$  и некоторой ее окрестности удовлетворяющая дифференциальному уравнению (1) и начальному условию (2).

В дальнейшем эти условия предполагаются выполненными.

**Аналитическими** называют методы, позволяющие получить выражения, описывающие приближенные значения искомой функции в *любой точке* заданного отрезка  $[a, b]$ . **Численными** называются методы, позволяющие получить приближенные значения лишь в *отдельных точках* заданного отрезка.

### 7.2. Аналитические методы

Рассмотрим два из них.

**Метод последовательных приближений.** Представим в уравнении (1)

$y'$  в виде отношения дифференциалов  $\frac{dy}{dx}$ , тогда

$$dy = f(x, y)dx.$$

Далее, интегрируя обе части полученного соотношения на промежутке  $[x_0, x]$  получаем

$$\int_{x_0}^x dy = \int_{x_0}^x f(x, y) dx,$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(x, y) dx$$

или

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (3)$$

Соотношение (3) представляет собой интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2). На его основе строится следующий вычислительный процесс

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_n(x)) dx, \quad (4)$$

где  $y_0(x) = y_0$ , который и называется **методом последовательных приближений**. При определенных условиях последовательность функции  $\{y_n(x)\}$  сходится к точному решению задачи (1), (2). А именно,

Пусть в прямоугольнике  $D = [x_0 - a, x_0 + a; y_0 - b, y_0 + b]$  выполнены условия теоремы существования и единственности и  $\max_D |f(x, y)| = M$ . Тогда

в промежутке  $(x_0 - h, x_0 + h)$ , где  $h = \min(a, \frac{b}{M})$  последовательность (4) сходится к точному решению. Причем справедлива следующая оценка

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{M \cdot N^{n-1}}{n!} h^n,$$

где  $N = \max_D \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$ ,  $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ .

Для иллюстрации этого метода рассмотрим следующий

**Пример.** Найти решение задачи Коши

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0.$$

Найти два первых приближения к решению, оценить погрешность.

**Решение.** Возьмем в качестве области  $D$  квадрат  $[-1, 1; -1, 1]$ . Здесь

$f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ ,  $a = b = 1$ . Тогда

$$\max_D |f(x, y)| = \max_D |x^2| + \max_D |y^2| = 2,$$

т.е.  $M=2$ ,

$$\max_D \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = 2 \max_D |y| = 2,$$

т.е.  $N=2$ ,

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Погрешность  $n$ -го приближения

$$|y - y_n| \leq \frac{M \cdot N^{n-1}}{n!} h^n = \frac{1}{2 \cdot n!},$$

отсюда погрешность второго, -  $|y - y_2| \leq \frac{1}{4}$ .

Найдем приближения  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ . Полагая, что  $y_0 = 0$ , из (4) имеем

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x (x^2 + 0^2) dx,$$

т.е.  $y_1(x) = \frac{x^3}{3}$ .

Тогда

$$y_2(x) = 0 + \int_0^x \left(x^2 + \left(\frac{x^3}{3}\right)^2\right) dx$$

т.е.

$$y_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}.$$

**Замечание.** В том случае, когда дана погрешность  $\varepsilon$  приближенного решения число итераций, т.е. последовательных приближений, можно найти, потребовав

$$|y - y_n| \leq \frac{M \cdot N^{n-1}}{n!} h^n \leq \varepsilon.$$

Так, например, в рассмотренном примере

$$\frac{1}{2 \cdot n!} \leq \varepsilon,$$

откуда  $n! \geq \frac{1}{2\varepsilon}$  и значение  $n$  устанавливается последовательным перебором.

**Метод рядов Тейлора.** В этом случае решение задачи (1), (2) ищется в виде ряда

$$y(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots .$$

Значения производных, необходимых для построения решения находятся путем последовательного дифференцирования уравнения (1). Так, непосредственно из него следует

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Далее,

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y',$$

тогда

$$y''(x_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} y'(x_0)$$

и т.д.

Очевидно, что данная процедура позволяет получить решение со сколь угодно высокой точностью лишь в том случае, когда функция  $f(x, y)$  является бесконечно дифференцируемой в точке  $(x_0, y_0)$ . В противном случае данный метод может быть вообще неприменим. См., например, задачу

$$y' = \sqrt[3]{x}, y(0) = 1,$$

где  $y''(0)$  уже не существует.

### 7.3. Численные методы решения. Правило Рунге

**Классификация методов.** Производится в зависимости от особенностей той информации, которая используется при вычислении приближенного значения  $y(x)$  в узловой точке.

В первом приближении правило, по которому происходят вычисления символически можно представить в виде

$$y_{n+1} = F(y_{n-s}, \dots, y_n, \dots, y_{n+q}), \quad (5)$$

где

$y_{n-s}, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+q}$ , - приближенные значения решения задачи (1), (2) в точках

$$x_{n-s} = x_n - sh, x_n = x_0 + nh, x_{n+1} = x_n + h, x_{n+q} = x_n + qh, s \geq 0, q \geq 0,$$

$h$  – шаг интегрирования. Если

1)  $s = 0$ , а  $q \leq 1$ , то правило (5) называется *одношаговым*, в противном случае, - *многошаговым*;

2)  $q = 0$ , вычислительное правило называется *явным*, при  $q = 1$  *неявным*, при  $q > 1$ , - *с забеганием вперед*.

Далее, основное внимание уделим одношаговым методам. Соответствующее вычислительное правило имеет вид

$$y_{n+1} = F(y_n, y_{n+s_1}, \dots, y_{n+s_k}),$$

где  $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq 1$ ,  $k \geq 1$ .

**Методы, основанные на разложении в ряд Тейлора.** Предположим, что узлы интегрирования являются равноотстоящими, т.е.  $x_i = x_0 + ih$  и рассмотрим участок  $[x_n, x_{n+1}]$ . Предполагая функцию  $y(x)$  дифференцируемую достаточное число раз, имеем

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_n)}{3!}h^3 + \dots \quad (6)$$

Ограничиваясь малыми первого порядка относительно  $h$ , получим правило

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)h, \quad (7)$$

которое называется *явным методом Эйлера*. Его погрешность на отрезке  $[x_n, x_{n+1}]$  составляет

$$r_{n+1} = \frac{y''(\bar{x}_n)}{2!}h^2,$$

где  $\bar{x}_n \in [x_n, x_{n+1}]$ , а на конечном отрезке  $[a, b]$  учитывая  $h = \frac{b-a}{n}$ , равна

$$r = \sum_i r_i = \sum_i \frac{y''(\bar{x}_i)}{2!} \frac{b-a}{n} h = \frac{y''(x)}{2} h(b-a),$$

где  $x \in [a, b]$ ,  $y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f$ . На основании этого данный метод называется *методом первого порядка точности*. Он имеет наглядную геометрическую интерпретацию (Рисунок 1) и называется также *методом ломаных*. На каждом участке длиной  $h$  участок интегральной кривой заменяется отрезком прямой.

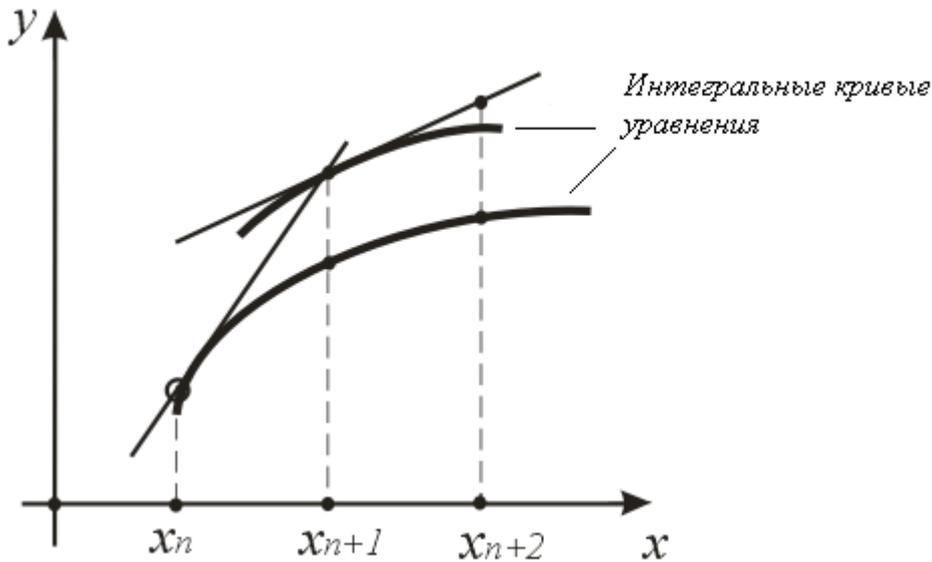


Рисунок 1. Явная схема Эйлера.

**Замечание 1.** Если воспользоваться разложением

$$y(x_n) = y(x_{n+1}) - y'(x_{n+1})h + \frac{y''(x_{n+1})}{2!}h^2 - \frac{y'''(x_{n+1})}{3!}h^3 + \dots \quad (8)$$

и также ограничиться малыми первого порядка, получим правило

$$y_{n+1} = y_n + f(x_{n+1}, y_{n+1})h, \quad (9)$$

которое называется  *неявной схемой Эйлера*.

Погрешность формулы (9) равна

$$r_{n+1} = -\frac{y''(\bar{x}_n)}{2}h^2,$$

погрешность метода на конечном промежутке  $[a, b]$

$$r = \sum_i r_i = -\frac{y''(x)}{2}h/(b-a).$$

**Замечание 2.** Сложим (7), (9) и разделим на два, в результате чего получим новое правило

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})), \text{ называемое } \textit{методом трапеций}.$$

Также как и (9) оно является неявным. Если из разложения (6) почленно вычесть разложение (8), получим локальную погрешность формулы трапеций

$$r_{n+1} = -\frac{1}{6}y'''(\bar{x}_n)h^3.$$

Тогда погрешность, накапливаемая на отрезке  $[a, b]$  будет равна

$$r = -\frac{1}{6} y'''(x) h^2 (b - a),$$

где  $x \in [a, b]$ . Таким образом, метод трапеций имеет *второй порядок точности*.

**Замечание 3.** Рассмотренные выше погрешности приближенных методов описывают те ошибки, которые возникают вследствие замены дифференциального уравнения конечной вычислительной схемой и называется погрешностью *аппроксимации*. Помимо этого в общем балансе играют роль погрешности, возникающие на каждом шаге интегрирования в результате использования приближенного значения  $y_n$  вместо точного  $y(x_n)$ . Их обычно относят к погрешностям обусловленным неточностями в задании исходных данных и рассматривают отдельно.

**Методы Рунге-Кутты.** Рассмотрим уравнение (1). Интегрируя его на промежутке  $[x_n, x_{n+1}]$ , получим

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} (f(x, y(x))) dx.$$

Тогда после замены  $x = x_n + \alpha h$ , где  $\alpha \in [0, 1]$ , для приращения на  $n$ -ом шаге получим выражение

$$\Delta y(x_n) = h \int_0^1 (f(x_n + \alpha h, y(x_n + \alpha h))) d\alpha. \quad (10)$$

Таким образом, задача вычисления значения функции  $y(x)$  в точке  $x_{n+1}$  сводится к вычислению интеграла в соотношении (10). Однако использование традиционных квадратурных формул для этих целей проблематично, так как значения  $y(x_n + \alpha h)$  неизвестны. В методах Рунге – Кутты квадратурные схемы строятся следующим образом.

Вводятся три группы параметров  $\alpha_i, \beta_{ij}, A_i$ , где

$$\begin{array}{l} \alpha_i : \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_q \\ \beta_{ij} : \quad \beta_{10} \quad \beta_{20}, \beta_{21} \quad \beta_{30}, \beta_{31}, \beta_{32} \quad \dots \quad \beta_{q0}, \beta_{q1}, \dots, \beta_{q, q-1}, \\ A_i : A_0 \quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \dots \quad A_q \end{array}$$

которыми распоряжаются так. Первая группа параметров определяет набор узловых значений  $x_n, x_n + \alpha_1 h \dots x_n + \alpha_q h$  по первой переменной подинтегральной функции  $f(x, y)$ . Вторая группа параметров определяет набор узловых значений по ее второй переменной. Причем производится это косвенным образом через приращения  $\varphi_i$  функции  $f(x, y)$  в предыдущих узловых точках, где

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= hf(x_n, y_n), \\
\varphi_1 &= hf(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_{10}\varphi_0), \\
\varphi_2 &= hf(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_{20}\varphi_0 + \beta_{21}\varphi_1), \\
&\vdots \\
\varphi_q &= hf(x_n + \alpha_q h, y_n + \beta_{q0}\varphi_0 + \beta_{q1}\varphi_1 + \dots + \beta_{q,q-1}\varphi_{q-1}).
\end{aligned}$$

Наконец, третья группа параметров  $A_0, A_1 \dots A_q$  используется для формирования квадратурной формулы

$$h \int_0^1 f(x_n + \alpha h, y(x_n + \alpha h)) d\alpha \approx \sum_{i=0}^q A_i \varphi_i.$$

Таким образом, окончательно

$$\Delta y(x_n) \approx \sum_{i=0}^q A_i \varphi_i. \quad (11)$$

Обозначим погрешность соотношения (11) через  $r_q(h)$ , т.е.

$$r_q(h) = \Delta y(x_n) - \sum_{i=0}^q A_i \varphi_i$$

или

$$r_q(h) = h \int_0^1 f(x_n + \alpha h, y(x_n + \alpha h)) d\alpha - \sum_{i=0}^q A_i \varphi_i.$$

Представим ее с помощью формулы Тейлора в виде разложения по степеням  $h$

$$r_q(h) = r_q(0) + r_q'(0)h + \dots + \frac{r_q^{(k+1)}(0) \cdot h^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{r_q^{(k+2)}(Ah)}{(k+2)!} h^{k+2},$$

где  $0 < A < 1$ .

Если потребовать теперь, чтобы  $r_q(0) = \dots = r_q^{(k+1)}(0) = 0$ , получим погрешность соотношения (11) равную  $O(h^{k+1})$  и, следовательно, погрешность метода равную  $O(h^k)$ .

К числу наиболее употребительных относятся методы 4-го порядка точности. Для них значение  $q=3$ . Один из вариантов соответствующего набора параметров следующий

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{2} & \alpha_2 &= \frac{1}{2} & \alpha_3 &= 1 \\
\beta_{10} &= \frac{1}{2} & \beta_{20} &= 0, \beta_{21} &= \frac{1}{2} & \beta_{30} &= 0, \beta_{31} &= 0, \beta_{32} &= 1.
\end{aligned}$$

Тогда выражения  $\varphi_i$  имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= hf(x_n, y_n), \\ \varphi_1 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}\varphi_0\right), \\ \varphi_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}\varphi_1\right), \\ \varphi_3 &= hf(x_n + h, y_n + \varphi_2),\end{aligned}$$

коэффициенты  $A_i$ ,-

$$A_0 = \frac{1}{6}, \quad A_1 = \frac{2}{6}, \quad A_2 = \frac{2}{6}, \quad A_3 = \frac{1}{6}$$

и вычислительное правило, в целом,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(\varphi_0 + 2\varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_3).$$

На Рисунке 2 в полосе  $[x_n, x_n + h; y_n, +\infty)$  указаны используемые в этом методе узловые точки. Значения  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  выбраны произвольно.

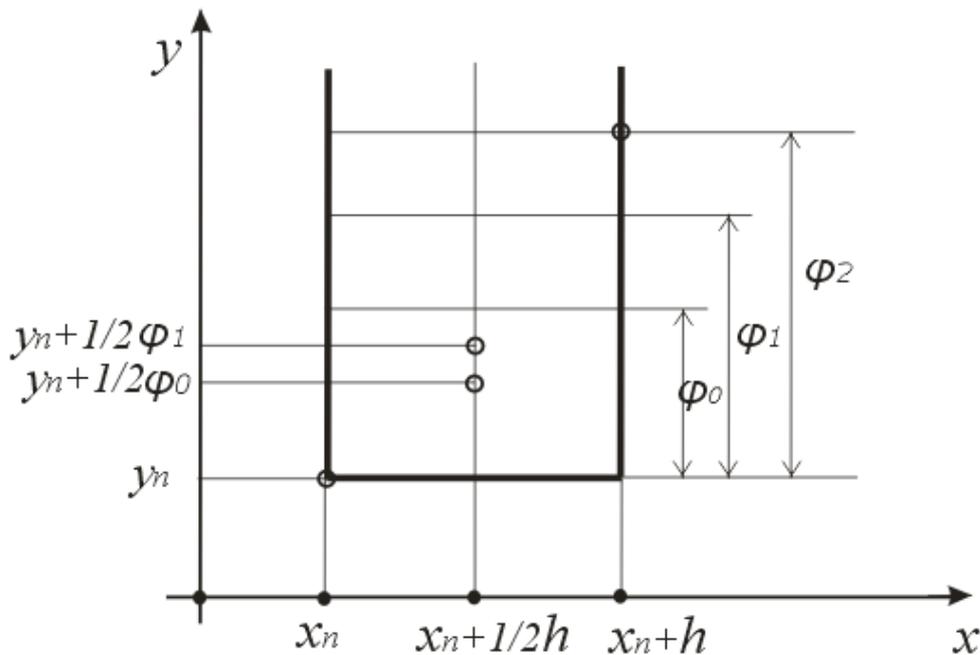


Рисунок 2. Узловые точки метода Рунге-Кутты 4-го порядка

**Правило Рунге.** Для оценки погрешности численных результатов интегрирования при использовании одношаговых методов на практике обычно применяют *правило Рунге*, которое заключается в следующем.

Теоретически показано, что главный член погрешности аппроксимации имеет вид  $\rho(x)h^k$ , где  $k$  – порядок метода,  $\rho(x)$  – некоторая функция, определяемая особенностями правой части дифференциального уравнения.

$$y(x) - y_h(x) \approx \rho(x)h^k,$$

где  $y(x)$ , - точное значение,  $y_h(x)$ , приближенное, определенное при проведении расчетов с шагом  $h$ . Тогда, проводя расчеты с шагом  $h_1$  и  $h_2$ , получаем

$$\begin{aligned} y(x) - y_{h_1}(x) &\approx \rho(x)h_1^k \\ y(x) - y_{h_2}(x) &\approx \rho(x)h_2^k \end{aligned}$$

Разрешая, далее, приближенную систему этих соотношений относительно  $\rho(x)$ , имеем

$$\rho(x) \approx \frac{y_{h_2}(x) - y_{h_1}(x)}{h_1^k - h_2^k},$$

откуда

$$y(x) - y_{h_2}(x) \approx \frac{y_{h_2}(x) - y_{h_1}(x)}{h_1^k - h_2^k} \cdot h_2^k. \quad (12)$$

Соотношение (12) и представляет **правило Рунге**. Естественно, оно дает достоверные результаты лишь в том случае, когда доминирующей в общей погрешности результата является погрешность метода.

Обычно правило (12) используют при  $h_1 = h$ ,  $h_2 = h/2$ . Тогда

$$y(x) - y_{h/2}(x) \approx \frac{y_{h/2}(x) - y_h(x)}{2^k - 1}.$$

В частности, для методов Эйлера ( $k=1$ )

$$y(x) - y_{h/2}(x) \approx y_{h/2}(x) - y_h(x),$$

метода трапеций ( $k=2$ ), -

$$y(x) - y_{h/2}(x) \approx \frac{y_{h/2}(x) - y_h(x)}{3},$$

метода Рунге – Кутты четвертого порядка ( $k=4$ ),-

$$y(x) - y_{h/2}(x) \approx \frac{y_{h/2}(x) - y_h(x)}{15}.$$

#### 7.4. Задание

1. Найти методом Пикара три первых приближения решения заданной (согласно варианту задания) задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Привести все необходимые расчеты. Построить графики соответствующих функций.

2. Для той же задачи Коши при помощи ручного просчета найти интегральную кривую методом Рунге-Кутты 4-го порядка на отрезке единичной длины (начиная от  $X_0$ ) с шагом 0,2. Привести все промежуточные расчеты. Окончательные результаты расчета свести в таблицу. По результатам построить график.

3. Построить Simulink-модель для заданной задачи Коши по условиям предыдущего пункта. Сравнить результат (представленный в виде графика) с результатом п.2.

#### Варианты заданий

1.  $y' = y - x^2, y(1) = 2$
2.  $y' = 2 + y^2, y(1) = 2$
3.  $y' = (y - 1)x, y(1) = 3/2$
4.  $y' = 3 + y^2, y(1) = 2$
5.  $y'(x^2 + 2) = y, y(2) = 2$
6.  $y' = y - x, y(9/2) = 1$
7.  $y' = xy, y(0) = -1$
8.  $y' = x + 2y, y(3) = 0$
9.  $y' = y - x, y(2) = 1$
10.  $y' = x - y, y(4) = 2$
11.  $y' = x^2 - y, y(0) = 1$
12.  $y' = x(y + 1), y(1) = 1/2$
13.  $y' = x + 3y, y(1) = 2$
14.  $xy' = 2y, y(2) = 3$
15.  $y' = x^2 + y, y(1) = 1/2$

16.  $y' = -xy, y(0) = 1$

17.  $2(y + y') = x + 3, y(1) = 1/2$

18.  $xy' = 2y, y(1) = 3$

19.  $y' = y^{3/2}, y(1) = 3$

20.  $y' - y/x = x^2, y(1) = 0$

21.  $y' + \frac{y}{2x} = x^2, y(1) = 1$

22.  $y' - y/x = -12/x^3, y(1) = 4$

23.  $y' + y/x = 3x, y(1) = 1$

24.  $y' + 2xy = -x^3, y(1) = 1/e$

25.  $y' + xy = -x^3, y(0) = 3$

## Лекция 8. Основы спектрального анализа

*В которой напоминаются основные положения теории рядов Фурье, производится вывод комплексной формы и приводится их дискретный аналог для равноотстоящих узлов.*

### 8.1. Элементы общей теории

Напомним основные положения теории рядов Фурье.

Пусть имеется некоторая функция  $y = f(x)$ , заданная на промежутке  $[-l, l]$  и рассматривается бесконечная система функций

$$\begin{aligned} &1, \quad \cos \frac{\pi}{l} x, \quad \cos \frac{2\pi}{l} x, \quad \dots, \quad \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad \dots \\ &\sin \frac{\pi}{l} x, \quad \sin \frac{2\pi}{l} x, \quad \dots, \quad \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \dots \end{aligned}$$

Ставится задача о представлении данной функции в виде тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x) \quad (1)$$

Такое представление при определенных условиях возможно и его коэффициенты вычисляются по следующим формулам

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (2)$$

Тригонометрический ряд (1) с коэффициентами (2) называется **рядом Фурье** функции  $f(x)$ .

Справедлива следующая теорема о разложимости (т. Дирихле):

Если  $f(x)$  кусочно-монотонная функция и имеет не более, чем конечное число точек разрыва первого рода, то ее ряд Фурье (1), (2) сходится к значению  $f(x)$  в точках ее непрерывности и к среднему арифметическому ее односторонних пределов в точках разрыва.

Так, например, если  $x = c \in (-l, l)$  точка разрыва  $f(x)$ , то сумма ряда Фурье в этой точке равна

$$\frac{f(c+0) + f(c-0)}{2} \quad \text{-(Рисунок 1),}$$

где

$$f(c+0) = \lim_{x \rightarrow c+0} f(x), \quad f(c-0) = \lim_{x \rightarrow c-0} f(x).$$

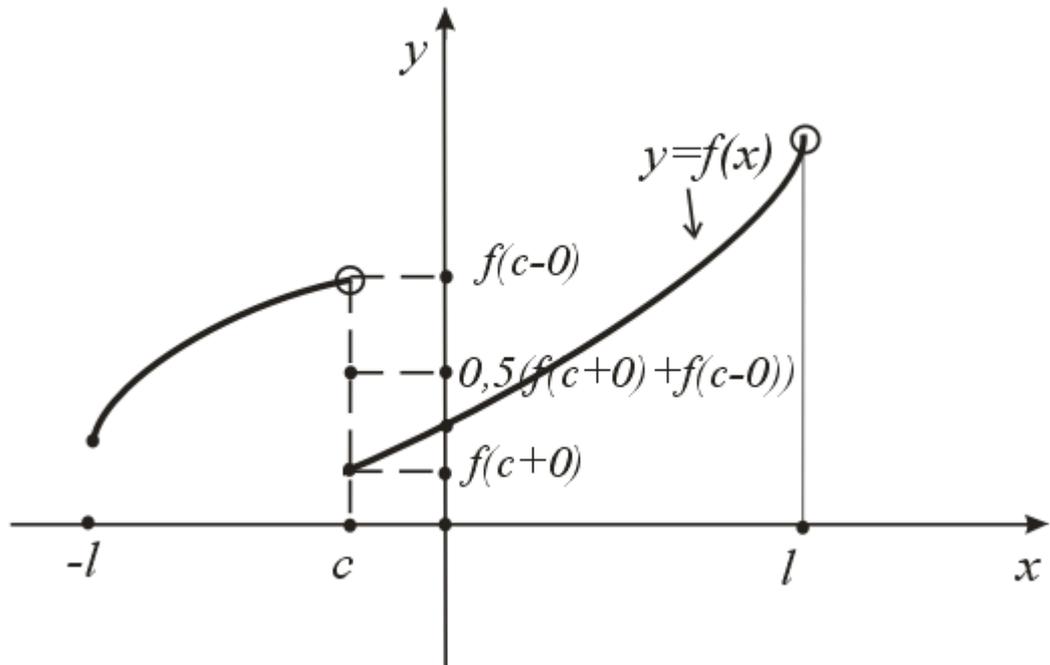


Рисунок 1. Пояснения к теореме Дирихле

Т.о. за исключением, быть может, конечного числа точек сумма ряда Фурье (1), (2) равна  $f(x)$ .

**Замечание 1.** В точках  $x = \pm l$  ряд Фурье сходится к среднему арифметическому правого и левого пределов функции  $f(x)$  в точках  $x = -l, x = l$ , соответственно.

Обратим внимание на особенности разложения в ряд Фурье четных и нечетных функций.

Если  $f(x)$  четная на отрезке  $[-l, l]$ , то  $f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x$ , также четная, а  $f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x$ , - нечетная. Поэтому коэффициенты

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad b_n = 0$$

и разложение (1) принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x.$$

Если же функция  $f(x)$  нечетная, то  $f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x$  также нечетная, а  $f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x$ , - четная.

Поэтому

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

и разложение (1) принимает вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

**Замечание 2.** Выражение  $(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x)$  в разложении (1), вводя вспомогательный угол, можно представить в виде  $A_n \cdot \cos(\frac{n\pi}{l}x - \varphi_n)$ ,

где  $\varphi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$ ,  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  и ряд в целом

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\frac{n\pi}{l}x - \varphi_n).$$

Тогда слагаемые  $A_n \cos(\frac{n\pi}{l}x - \varphi_n)$  называются *гармоническими составляющими* или *гармониками*, коэффициенты  $A_n$  - *амплитудами гармоник*,  $\frac{n\pi}{l} = \omega_n$ , - *частотами*,  $\varphi_n$  - *начальными фазами*. Иногда гармоника  $n=1$  называется *основной*, гармоники  $n > 1$ , - *побочными*.

**Замечание 3.** Иногда тригонометрические разложения заданной функции строятся на промежутке  $[0, T]$ . В этом случае рассматривается система тригонометрических функций

$$1, \left\{ \cos \frac{2\pi n}{T} x \right\}, \left\{ \sin \frac{2\pi n}{T} x \right\}$$

и разложение имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} x, \quad (3)$$

где

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2\pi n}{T} x dx \quad (4)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2\pi n}{T} x dx \quad .$$

Теорема Дирихле для промежутка  $[0, T]$  формулируется соответственно аналогичным образом.

## 8.2. Комплексная форма рядов Фурье

В приложениях достаточно популярной является комплексная форма рядов Фурье. Их получение базируется на формулах Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

откуда

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (5)$$

Приведем комплексную форму для разложения (3). Из (4) с использованием (5) имеем

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \frac{e^{i\omega_n x} + e^{-i\omega_n x}}{2} dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{i\omega_n x} dx + \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\omega_n x} dx$$

или

$$a_n = c_n + \bar{c}_n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\omega_n x} dx, \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}.$$

Аналогичным образом,

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \frac{e^{i\omega_n x} - e^{-i\omega_n x}}{2i} dx = -\frac{1}{T} i \int_0^T f(x) e^{i\omega_n x} dx + \frac{1}{T} i \int_0^T f(x) e^{-i\omega_n x} dx,$$

или

$$b_n = (-\bar{c}_n + c_n)i$$

Тогда гармоническая составляющая ряда (3)

$$\begin{aligned}
a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x &= (c_n + \bar{c}_n) \cdot \frac{e^{i\omega_n x} + e^{-i\omega_n x}}{2} + (c_n - \bar{c}_n)i \cdot \frac{e^{i\omega_n x} + e^{-i\omega_n x}}{2i} = \\
&= \left( \frac{c_n + \bar{c}_n}{2} + \frac{c_n - \bar{c}_n}{2} \right) e^{i\omega_n x} + \left( \frac{c_n + \bar{c}_n}{2} - \frac{c_n - \bar{c}_n}{2} \right) e^{-i\omega_n x} = c_n e^{i\omega_n x} + \bar{c}_n e^{-i\omega_n x},
\end{aligned}$$

и ряд, в целом,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n x}, \quad (6)$$

где

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\omega_n x} dx, \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}, \quad c_{-n} = \bar{c}_n, \quad n \in Z. \quad (7)$$

Разложение (6), (7) и является искомым.

Обратим внимание, что амплитуда  $n$ -ой гармоники в этом случае равна

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{(c_n + \bar{c}_n)^2 + i^2 (c_n - \bar{c}_n)^2} = 2\sqrt{c_n \bar{c}_n}.$$

### 8.3. Дискретная форма рядов Фурье

Рассмотрим разложение (6), (7). Предположим, что на отрезке  $[0, T]$  функция  $f(x)$  задана в  $m$  равностоящих узловых точках  $x_k = kh$ , где  $h = \frac{T}{m}$ ,  $k = \overline{0, m-1}$ .

Используя для вычисления коэффициентов  $c_n$  формулу левых прямоугольников из (7) имеем

$$c_n \cong \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) e^{-i\omega_n x_k} h,$$

или, учитывая  $T = mh$ ,

$$c_n \cong \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) e^{-\frac{i2\pi n}{m} k}. \quad (8)$$

Соотношение (8) называется *дискретным преобразованием Фурье*.

Таким образом, учитывая  $\omega_n = \frac{2\pi n}{mh}$  окончательно имеем

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{i2\pi n}{mh} x}.$$

Из соотношений (8) вытекают следующие свойства.

**Свойство 1.** Набор коэффициентов  $c_0, \dots, c_m$  является комплексно сопряженным, т.е.

$$c_{m-l} = \bar{c}_l, \quad l \geq 0,$$

Действительно, согласно (8), имеем

$$\begin{aligned} c_{m-l} &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) e^{-\frac{i2\pi(m-l)}{m}k} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) e^{-i2\pi k} \cdot e^{-\frac{i2\pi l}{m}k} = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \cdot e^{\frac{i2\pi l}{m}k} = \bar{c}_l. \end{aligned}$$

**Свойство 2.** Набор коэффициентов  $\{c_n\}$ ,  $n \geq 0$  является периодическим с периодом равным  $m$ . Т.е.  $c_{m+l} = c_l$  ( $l > 0$ ).

Обосновывается аналогичным образом.

**Следствие.** Для построения разложения (8) при численном моделировании с равноотстоящими узловыми точками достаточно вычисления  $\left[\frac{m}{2}\right] + 1$  по коэффициентов  $c_n$ .

Так, при  $m=3$ , например, - коэффициентов  $c_0, c_1$ . Тогда по свойству 1,  $c_3 = \bar{c}_0, c_2 = \bar{c}_1$ , а  $c_{-n} = \bar{c}_n$ . По свойству 2, -  $c_{3+k} = c_k$ . При  $m=4$ , - коэффициентов  $c_0, c_1, c_2$ . Тогда  $c_4 = \bar{c}_0, c_3 = \bar{c}_1, c_{4+k} = c_k$ , и  $c_{-n} = \bar{c}_n$ .

#### 8.4. Задание

1. Разложить указанные функции в ряд Фурье:
  - в задачах 1 б), 2 б) представить разложение в стандартной форме;
  - в задачах 1 а), 2 а) представить в комплексной форме.
2. Получить разложения указанных функций, используя стандартные процедуры пакета Matlab.
3. Сравнить полученные результаты для первых  $n$  гармоник.

Разложить указанные функции в ряд Фурье в указанных интервалах

##### Вариант 1

1. а)  $f(x) = x^2, x \in (-\pi, \pi]$       б)  $f(x) = x+1, x \in (0, \pi)$  по синусам,
2. а)  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$       б)  $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$  по косинусам,

##### Вариант 2

1. а)  $f(x) = 2x + 1, x \in (-\pi, \pi]$

б)  $f(x) = x + \pi, x \in (0, \pi)$  по косинусам,

2. а)  $f(x) = e^x, x \in (-1, 1]$

б)  $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x \leq 1 \\ x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$  по синусам.

**Вариант 3**

1. а)  $f(x) = x + 1, x \in (-\pi, \pi]$

б)  $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ x, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$ , по косинусам,

2. а)  $f(x) = |x|, x \in (-2, 2]$

б)  $f(x) = 3x, 0 < x < 1$  по синусам.

**Вариант 4**

1. а)  $f(x) = x, x \in (-\pi, \pi]$

б)  $f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x < 1 \\ 2x, & 1 \leq x < \pi \end{cases}$ , по синусам,

2. а)  $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ ,

б)  $f(x) = 5x, x \in (0, \pi)$ , по косинусам.

**Вариант 5**

1. а)  $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ ,

б)  $f(x) = 1 - x, 0 < x < \pi$  по косинусам,

2. а)  $f(x) = 2x, x \in (-1, 1]$ ,

б)  $f(x) = x + 3, 0 < x \leq 3$ , по синусам.

**Вариант 6**

1. а)  $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ ,

б)  $f(x) = x^2, x \in (0, \pi]$  по косинусам,

2. а)  $f(x) = x + 1, x \in (-1, 1]$ ,

б)  $f(x) = 2x, x \in (0, 2)$  по косинусам.

**Вариант 7**

1. а)  $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0) \\ x, & x \in [0, \pi) \end{cases}$ ,

б)  $f(x) = x + 1, x \in (0, \pi]$  по косинусам,

2. а)  $f(x) = 2x + 1, \quad x \in (-1, 1],$       б)  $f(x) = x^2, \quad x \in (0, 1]$  по синусам.

### Вариант 8

1. а)  $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in (-\pi, 0) \\ 2, & x \in [0, \pi] \end{cases},$       б)  $f(x) = \frac{x}{2}, \quad x \in (0, \pi)$  по синусам,

2. а)  $f(x) = x, \quad x \in (-3, 3],$       б)  $f(x) = x^2, \quad x \in (0, 1)$  по косинусам.

### Вариант 9

1. а)  $f(x) = 3x - 1, \quad x \in (-\pi, \pi),$       б)  $f(x) = x^2 + 1, \quad x \in (0, \pi]$  по косинусам,

2. а)  $f(x) = 5x, \quad x \in (-3, 3),$       б)  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1) \\ 1, & x \in [1, 2] \end{cases}$  по синусам.

### Вариант 10

1. а)  $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi, 0) \\ x, & x \in [0, \pi] \end{cases},$       б)  $f(x) = 5x + 1, \quad x \in (0, \pi]$  по косинусам,

2. а)  $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (-2, 0] \\ 0, & x \in (0, 2) \end{cases},$       б)  $f(x) = x^2, \quad x \in (0, 2]$  по синусам.

### Вариант 11

1. а)  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi, 0) \\ x, & x \in [0, \pi] \end{cases},$       б)  $f(x) = e^x, \quad x \in [0, \pi]$  по синусам,

2. а)  $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases},$       б)  $f(x) = x + 2, \quad x \in (0, 2)$  по косинусам.

### Вариант 12

1. а)  $f(x) = x + 3, \quad x \in (-\pi, \pi]$       б)  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ x, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$  по косинусам,

2. а)  $f(x) = |x|, \quad x \in (-1, 1)$       б)  $f(x) = 2x + 1, \quad x \in (0, 2)$  по синусам.

### Вариант 13

1. а)  $f(x) = x^2 + x, x \in (-\pi, \pi]$

б)  $f(x) = 1 - \frac{2}{\pi}x, x \in (0, \pi]$  по синусам,

2. а)  $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$

б)  $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ 1, & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$  по косинусам.

### Вариант 14

1. а)  $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & x \in (-\pi, 0) \\ \frac{\pi}{4}, & x \in (0, \pi) \end{cases},$

б)  $f(x) = 4x, x \in (0, \pi)$  по косинусам,

2. а)  $f(x) = e^x, x \in (-2, 2],$

б)  $f(x) = 2x - 1, x \in (0, 1]$  по синусам.

### Вариант 15

1. а)  $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases},$

б)  $f(x) = x^2 - 1, x \in (0, \pi)$  по косинусам,

2. а)  $f(x) = 1 - x, x \in (-2, 2],$

б)  $f(x) = 3x, x \in (0, 1)$  по синусам.

### Вариант 16

1. а)  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0) \\ x, & x \in [0, \pi] \end{cases},$

б)  $f(x) = \frac{\pi - x}{2}, x \in (0, \pi)$  по синусам,

2. а)  $f(x) = 4 - 2x, x \in (-3, 3],$

б)  $f(x) = e^x, x \in (0, 1)$  по косинусам.

### Вариант 17

1. а)  $f(x) = 3x - 1, x \in (-\pi, \pi)$

б)  $f(x) = 1 - x^2, x \in (0, \pi)$  по синусам,

2. а)  $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases},$

б)  $f(x) = e^x, x \in (0, \pi],$  по косинусам.

### Вариант 18

$$1. \quad \text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases},$$

$$\text{б)} \quad f(x) = 1 + x, \quad x \in (0, \pi] \quad \text{по косинусам,}$$

$$2. \quad \text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} -1, & -4 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 4 \end{cases},$$

$$\text{б)} \quad f(x) = e^{2x}, \quad x \in (0, 1] \quad \text{по синусам}$$

### Вариант 19

$$1. \quad \text{a)} \quad f(x) = \frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi]$$

$$\text{б)} \quad f(x) = x + 1 \quad x \in (0, \pi), \quad \text{по синусам,}$$

$$2. \quad \text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \end{cases},$$

$$\text{б)} \quad f(x) = 2 - x, \quad x \in (0, 2), \quad \text{по косинусам.}$$

### Вариант 20

$$1. \quad \text{a)} \quad f(x) = \frac{x}{2} + 1, \quad x \in (-\pi, \pi]$$

$$\text{б)} \quad f(x) = e^x \quad x \in (0, \pi] \quad \text{по косинусам,}$$

$$2. \quad \text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ 1 + 3x, & 0 \leq x < 1 \end{cases},$$

$$\text{б)} \quad f(x) = 2 - x, \quad x \in (0, 2) \quad \text{по синусам.}$$

### Вариант 21

$$1. \quad \text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} \pi, & x \in (-\pi, 0) \\ \pi - x, & x \in (0, \pi) \end{cases},$$

$$\text{б)} \quad f(x) = x + \pi, \quad x \in (0, \pi) \quad \text{по синусам,}$$

$$2. \quad \text{a)} \quad f(x) = x + 2, \quad x \in (-2, 2),$$

$$\text{б)} \quad f(x) = x, \quad x \in (0, 1) \quad \text{по косинусам.}$$

### Вариант 22

$$1. \quad \text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\pi, 0) \\ 1, & x \in [0, \pi] \end{cases},$$

$$\text{б)} \quad f(x) = \pi - x, \quad x \in (0, \pi) \quad \text{по косинусам,}$$

$$2. \quad \text{a)} \quad f(x) = 1 - x, \quad x \in (1, 1),$$

$$\text{б)} \quad f(x) = 2x, \quad x \in (0, 2) \quad \text{по синусам.}$$

### Вариант 23

$$1. \quad \text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0) \\ x, & x \in [0, \pi] \end{cases},$$

$$\text{б)} \quad f(x) = x - \pi, \quad x \in (0, \pi) \quad \text{по синусам,}$$

$$2. \quad \text{a)} \quad f(x) = e^x, \quad x \in (-3, 3),$$

$$\text{б)} \quad f(x) = 2x, \quad x \in (0, 1) \quad \text{по косинусам.}$$

### Вариант 24

$$1. \quad \text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi, 0) \\ x, & x \in [0, \pi] \end{cases},$$

$$\text{б)} \quad f(x) = x - 2\pi, \quad x \in (0, \pi) \quad \text{по косинусам,}$$

$$2. \quad \text{a)} \quad f(x) = 5x, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\text{б)} \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (0, \frac{\pi}{4}] \\ 0, & x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad \text{по синусам.}$$

### Вариант 25

$$1. \quad \text{a)} \quad f(x) = 2 - x, \quad x \in (-\pi, \pi]$$

$$\text{б)} \quad f(x) = 1 - \frac{x}{2}, \quad x \in (0, \pi), \quad \text{по синусам,}$$

$$2. \quad \text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-1, 0) \\ 1, & x \in [0, 1] \end{cases},$$

косинусам.

$$\text{б)} \quad f(x) = 3 - x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad \text{по}$$

## Дополнительная литература

1. В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. Вычислительные методы. В 2-х томах. – М. Наука, 1976.
2. Р.В. Хемминг. Численные методы для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1968.
3. Д.Н. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. – СПб.: Издательство «Лань», 2002.
4. С.В. Поршнева. Вычислительная математика. Курс лекций. – СПб.: БХВ- Петербург, 2004.