М. Б. БАЛК,
Г. Д. БАЛК,
А. А. ПОЛУХИН

РЕАЛЬНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ МНИМЫХ ЧИСЕЛ

М. Б. БАЛК,
Г. Д. БАЛК,
А. А. ПОЛУХИН

РЕАЛЬНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ МНИМЫХ ЧИСЕЛ

Для старшего
школьного возраста

КИЕВ
«РАДЯНСЬКА ШКОЛА»
1988

ББК 22.141
Б20

Рецензенты: кафедра высшей математики Донецкого государственного университета (заведующий кафедрой — профессор *А. И. Бородин*), профессор кафедры математики Львовского государственного университета *А. А. Гольдберг* и учитель математики *Н. П. Грицаенко* (г. Днепропетровск).

Художники: *П. Г. Бунятов, П. Н. Лебедев, К. И. Правдин*

Балк М. Б. и др.
Б20 Реальные применения мнимых чисел.— К.: Рад. шк., 1988.— 255 с.
ISBN 5—330—00379—2.

Книга занимательно и доступно повествует о том, как вошли в математику комплексные числа и стали основой мощного аппарата для решения многочисленных практических задач в физике, механике, электротехнике, геодезии, картографии. Описаны также важнейшие обобщения комплексных чисел: алгебра и геометрия кватернионов, гиперкомплексные числа и матрицы.

Для учащихся старших классов.

Б $\frac{4802020000—267}{М210(04)—88}$ КУ—№ 9—35—1988 ББК 22.141

ISBN 5—330—00379—2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Числа натуральные...
Целые... Рациональные...
Действительные...
Что дальше? Использует ли
математика еще какие-то
другие, более общие,
системы чисел?

Хотя их и называют мнимыми, но от этого они не перестают быть полезными и даже необходимыми для аналитического выражения реальных величин.

Г. ЛЕЙБНИЦ

О дальнейших этапах развития понятия о числе, о более широких числовых системах рассказывается в этой книге.

Наиболее важная из рассматриваемых здесь числовых систем — комплексные числа — представляет интерес не только как логическое завершение тех сведений о числах, которые предусмотрены школьной программой по математике. Поучительна история возникновения комплексных чисел, их освоения, дальнейшего обобщения. Особенно интересны разнообразные, порой совершенно неожиданные, применения комплексных чисел. Комплексные числа — это, грубо говоря, выражения вида $a+b\sqrt{-1}$, где a и b — действительные числа («грубо говоря» — хотя бы потому, что смысл выражения $\sqrt{-1}$ еще требует некоторого уточнения). Трудно себе представить, чтобы такие «экзотические» выражения могли оказаться полезными для решения планиметрической задачи на построение или на вычисление, для доказательства геометрической теоремы, для получения ответа на вопросы, касающиеся цепей переменного тока или движения искусственного спутника. Но в действительности дело обстоит именно так: многие математические и физические задачи, в которых нет никаких упоминаний о комплексных числах, удается успешно решить, если сознательно, преднамеренно привлечь эти странные выражения.

Предлагаемая вниманию читателей книга повествует о том, как возникли комплексные числа и стали со временем теми объектами, без которых не может обойтись ни одна область физики, техники, механики.

В книге приведено большое количество примеров — как решенных, так и предлагаемых читателю для самостоятельного решения; в конце книги даются ответы и указания.

Звездочкой (*) отмечены более трудные параграфы (или их части), более трудные задачи. Знак ▲ указывает на конец доказательства или решения.

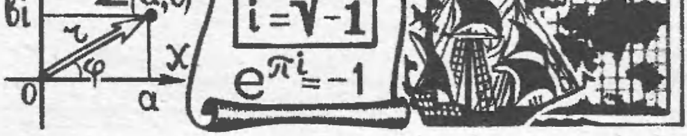
I

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ИХ ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Работал во всех отраслях математики. Многократно и успешно применял комплексные числа, впервые рассматривал тригонометрические функции комплексного переменного.

И все же $\sqrt{-1}$ является во многих случаях необходимым результатом правильных математических операций; более того, что было бы с математикой, как низшей, так и высшей, если бы ей запрещено было оперировать с $\sqrt{-1}$?

Ф. ЭНГЕЛЬС



В этой главе мы расскажем, как появились комплексные числа, как нелегко привыкали к ним математики, как постепенно и зачастую неожиданно, расширялось поле их приложений. Мы покажем, каким образом можно дать четкое определение комплексных чисел, как следует выполнять над ними арифметические действия, каков геометрический смысл этих действий. И тогда увидим, что эти необычные числа оказываются удобным средством для решения различных, близких к школьному курсу математики задач, в которых ни о каких комплексных числах речь не идет.

§ 1. Прошлое и настоящее комплексных чисел

Мнимые числа обязаны своим рождением вполне реальной задаче — задаче решения уравнений *третьей* степени. Еще до XVI в. математики, решая квадратные уравнения, иногда встречались с квадратными корнями из отрицательных чисел.

Решение уравнения вида

$$x^2+px+q=0, \qquad (1)$$

где p и q — действительные числа, по известной формуле приводило иногда к выражениям вида $A+\sqrt{B}$, где B — отрицательное число. Но никто не мог объяснить, что такое «квадратный корень из отрицательного числа», какой смысл следует придать этому выражению. Выход из затруднительного положения несложен: объявлялось, что выражение $\sqrt{-1}$ (или $\sqrt{B}$, где $B<0$) не имеет смысла. И это представлялось вполне разумным: каждый раз удавалось показать, что при $B<0$ корнем уравнения (1) не может быть ни положительное число, ни отрицательное, ни нуль. Когда же дело дошло до решения кубических уравнений, то оказалось уже невозможным отмахнуться от квадратных корней из отрицательных чисел.

Более 400 лет тому назад несколько итальянских математиков научились решать алгебраические уравнения третьей степени. Способ, изложенный в учебнике алгебры (1545 г.) одного из них, Джироламо Кардано, сводится (в современных обозначениях) к следующему: корни уравнения вида

$$x^3+px+q=0 \tag{1'}$$

могут быть вычислены по формуле (ее называют *формулой Кардано*):

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}},$$

$$\text{где } D=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Эта формула не дает ожидаемого результата в том случае, когда уравнение (1′) имеет три различных (действительных) корня! Например, легко проверить, что корнями уравнения $x^3-x=0$ являются числа 0, 1, -1. Но если бы мы попытались решить это уравнение по формуле Кардано, то получили бы:

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}.$$

Каким же образом можно из этой формулы получить числа 0, 1, -1? Чтобы ответить на этот вопрос, математикам XVI—XVII вв. необходимо было научиться обращаться с выражениями вида $A+\sqrt{B}$, где $B<0$, и, в частности, извлекать из таких выражений кубические корни.

Математики крайне неохотно шли на изучение таких выражений. Они называли их *мнимыми*, несуществую-

Любопытна история появления *формулы Кардано.* В конце XV в. математики уже легко справлялись с квадратными уравнениями, однако решение уравнений третьей степени считалось сложной задачей. В 1520 г. профессор математики Болонского университета Сципион дель Ферро (1465—1526) нашел, видимо эмпирически, способ решения уравнений вида $x^3+ax=b$. Умирая, Ферро сообщил свой способ решения уравнений только двум лицам: своему зятю и своему ученику Фиоре. Последний пользовался правилом Ферро на математических турнирах. В 1535 г. противником Фиоре на турнире оказался преподаватель математики Никколо Тарталья (1500—1557), который за несколько дней до турнира нашел свой способ решения уравнений вида $x^3+ax=b$, а затем и способ решения уравнений вида $x^3=ax+b$, где $a>0$, $b>0$. О том, как он разгромил Фиоре, стало широко известно в Италии. Под большим секре-

щими, невозможными, чисто софистическими величинами, потайными решениями уравнений, количествами, лишенными всякого смысла. Считалось очевидным, что они не имеют никакого реального содержания. Г. В. Лейбниц (1646—1716), относившийся к мнимым числам с восхищением, в то же время называл их «гибридом между бытием и небытием». А между тем эти «невозможные», «мнимые», «несуществующие» числа все настойчивее стучались в двери математической науки. Еще в XVII—XVIII в. математики обнаружили, что многие сложные и громоздкие выражения, встречающиеся в элементарной и высшей математике, легко вычислить, если пользоваться мнимыми числами. Но недоверие к этим числам было настолько велико, что нередко математики сначала вычисляли то или иное сложное выражение с помощью мнимых чисел, а затем доказывали полученную таким образом формулу без применения этих чисел.

Один из важных алгебраических вопросов, волновавший математиков XVII—XVIII вв., состоял в следующем: сколько корней имеет алгебраическое уравнение n-й степени, то есть уравнение вида

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0? \qquad (2)$$

Если ограничиться действительными корнями, то можно лишь утверждать, что их не более чем n. Если же рассматривать и мнимые корни, то ответ на поставленный выше вопрос оказывается простым и исчерпывающим: *корней у уравнения* (2) *всегда ровно n* (если, разумеется, каждый корень учитывать столько раз, какова его кратность). С этим оказался тесно связанным и другой важный для приложений вопрос, впервые поставленный Л. Эйлером: верно ли, что *любой многочлен (с действительными коэффициентами) можно представить в виде произведения многочленов не выше второй степени (тоже с действительными коэффициентами)?* Многие математики XVIII в. полагали, что ответ должен быть отрицательным. Между тем ответ оказался положительным! Это удалось показать благодаря применению мнимых чисел.

том после длительных просьб он сообщил о своем способе (в виде стихотворения) профессору математики Миланского университета Джироламо Кардано. Через несколько лет Кардано узнал и о способе Ферро. Оба способа решения оказались по существу одинаковыми. После длительных размышлений Кардано дал обоснование решения. В 1545 г. он опубликовал в Германии труд по алгебре «Великое искусство, или об алгебраических правилах», в котором изложил, с ссылками на Тарталью, правило решения кубического уравнения. Оно получило название формулы Кардано. Кардано (1501—1576) был выдающимся мыслителем, философом, врачом, автором многих научных работ, изобретателем. В своей книге Кардано впервые приводит способ решения уравнений четвертой степени, предложенный его учеником Лудовико Феррари (1522—1565).

Николай Егорович ЖУКОВСКИЙ (1847—1921) — основоположник современной гидро- и аэромеханики, автор замечательных исследований по математике, механике, астрономии. Его научная деятельность прошла в Москве, где он много лет был профессором университета и президентом Московского математического общества. Это его В. И. Ленин назвал «отцом русской авиации». Н. Е. Жуковский стал широко применять методы теории функций комплексного переменного в гидро- и аэродинамике.

В XVIII в. Л. Эйлер и другие математики обнаружили, что изучение различных колебательных процессов сводится к поиску функции $u=u(t)$, удовлетворяющей условию (дифференциальному уравнению) вида

$$\frac{d^n u}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}+\ldots+$$

$$+a_{n-1}\frac{du}{dt}+a_n u=0, \qquad (3)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные числа [1]. Например, изучение гармонических колебаний (колебаний маятника) сводится к рассмотрению уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2}+k^2u=0,$$

где k^2 — положительная константа, t — время, u — отклонение маятника от некоторого нейтрального положения. Эйлер обнаружил, что для на-

---

[1] $\frac{du}{dt}$ — производная функции u по переменной t, $\frac{d^2u}{dt^2}$ — производная по t от функции $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^3u}{dt^3}$ — производная по t от $\frac{d^2u}{dt^2}$ и т. д.

хождения искомой функции $u(t)$, удовлетворяющей *дифференциальному* уравнению (3), необходимо знать корни *алгебраического* уравнения

$$z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots+$$
$$+a_{n-1}z+a_n=0, \qquad (4)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — те же числа, что и в уравнении (3); при этом нужны *все* корни уравнения (4) — не только действительные, но и мнимые.

В течение последних двухсот лет *комплексные числа* (так предложил называть мнимые числа немецкий математик К. Ф. Гаусс) нашли многочисленные и порой совершенно неожиданные приложения. Так, например, с помощью комплексных чисел Гаусс в 1796 г. сумел найти ответ на чисто геометрический вопрос: *при каких натуральных значениях n можно построить циркулем и линейкой правильный n-угольник?*

Широкое применение нашли комплексные числа в картографии, электротехнике, гидродинамике, теории фильтрации почв, теоретической физике. Уже в нашем столетии комплексные числа и комплексные функции (функ-

Сергей Алексеевич ЧАПЛЫГИН (1869—1942) — советский ученый в области теоретической механики, гидромеханики, академик, Герой Социалистического Труда. Научные труды С. А. Чаплыгина в области математики посвящены вопросам теории дифференциальных уравнений, применению теории функций комплексной переменной к теории крыла самолета. Особое значение имели работы С. А. Чаплыгина по интегрированию дифференциальных уравнений, в результате которых был создан метод приближенного решения дифференциальных уравнений.

Мстислав Всеволодович КЕЛДЫШ (1911—1978) — советский математик и механик, выдающийся организатор научных исследований в нашей стране, руководитель научно-исследовательских институтов, решавших актуальнейшие научные и народнохозяйственные проблемы. Внес большой вклад в развитие космонавтики, вычислительной математики и техники в СССР. Был президентом Академии наук СССР (1961—1975), трижды Герой Социалистического Труда.

ции, у которых и значениями аргумента и значениями функции являются комплексные числа) успешно применялись русскими и советскими математиками и механиками Н. Е. Жуковским (1847 — 1921), С. А. Чаплыгиным (1869—1942), М. В. Келдышем (1911—1978) и другими в аэродинамике. Советские математики Г. В. Колосов (1867—1936) и Н. И. Мусхелишвили (1891—1976) впервые стали применять комплексные функции в теории упругости (то есть по существу к расчетам различных конструкций на прочность). С применением комплексных переменных в теоретической физике связаны исследования советских ученых Н. Н. Боголюбова (род. 1909) и В. С. Владимирова (род. 1923).

В конце прошлого столетия стали широко применять генераторы переменного тока. Для расчета цепей переменного тока оказались непригодными старые методы, разработанные для цепей постоянного тока и основанные на законе Ома. В 1893 г. американский электротехник Ч. П. Штейнмец предложил эффективный метод расчета цепей переменного тока. Этот метод целиком основан на применении комплексных чисел.

В 20-х годах нашего столетия стала разрабатываться квантовая механика. Для нее оказался особенно полезным аппарат комплексных чисел. Вот что пишет об этом известный современный физик Е. Вигнер в своем очерке «Непостижимая эффективность математики в естественных науках»: «Для неподготовленного ума понятие комплексного числа далеко не естественно, не просто и никак не следует из физических наблюдений. Тем не менее использование комплексных чисел становится почти неизбежным при формулировке законов квантовой механики. Кроме того, не только комплексным числам, но и так называемым аналитическим функциям суждено сыграть решающую роль в формулировке квантовой теории».

Для навигаторов представляет значительный интерес способ построения географической карты, при котором сохраняются углы между линиями. Такой способ называ-

Николай Иванович МУСХЕЛИШВИЛИ (1891—1976) — советский математик, академик, Герой Социалистического Труда. Занимался научной, педагогической и общественной работой. Созданные им методы оказали влияние на дальнейшее развитие теории упругости, теории дифференциальных и интегральных уравнений. Применял методы теории функций комплексного переменного к задачам математической физики. Результаты исследований Н. И. Мусхелишвили используются при решении различных технических задач.

ется конформной (то есть сохраняющей форму) проекцией. Оказывается, что с помощью функций комплексного переменного возможно указать бесконечно много конформных проекций.

Значительное применение нашли комплексные числа при изучении движения естественных и искусственных небесных тел. Приведем пример. Одна из важных задач, возникшая при подготовке запусков первых искусственных спутников Земли, состояла в следующем: как будет двигаться спутник под влиянием тяготения к «сплюснутому сфероиду» (такую форму имеет земной шар, который несколько сплюснут у полюсов, его полярный диаметр примерно на 42 километра меньше экваториального диаметра). Одним из самых эффективных способов решения этой задачи оказался способ, основанный на применении комплексных чисел. Он был предложен советскими учеными Е. П. Аксеновым, Е. А. Гребениковым и В. Г. Деминым.

Николай Николаевич БОГОЛЮБОВ (род. 1909) — советский математик и физик-теоретик, академик, дважды Герой Социалистического Труда. Руководитель Объединенного института ядерных исследований и Математического института им. Стеклова АН СССР. Автор фундаментальных работ по теории сверхпроводимости, квантовой физике и др.
С 14 лет начал принимать участие в семинаре при кафедре математической физики АН УССР и первую научную работу написал в 15 лет.

§ 2. Способ Гамильтона введения комплексных чисел

В течение длительного времени комплексные числа вводились (а в некоторых учебниках и сейчас вводятся) примерно с помощью такого рассуждения: «Уравнение $x^2 = -1$ не имеет корней, $\sqrt{-1}$ не существует. Обозначим это выражение через i и будем рассматривать числа вида $a+bi$, где a и b — действительные числа».

В 1833 г. ирландский математик У. Р. Гамильтон очень просто, ясно и логически безупречно разъяснил, что такое комплексные числа. Его подход к построению теории комплексных чисел можно изложить так. Рассмотрим всевозможные пары обычных (действительных) чисел, взятых в определенном порядке. Каждую такую упорядоченную пару назовем *комплексным числом.* Можно, разумеется, предложить много способов для записи упорядоченной пары действительных чисел a и b, например: (a, b), $\boxed{a \mid b}$, $a * b$. В математике предпочитают такую запись:

$$a+bi. \tag{1}$$

Значок i используется здесь только для того, чтобы как-то отделить одно обычное число из пары от другого. Знак «$+$» не говорит пока о каком-либо сложении, он только указывает на то, что мы объединяем два действительных числа в нечто единое. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы разрешаем себе всю пару (1) обозначить одной буквой, например буквой z:

$$z=a+bi. \tag{2}$$

Первое действительное число, вошедшее в эту пару (число a), условимся называть *действительной частью* числа z. Ее обозначают так: $\operatorname{Re} z$ (читается: «Рэ зэт»;

Re — первые буквы латинского Realis, что означает «действительный»). Второе действительное число из пары (2) (число b) будем называть *мнимой частью* комплексного числа z. Ее обозначают так: Im z (читается: «Им зэт»; Im — первые буквы латинского слова Imaginaris, что означает «мнимый»). Например, если $z=-3+2i$, то $\operatorname{Re} z=-3$, $\operatorname{Im} z=2$. Заметим, что по данному определению мнимая часть любого комплексного числа — это всегда некоторое действительное число. Строго говоря, чтобы пары вида (2) можно было считать *числами*, необходимо прежде всего договориться о правилах (или законах) их сравнения и выполнения над ними арифметических действий. Введем для комплексных чисел такие законы.

Закон 1. *Два комплексных числа следует считать равными в том и только в том случае, когда они имеют равные действительные части и равные мнимые части:*

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow \{\operatorname{Re} z_1=\operatorname{Re} z_2,\ \operatorname{Im} z_1=\operatorname{Im} z_2\}.$$

Закон 2. *Складывать, вычитать и умножать комплексные числа следует так, как будто это многочлены относительно буквы i; при этом разрешается произведение $i \cdot i$ заменить на -1.*

Итак, если $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, то по закону 2:

$$z_1+z_2=(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i,$$
$$z_1-z_2=(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i,$$
$$z_1\cdot z_2=(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

Примеры

1. Сложим комплексные числа $z_1=2+3i$ и $z_2=3+7i$.

Решение. $z_1+z_2=(2+3i)+(3+7i)=(2+3)+(3+7)i=5+10i$.

2. Вычтем из комплексного числа $z_1=-3-3{,}5i$ число $z_2=5-4i$.

Решение. $z_1-z_2=(-3-3{,}5i)-(5-4i)=(-3-5)+(4-3{,}5)i=-8+0{,}5i$.

3. Перемножим комплексные числа $z_1 = 2 - i$ и $z_2 = 5 + 2i$.

Решение. $z_1 \cdot z_2 = (2-i)(5+2i) = 2\cdot 5 + 2\cdot 2i - 5i - 2i\cdot i = 10 - i - 2\cdot(-1) = 12 - i$.

Закон 3. *Деление комплексных чисел определить как действие, обратное умножению: частным от деления комплексного числа* z_2 *на число* $z_1 (z_1 \neq 0)$ *будем называть такое число* z, *что* $z_1 \cdot z = z_2$. Это частное z можно записывать так: $\frac{z_2}{z_1}$ или $z_2 : z_1$ или z_2/z_1. Например, $(1+3i)/(1+i) = 2+i$, так как $(1+i)\cdot(2+i) = 1+3i$. Практические приемы деления комплексных чисел рассмотрим в § 3.

Закон 4. *Комплексные числа* $a+0i$; $0+bi$; $0+0i$ *можно записывать короче так:* a; bi; 0.

Комплексные числа вида $a+0i$ называются *действительными* (или *вещественными*), числа вида $0+bi$ — *чисто мнимыми*; число 0 (т. е. $0+0i$) — *единственное* комплексное число, которое является одновременно и действительным, и чисто мнимым.

За комплексными числами вида $a+bi$, где $b \neq 0$, обычно сохраняется название *мнимые числа* (причем, если $a \neq 0$, то число $a+bi$ иногда называют, следуя Гауссу, *смешанным мнимым числом*).

Можно показать, что введение законов 1—4 обеспечивает для комплексных чисел сохранение основных законов арифметики для действительных чисел. Нетрудно проверить, что если числитель и знаменатель дроби $\frac{z_2}{z_1}$ умножить на одно и то же комплексное число $c \neq 0$, то от этого дробь не изменится: $\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2 \cdot c}{z_1 \cdot c}$.

Среди *действительных* чисел *нет* такого числа x, которое удовлетворяет условию $x^2 = -1$. В то же время равенство $(0+1\cdot i)(0+1\cdot i) = -1 + 0\cdot i$ показывает, что среди комплексных чисел корень уравнения $x^2=-1$ *существует*. Таким является число $0+1\cdot i$ (или короче число i). Более того, легко обнаружить еще и другой комплексный корень этого уравнения — таким числом является $0+(-1)i$ (то есть число $-i$).

Запишем формулы для натуральных степеней числа i:

$$i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=i^2\cdot i=-i,\ i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1.$$

Теперь легко видеть, что при возведении числа i в степень с натуральными показателями наблюдается периодичность значений степени: из равенства $i^4=1$ следует, что если $n=4k+m$, то $i^n=i^m$. Иными словами, чтобы найти i^n, достаточно возвести i в степень, показатель которой равен остатку от деления n на 4.

Упражнения

2.1. Выполните указанные действия над комплексными числами:

1) $(7{,}2+5i)+(8-3{,}6i)$;
2) $(0-2i)+(-5-4i)$;
3) $(-2+\sqrt{2}i)-(6-3\sqrt{2}i)$;
4) $(2-i)\cdot(7+8i)$;
5) $(2{,}5-i)\cdot(-8-4i)$;
6) $(1+i)\cdot(1-i)\cdot(5-3i)$;
7) i^{153}; i^{208}; i^{834};
8) $(1+i)^2$; $(1-i)^2$;
9) $(2+5i)^2\cdot(3-i)$;
10) $(1+2i)^2\cdot(1-2i)^2$;
11) $(1+i)^4-(1-i)^4$;
12) $(2+i)^3$;
13) $i+i^2+i^3+i^4$;
14) $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}$;
15) $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

2.2. Вычислите произведение $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{100}$.

2.3. Проверьте справедливость переместительного и сочетательного законов сложения и умножения, распределительного закона умножения относительно сложения для комплексных чисел.

2.4. Проверьте справедливость равенств: $\mathrm{Re}\,(z_1+z_2)=\mathrm{Re}\,z_1+\mathrm{Re}\,z_2$, $\mathrm{Im}\,(z_1+z_2)=\mathrm{Im}\,z_1+\mathrm{Im}\,z_2$.

2.5. Может ли получиться отрицательное число, если к положительному числу прибавить квадрат некоторого числа?

2.6. Обязательно ли каждое из двух чисел равно нулю, если в результате сложения их квадратов получится нуль?

§ 3. Деление комплексных чисел

Мы определили деление как действие, обратное умножению. Частное $z=\frac{z_2}{z_1}$ $(z_1\neq 0)$ двух комплексных чисел находим как решение уравнения

$$z_1 \cdot z = z_2. \qquad (1)$$

Обозначая $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, $z=x+yi$, можно уравнение (1) переписать в виде:

$$(a+bi)\cdot(x+yi)=c+di, \qquad (2)$$

или

$$(ax-by)+(bx+ay)i=c+di.$$

Пользуясь определением равенства двух комплексных чисел, для нахождения действительной части частного x и мнимой части частного y получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} ax-by=c, \\ bx+ay=d. \end{cases} \qquad (3)$$

Решая эту систему, легко найти x, y, а следовательно, и искомое число $z=x+yi$. Тем самым мы попутно установили, что деление на любое комплексное число, отличное от нуля, всегда выполнимо, и притом однозначно. Описанная процедура заметно упрощается, если воспользоваться понятием и свойствами так называемых *сопряженных* комплексных чисел и понятием *модуля* комплексного числа.

Два комплексных числа, у которых действительные части равны, а мнимые представляют собой противоположные числа, называются сопряженными.

Число, сопряженное с числом z, обозначают $\bar{z}$. Таким образом, если $z = a + bi$, то $\bar{z} = a - bi$.

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется неотрицательное число r, задаваемое формулой $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Его обозначают $|z|$ и читают так: «модуль z». Таким образом, $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Отметим полезное тождество: *При любом комплексном z: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, то есть произведение двух сопряженных комплексных чисел всегда является действительным неотрицательным числом и равно квадрату их модуля.*

Действительно, пусть $z = a + bi$, тогда

$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Этим свойством удобно пользоваться для нахождения частного двух комплексных чисел: *Для нахождения частного от деления двух комплексных чисел достаточно записать это частное в виде дроби, затем умножить ее числитель и знаменатель на число, сопряженное со знаменателем, вычислить полученные произведения и в результате отделить действительную и мнимую части:* $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{z_2 \cdot \bar{z}_1}{z_1 \cdot \bar{z}_1} = \dfrac{1}{|z_1|^2} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1)$.

Примеры

1. Вычислим частное z от деления числа $2 + i$ на $3 - i$.

Решение. $z = \dfrac{2+i}{3-i} = \dfrac{(2+i)\cdot(3+i)}{(3-i)\cdot(3+i)} = \dfrac{5+5i}{10} = 0{,}5 + 0{,}5i$.

2. Один ученик выполнил над двумя данными комплексными числами какую-то арифметическую операцию, а полученное число заменил сопряженным с ним числом. Другой ученик поступил иначе: он сначала заменил каждое данное число сопряженным с ним

числом, а затем над полученными числами выполнил ту же операцию, что и первый. Какие получаются ответы: одинаковые или различные?

Р е ш е н и е. Обозначим данные комплексные числа: $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$. На языке математических обозначений можем сформулировать задачу так: проверить, справедливы ли следующие тождества: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$. Проверим справедливость одного из этих тождеств, например первого (остальные проверяются аналогично): $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$, тогда $\overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2)$; $\bar{z}_1 = a_1 - b_1 i$, $\bar{z}_2 = a_2 - b_2 i$, тогда $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2)$.

Справедливость тождества $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ доказана.

Приходим к такому полезному п р а в и л у: *чтобы найти число, сопряженное с результатом какой-либо арифметической операции над комплексными числами, достаточно сначала опустить знак сопряжения (черту) на каждое из чисел, участвующих в этой операции, а затем уже над полученными сопряженными числами выполнить указанную операцию.*

Понятно, что то же правило переносится на случай, когда речь идет не об одной, а о нескольких арифметических операциях над несколькими числами. Например,

если $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$, то $\bar{w} = \dfrac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}}$;

если $w = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n$, то $\bar{w} = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 \bar{z} + \bar{c}_2 \bar{z}^2 + \ldots + \bar{c}_n \bar{z}^n$.

Для решения разнообразных задач полезными оказываются следующие легко проверяемые з а м е ч а н и я.

I. *Сумма двух сопряженных комплексных чисел — всегда действительное число, а их разность — чисто мнимое число.*

В самом деле, если $z=x+iy$, то $\bar{z}=x-iy$ и $z+\bar{z}=2x$, $z-\bar{z}=2y\cdot i$.

II. *Предложение «Число w — действительное» равносильно формуле $w=\bar{w}$, а предложение «Число w — чисто мнимое» — формуле $w+\bar{w}=0$.*

Если комплексное число w — действительное, то оно имеет вид $w=u+0\cdot i$, поэтому $\bar{w}=u-0\cdot i$ и $w=\bar{w}$. И наоборот, если $w=u+iv$ и $w=\bar{w}$, то это значит, что $u+iv=u-iv$, откуда $v=-v$, $v=0$, т. е. w — действительное число. Аналогично проверяется и вторая часть замечания.

3. Верно ли, что при любом выборе неравных между собой комплексных чисел α и β, для которых $|\alpha|=1$, $|\beta|=1$, число $A=\dfrac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}$ — действительное?

Р е ш е н и е. Используя результаты примера 2 и замечание 1, преобразуем число A. Имеем:

$$A=\frac{(1-\alpha\beta)\cdot(\overline{\alpha-\beta})}{(\alpha-\beta)\cdot(\overline{\alpha-\beta})}=\frac{(1-\alpha\beta)\cdot(\bar{\alpha}-\beta)}{|\alpha-\beta|^2}=$$

$$=\frac{\bar{\alpha}-\bar{\beta}-\alpha\cdot\bar{\alpha}\cdot\beta+\alpha\cdot\beta\cdot\bar{\beta}}{|\alpha-\beta|^2}=\frac{(\overline{\alpha-\beta})+(\alpha-\beta)}{|\alpha-\beta|^2}.$$

(В ходе преобразований мы воспользовались тем, что $\alpha\cdot\bar{\alpha}=|\alpha|^2=1$ и $\beta\cdot\bar{\beta}=|\beta|^2=1$). Но сумма двух сопряженных комплексных чисел (в нашем случае $\alpha-\beta$ и $\overline{\alpha-\beta}$) всегда действительное число. Поэтому число A — действительное.

Упражнения

3.1. Напишите комплексные числа, сопряженные с числами $\sqrt{2}+3i$, $2-i$, $i-3$, i. Найдите их модули.

3.2. Найдите модуль числа $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi)$.

3.3. Вычислите:

1) $\dfrac{-5+3i}{3+5i}$; 4) $\dfrac{15-i}{i}$;

2) $\dfrac{17i}{2+7i}$; 5) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$;

3) $\dfrac{-\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{1-i}$. 6) $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}+(1-i)^{10}$.

3.4. Решите уравнение $\dfrac{x+yi}{x-yi}=x^2+y^2$ (x и y — действительные числа).

3.5. При каких действительных x и y комплексные числа $5+ixy$ и $x+y+6i$ будут сопряженными?

3.6. Найдите действительные значения x, при которых комплексные числа $z_1=\sqrt{x^2-3}+3-i\sin\dfrac{\pi x}{4}$ и $z_2=\sqrt{x^2+5}+1-i\sin^2\dfrac{\pi x}{4}$ являются сопряженными.

3.7. Разложите на множители первой степени выражения:

1) a^2+b^2; 2) $9x^2+16y^2$; 3) $x^2+6x+10$.

3.8. Верно ли, что уравнение $z^2+2\bar{z}=2$ имеет два корня? Вычислите все корни этого уравнения.

3.9. Сумма двух сопряженных комплексных чисел является действительным числом. Справедливо ли обратное утверждение?

3.10. Два комплексных числа сложили, затем перемножили. В том и другом случае получили действительные числа. Понятно, что так получится, если данные числа — сопряженные. Но может ли такое получиться, если данные числа не сопряженные?

3.11. Проверьте, что квадрат комплексного числа является действительным числом тогда и только тогда, когда данное число — действительное или чисто мнимое.

3.12. Решите уравнение $|z|+z^2=0$.

§ 4. Комплексные координаты точек и векторов

Какое отношение могут иметь квадратные корни из отрицательных чисел к геометрическим задачам? Может ли человеку, решающему планиметрическую задачу, принести пользу то обстоятельство, что в алгебре рассматриваются числа вида $a+bi$? Ответ как будто очевиден: «Не может». А между тем оказывается, что применение мнимых чисел нередко существенно облегчает решение трудной планиметрической задачи.

В течение 140 лет после появления мнимых чисел никто не искал связи между мнимыми числами и геометрическими образами. Только в 1685 г. английский математик Дж. Валлис (1616—1703) обратил внимание на то, что, с одной стороны, мнимое число $z=a+b\sqrt{-1}$ задается двумя действительными числами (a и b), а с другой стороны, точка на координатной плоскости задается тоже двумя действительными числами, так что между теми и другими есть некоторое соответствие. На это же соответствие позднее обращали внимание два петербургских академика — Г. Кюн (1690—1769) и Л. Эйлер. Заметный сдвиг произошел в конце XVIII — начале XIX в., когда геометрическое толкование комплексных чисел и арифметических действий над ними дали датчанин К. Вессель (1745—1818), швейцарец Ж. Арган (1768—1822), француз М. Бюэ (1748—1826), англичанин Дж. Уоррен (1796—1852) и другие. Среди математиков, которые независимо от других дали геометрическое толкование комплексных чисел, выделяется К. Ф. Гаусс: он сумел применить это толкование к решению содержательных и трудных геометрических задач.

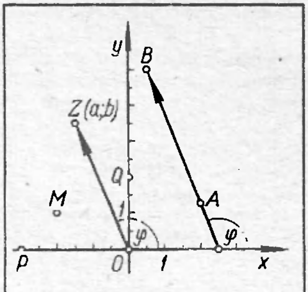


Рис. 1

Остановимся теперь на геометрическом толковании комплексных чисел.

Возьмем на плоскости декартову систему координат xOy (рис. 1). Пусть Z — какая-либо точка на плоскости. Ее положение определяется двумя действительными числами — координатами $(a;\ b)$.

Поставим в соответствие точке Z комплексное число $z = a + bi$. Это комплексное число назовем *комплексной координатой* (или координатой) точки Z. Например, точка с действительными координатами (0; 1) имеет комплексную координату $0 + 1 \cdot i$, т. е. i. (Заметим, что вместо слов «комплексная координата» часто употребляется термин «аффикс».

И наоборот, каждому комплексному числу z соответствует на декартовой плоскости xOy вполне определенная точка Z, чьей комплексной координатой служит именно это число z. Имея в виду указанное соответствие, можем кратко сказать: «комплексное число — это точка на плоскости».

Точки оси абсцисс Ox, и только они, имеют своими комплексными координатами действительные числа, поэтому ось абсцисс называют *действительной осью*. Точки оси ординат, и только они, имеют своими комплексными координатами чисто мнимые числа, поэтому ось ординат называют *мнимой осью*. А всю плоскость, которая служит для наглядного толкования комплексных чисел, называют *комплексной числовой плос-*

Леонард ЭЙЛЕР (1707—1783) — крупнейший математик XVIII в. Работал во всех отраслях математики, решая с изумительной находчивостью труднейшие задачи. Оставил громадное научное наследие. Неопубликованные им работы продолжали печататься еще в течение 80 лет после его смерти. Эйлер родился в Базеле (Швейцария), в семье пастора, увлекавшегося математикой. Там же изучал в университете медицину и математику. В 1727 г. он был приглашен в Петербургскую Академию наук. В России Эйлер прожил (с перерывом) свыше 30 лет. Большинство своих работ он опубликовал в изданиях Петербургской Академии наук. Хотя Эйлер в 30 лет ослеп на один глаз, а позднее и на второй глаз, это не сказалось ни на качестве, ни на количестве его научной продукции. Большое влияние на развитие науки оказали труды Эйлера по математическому анализу, теории чисел, астрономии, мореплаванию, артиллерии, оптике и другим разделам физики. Эйлер многократно и успешно применял комплексные числа, впервые рассматривал тригонометрические функции комплексного переменного.

костью и обозначают буквой C. Комплексной координатой начала координат O является, очевидно, число 0 (нуль). В связи с этим начало координат называют *нулевой точкой* комплексной плоскости.

Для приложений существенно, что комплексные числа допускают еще другое наглядно-геометрическое толкование.

Выберем на координатной плоскости какой-нибудь вектор $\overrightarrow{AB}$. Рассмотрим равный ему вектор $\overrightarrow{OZ}$ с началом в начале координат. Пусть конец этого вектора (точка Z) имеет комплексную координату $z = a + bi$. Тогда число z условимся называть *комплексной координатой вектора* $\overrightarrow{AB}$. Отсюда видно, что: 1) *равные векторы имеют одну и ту же комплексную координату* и 2) *комплексная координата вектора с началом в нулевой точке совпадает с комплексной координатой его конца* (в силу определения). Можно сказать и так: если проекция некоторого, расположенного на декартовой координатной плоскости, вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось абсцисс равна a и его же проекция на ось ординат равна b, то комплексной координатой вектора называется число $z=a+bi$.

Примеры

1. Пусть векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$ (рис. 2) имеют комплексные координаты z_1 и z_2, а сумма этих векторов (вектор $\overrightarrow{OB}$) имеет комплексную координату z. Как выражается число z через числа z_1 и z_2?

Решение. Пусть $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$. Тогда проекции векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$ на ось Ox равны соответственно a_1 и a_2, а проекция их суммы $\overrightarrow{OB}$ на ось Ox равна a_1+a_2. Аналогично убеждаемся, что проекция вектора $\overrightarrow{OB}$ на ось Oy равна b_1+b_2. Но тогда комплексная координата z вектора $\overrightarrow{OB}$ равна $(a_1+a_2)+(b_1+$ $+b_2)i$, то есть $z=z_1+z_2$.

Итак, *при сложении векторов их комплексные координаты складываются.*

2. Пусть две точки Z_1 и Z_2 координатной плоскости xOy (рис. 3) имеют комплексные координаты z_1 и z_2. Какую комплексную координату имеет вектор $\overrightarrow{Z_1Z_2}$?

Решение. Обозначим через z комплексную координату вектора $\overrightarrow{Z_1Z_2}$. Так как $\overrightarrow{OZ_2}=\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{Z_1Z_2}$, то $z_2=z_1+z$, откуда $z=z_2-z_1$.

Итак, *комплексная координата направленного отрезка равна разности между комплексной координатой его конца и комплексной координатой его начала.*

3. Пусть концы отрезка Z_1Z_2 (рис. 4) имеют соответственно комплексные координаты z_1 и z_2. Какова комплексная координата z середины Z этого отрезка?

Решение. Векторы $\overrightarrow{Z_1Z}$ и $\overrightarrow{ZZ_2}$ равны, поэтому они имеют одну и ту же комплексную координату; обозна-

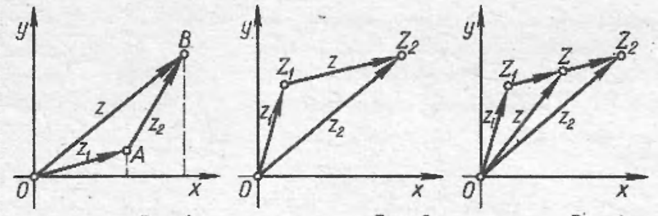


Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4

чим ее c. Так как $c=z-z_1$ (см. пример 2) и $c=z_2-z$, то, исключая c, найдем $z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$.

Итак, *комплексная координата середины отрезка равна полусумме комплексных координат его концов.* ▲

В дальнейшем мы часто без дополнительных оговорок будем обозначать точку на плоскости и ее комплексную координату одной и той же буквой, но точку — прописной (большой), а ее координату — строчной (малой). Например, Z и z, Z_1 и z_1, A и a, M и m, K и k.

Упражнения

4.1. Каковы комплексные координаты точек O, P, Q, M, изображенных на рис. 5?

4.2. Изобразите на плоскости точки A, B, C, D, комплексными координатами которых являются соответственно числа $1-i$, $-i$, $-4-2i$, $3+5i$.

4.3. Точка Z на координатной плоскости имеет комплексную координату $z=3+2i$. Найдите комплексные координаты точек Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, симметричных точке Z относительно: действительной оси, мнимой оси; начала координат; биссектрисы первого координатного угла; биссектрисы второго координатного угла.

4.4. Точка Z на плоскости имеет комплексную координату z. Выразите через это число z комплексные координаты точек Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, симметричных точке Z относительно: действительной оси; мнимой оси; начала координат; биссектрисы первого координатного угла; биссектрисы второго координатного угла.

4.5. Квадрат, сторона которого равна 10 единицам, расположен на плоскости так, что его центром является нулевая точка координатной плоскости, а его стороны параллельны координатным осям. Каковы комплексные координаты его вершин?

4.6. Какие комплексные координаты имеют векторы $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{ST}$, изображенные на рис. 5?

4.7. Нарисуйте на координатной плоскости какие-нибудь векторы, начала которых не совпадают с началом координат и которые имеют такие комплексные координаты: i; $3-i$; $-i-3$; -2; $\frac{1}{2}-\frac{4}{3}i$.

4.8. Точки A и B на координатной плоскости имеют комплексные координаты $\sqrt{3}-i$ и $-\sqrt{3}+3i$.

Какую комплексную координату имеет вектор $\overrightarrow{AB}$?

Какую комплексную координату имеет середина отрезка AB?

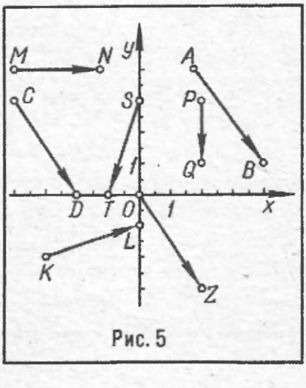


Рис. 5

4.9. Докажите, что при умножении вектора на действительное число его комплексная координата умножается на то же число, то есть если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$

имеют комплексные координаты z и w и если $\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}$, где λ — действительное число, то $w = \lambda z$. Верно ли обратное утверждение?

4.10. Пусть $A_1A_2A_3$ — треугольник на плоскости, C — точка той же плоскости. Построим точку C_1, симметричную точке C относительно вершины A_1; затем точку C_2, симметричную точке C_1 относительно A_2; точку C_3, симметричную C_2 относительно A_3; точку C_4, симметричную точке C_3 относительно A_1 и т. д. Можно ли утверждать, что после нескольких таких отражений получится точка, совпадающая с точкой C?

4.11. На плоскости заданы два параллелограмма $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ (вершины указаны в той последовательности, в которой они расположены при обходе параллелограмма против часовой стрелки). Вершины с одинаковыми номерами (A_1 и B_1, A_2 и B_2 и т. д.) соединены отрезками, и на каждом из этих отрезков отмечена его середина (соответственно C_1, C_2, C_3, C_4). Проверьте, будут ли образовавшиеся таким образом точки вершинами параллелограмма (случаи вырождения параллелограмма в отрезок или точку не исключаются).

4.12. Известны комплексные координаты a, b, c трех различных точек A, B, C на плоскости. Вычислите комплексную координату точки D, симметричной точке C относительно середины отрезка AB.

4.13. Зная комплексные координаты трех вершин параллелограмма, вычислите координату его четвертой вершины.

4.14. На плоскости выбраны четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ и точка P. Затем построены четыре точки, симметричные точке P относительно середин четырех сторон четырехугольника. Верно ли, что они окажутся вершинами параллелограмма?

4.15. 1) Если три действительных числа a, b, c удовлетворяют равенству $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$, то они, очевидно, изображают на числовой прямой одну и ту же точку. Имеет ли место аналогичное свойство для комплексных чисел?

2) Укажите на плоскости такой треугольник, чтобы комплексные координаты (a, b, c) его вершин удовлетворяли равенству $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$. Найдите углы этого треугольника.

§ 5. Модуль, аргумент, тригонометрическая форма комплексного числа

С возможностью толкования каждого комплексного числа как комплексной координаты некоторого вектора связаны понятия *модуль* комплексного числа и *аргумент* комплексного числа. А именно, если число $z=a+bi$ — комплексная координата вектора $\vec{AB}$ (рис. 1), то длину r этого вектора называют *модулем* комплексного числа z и обозначают $|z|$ (см. § 3). Ясно, что

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Таким образом, геометрически $|z|$ — это расстояние от начала координат до точки, имеющей комплексную координату z.

Угол φ наклона вектора $\vec{AB}$ к оси Ox (угол между положительным направлением оси и вектором $\overrightarrow{AB}$) называется *аргументом* числа z. Понятно, что у каждого комплексного числа z, отличного от нуля, имеется бесконечно много аргументов. Любые два из них отличаются между собой на число, кратное 2π (рис. 6). Тот из аргументов, который заключен между $-\pi$ и π, называется *главным значением аргумента* (главным аргументом) и обозначается $\arg z$. Точнее, $\arg z$ — это тот из аргументов числа z, который удовлетворяет неравенствам $-\pi<\arg z\leqslant\pi$.

Рис. 6

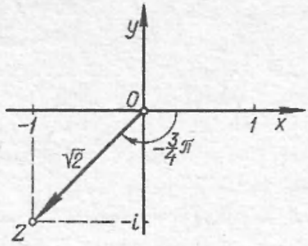


Рис. 7

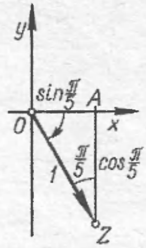


Рис. 8

Пусть φ — какой-либо из аргументов числа $z=a+bi$, а число α — главный аргумент того же числа ($\alpha=\arg z$), $r=|z|$, тогда $\varphi=\alpha+2k\pi$ (k — некоторое целое число),

$$\cos\varphi=\frac{a}{r},\ \sin\varphi=\frac{b}{r}. \qquad (1)$$

Из соотношений $a=r\cdot\cos\varphi$, $b=r\cdot\sin\varphi$ следует так называемая *тригонометрическая* (или полярная) *форма* комплексного числа

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (2)$$

Если о двух числах z и z_1 известно, что их модули равны r и r_1, а числа φ и φ_1 являются их аргументами, то равенство $z_1=z$ имеет место тогда и только тогда, когда $r_1=r$, а $\varphi_1=\varphi+2k\pi$, где k — некоторое целое число. Иначе говоря, *два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы равны с точностью до слагаемого, кратного* 2π.

Если требуется для какого-нибудь комплексного числа найти его тригонометрическую форму, то далеко не всегда нужно обращаться к формулам (1). Обычно целесообразнее сначала изобразить (пусть даже не точно) данное число в виде точки или вектора на комплексной плоскости.

Примеры

1. Найдем модуль и аргумент числа $z=-1-i$ и представим это число в тригонометрической форме.

Решение. Сначала изобразим вектор $\vec{OZ}$ с комплексной координатой $z=-1-i$ (рис. 7). Длина этого вектора равна, очевидно, $\sqrt{2}$, а угол φ его наклона к оси Ox равен $-\frac{3\pi}{4}$. Согласно нашим определениям имеем: $|z|=\sqrt{2}$, $\arg z=-\frac{3\pi}{4}$, $z=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\right.$ $\left.+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

2. Запишем в тригонометрической форме число $z=\sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}$.

Решение. Сначала изобразим число z на комплексной плоскости. При этом учтем, что $\sin\frac{\pi}{5}=\sin 18°>0$, $\cos\frac{\pi}{5}>0$. Значит, число изображается в виде вектора $\vec{OZ}$ (рис. 8). Отметим на чертеже модуль числа z (длину отрезка OZ) и его аргумент (угол, отмеченный на чертеже дугой со стрелкой). Из прямоугольного треугольника OAZ, имеющего катетами отрезки длиной $\sin\frac{\pi}{5}$ и $\cos\frac{\pi}{5}$, нам ясно, что длина отрезка OZ равна 1, а $\angle AZO$ составляет $\frac{\pi}{5}$ радиан, так что $\angle AOZ$ содержит $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}$ радиан. Если еще учесть существенное для нас направление отсчета угла AOZ, то имеем: $\arg z=-\frac{3\pi}{10}$. Кроме того, $|z|=1$. Поэтому для числа

$\sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5}$ тригонометрической формой будет:

$$1 \cdot \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)\right).$$

3. Докажем, что для каждого комплексного числа $z = a + bi$, не являющегося действительным отрицательным числом или нулем, справедливо равенство:

$$\arg z = 2\operatorname{arctg}\frac{b}{a+|z|}.$$

Решение. Пусть $\arg z = \alpha$. Так как $-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ и

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{b/|z|}{1+a/|z|} = \frac{b}{a+|z|},$$

то справедливо доказываемое равенство.

Упражнения

5.1. Упростите запись следующих чисел, заданных в тригонометрической форме: $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$;

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

$5(\cos 0 + i\sin 0)$.

5.2. Представьте в тригонометрической форме числа 1; i;

В истории комплексных чисел определенную роль сыграло следующее обстоятельство. В 1794 г. была опубликована книга Л. Эйлера, в которой вместо выражения $\sqrt{-1}$ употребляется буква i. До этого времени буква i употреблялась в математике для обозначения бесконечности (теперь мы пишем ∞), для обозначения приращения аргумента (теперь употребляем знаки Δx или Δy и т. п.). Предложение Эйлера записывать мнимые числа $a + b\sqrt{-1}$ в виде $a + bi$ прошло сначала незамеченным, но после того, как К. Гаусс в 1831 г. начал широко употреблять такую запись, она стала очень распространенной. Запись $a + bi$ побудила У. Гамильтона рассматривать комплексные числа как пары действительных чисел с особыми правилами умножения для значка i.

-1; $-i$; $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $1-i$.

Предварительно укажите на комплексной плоскости точки, изображающие эти числа.

5.3. Каковы модули и аргументы комплексных чисел:

1) $i\sin\frac{23}{24}\pi$;

2) $5\left(\cos\frac{\pi}{10}-i\sin\frac{\pi}{10}\right)$;

3) $\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$;

4) $-5\left(\cos\frac{\pi}{10}-i\sin\frac{\pi}{10}\right)$;

5) $5\cdot\left(\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}\right)$;

6) $-5\left(\sin\frac{\pi}{10}-i\cos\frac{\pi}{10}\right)$.

5.4. Представьте в тригонометрической форме: $1+\sin\alpha+i\cos\alpha$, где $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

5.5. Известно, $\operatorname{tg}(\arg z)=\frac{b}{a}$ (убедитесь в этом самостоятельно). Верно ли, что $\arg z=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$? Если нет, то выясните, для каких z такое равенство справедливо.

Понятия «модуль», «аргумент», «тригонометрическая форма» мнимого числа появились только в начале прошлого века и были связаны с поисками геометрического смысла умножения таких чисел. Так, термин «модуль мнимого числа» и обозначение $|a+bi|$ были предложены Ж. Арганом (слово modulus означает «мерка», «размер»).

Возможность придать конкретный геометрический смысл арифметическим операциям над мнимыми числами убедила математиков в том, что термин «мнимое число» неудачен и его лучше заменить другим. Вот почему в 1832 г. Гаусс предложил называть мнимые числа комплексными.

5.6. Назовите пять комплексных чисел, имеющих своим модулем число 1; сколько всего существует таких чисел? Докажите, что среди них только четыре числа таких, у которых и действительная и мнимая части являются целыми числами.

§ 6. Геометрический смысл модуля разности

Пусть Z_1 и Z_2 — две точки на комплексной плоскости, имеющие комплексные координаты соответственно z_1 и z_2. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ и обозначим его комплексную координату через z. По примеру 2 из § 4 имеем $z=z_2-z_1$, следовательно, $|z|=|z_2-z_1|$. Но $|z|$ — это длина вектора $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ (см. § 5). Поэтому число $|z_2-z_1|$ можно истолковать геометрически как *расстояние* между точками с комплексными координатами z_1 и z_2.

Докажем теперь два неравенства для модуля суммы и для модуля разности двух комплексных чисел.

Модуль суммы двух комплексных чисел z_1 и z_2 не превосходит суммы модулей этих чисел: $|z_1+z_2|\leqslant\leqslant|z_1|+|z_2|$.

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$ (рис. 2) имеют комплексные координаты z_1 и z_2. Из $\triangle OAB$ ясно, что $OB\leqslant OA+AB$, то есть $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 верно неравенство $|z_2-z_1|\geqslant|z_2|-|z_1|$.

Доказательство. Так как $z_2=(z_2-z_1)+z_1$, то: $|z_2|\leqslant|z_2-z_1|+|z_1|$, откуда следует доказываемое неравенство.

Имеющихся сведений о комплексных числах уже достаточно для их применения к решению интересных геометрических задач.

Примеры

1. (Задача Эйлера). Известно, что в каждом параллелограмме сумма квадратов всех сторон равна сумме квадратов его диагоналей. На сколько отличаются те же суммы в случае произвольно взятого на плоскости четырехугольника?

Р е ш е н и е. Обозначим данный четырехугольник через $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 9). Нас интересует величина (ее для краткости обозначим одной буквой σ):

$$\sigma = A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_4^2 + A_4A_1^2 - (A_1A_3^2 + A_2A_4^2).$$

Выберем на плоскости декартову систему координат xOy. Пусть вершины A_1, A_2, A_3, A_4 имеют комплексные координаты z_1, z_2, z_3, z_4. Тогда $\sigma = |z_2 - z_1|^2 + |z_3 - z_2|^2 + |z_4 - z_3|^2 + |z_1 - z_4|^2 - (|z_3 - z_1|^2 + |z_4 - z_2|^2)$. Далее поступим так: с помощью равенства $|z_2 - z_1|^2 = (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1)$, справедливого для любых комплексных чисел, перепишем выражение σ, не употребляя знака модуля; приведем подобные члены и затем то, что получится, попытаемся истолковать геометрически. Имеем:

$$\sigma = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + z_2\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3 - (z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_2) +$$
$$+ z_3\bar{z}_3 + z_4\bar{z}_4 - (z_3\bar{z}_4 + z_4\bar{z}_3) + z_4\bar{z}_4 + z_1\bar{z}_1 - (z_4\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_4) -$$
$$- (z_1\bar{z}_1 + z_3\bar{z}_3 - (z_1\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1)) - (z_2\bar{z}_2 + z_4\bar{z}_4 - (z_2\bar{z}_4 + z_4\bar{z}_2)).$$

Соберем все члены, содержащие множителем z_1, затем — члены, содержащие множителем z_2, и т. д. Получим:

$$\sigma = (z_1 - z_2 + z_3 - z_4)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2 + \bar{z}_3 - \bar{z}_4) = |z_1 - z_2 + z_3 - z_4|^2.$$

Каков же геометрический смысл этого выражения? Мы знаем, что геометрический смысл выражения $\frac{1}{2}(z_1 + z_3)$ — это комплексная координата середины C отрезка A_1A_3. Аналогично число $\frac{1}{2}(z_2 + z_4)$ — это координата середины D отрезка A_2A_4. Положим

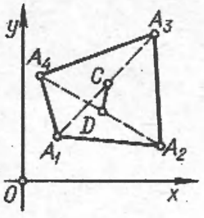


Рис. 9

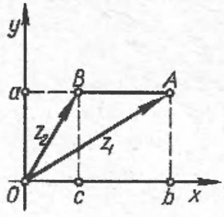


Рис. 10

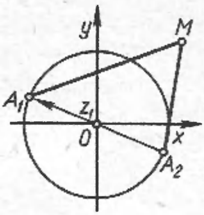


Рис. 11

$c=\frac{1}{2}(z_1+z_3)$, $d=\frac{1}{2}(z_2+z_4)$. Тогда $\sigma=4|c-d|^2$. Но геометрический смысл выражения $|c-d|$ — это длина отрезка CD. Итак, $\sigma=4CD^2$. Мы приходим к следующему выводу (*теорема Эйлера* о четырехугольнике): *сумма квадратов сторон любого плоского четырехугольника больше суммы квадратов его диагоналей на учетверенный квадрат отрезка, соединяющего середины диагоналей.*

Отсюда следует: *если в плоском четырехугольнике сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон, то он должен быть параллелограммом.*

2. Верно ли, что для любых действительных чисел a, b и c справедливо неравенство $|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}|\leqslant |b-c|$?

Решение. В левой части неравенства содержатся квадратные корни из суммы квадратов двух действительных чисел. Это наводит на мысль рассмотреть данные корни как модули некоторых комплексных чисел. Например: $\sqrt{a^2+b^2}=|z_1|$, где $z_1=b+ai$ и $\sqrt{a^2+c^2}=|z_2|$, где $z_2=c+ai$. При этом $z_1-z_2=b-c$, следовательно, $|z_1-z_2|=|b-c|$.

Изобразим на комплексной плоскости точки A и B

с координатами z_1 и z_2 (рис. 10) и векторы OA и $\vec{OB}$ соответственно с теми же комплексными координатами. Но $|z_1-z_2|=|b-c|$ есть расстояние между точками B и A, то есть длина стороны AB треугольника OAB, $|z_1|$ — длина стороны OA и $|z_2|$ — длина стороны OB того же треугольника. Поэтому справедливость доказываемого неравенства следует из хорошо известного соотношения между сторонами треугольника.

Упражнения

6.1. Может ли модуль суммы каких-нибудь двух комплексных чисел быть равным разности модулей этих чисел?

6.2. Может ли модуль разности двух комплексных чисел быть равным сумме модулей этих чисел?

6.3. Зная комплексные координаты a, b, c трех вершин треугольника ABC, вычислите длины его медиан.

6.4. Известно, что если M — фиксированная точка на окружности, то сумма квадратов ее расстояний до концов любого из диаметров этой окружности есть величина постоянная, не зависящая от выбора диаметра (чему она равна?). Останется ли в силе это свойство, если в качестве M взять произвольную фиксированную точку в плоскости этой окружности (рис. 11)?

6.5. Окружность и квадрат $ABCD$ имеют общий центр. Докажите, что для любой точки M окружности выражение $MA^2 \cdot MC^2 + MB^2 \cdot MD^2$ есть величина постоянная.

6.6. Докажите следующее утверждение, известное в геометрии под названием *теоремы Лейбница*: Расстояния от любой точки M, взятой в плоскости треугольника ABC, до его вершин A, B, C и центроида F (точки пересечения медиан) связаны соотношением: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = AF^2 + BF^2 + CF^2 + 3 \cdot MF^2$.

§ 7. Формулы Эйлера и Муавра

Выражение вида $\cos\varphi+i\sin\varphi$ (φ — действительное число) встречается очень часто в математике и ее приложениях. Для него используются различные сокращенные обозначения. Например, в картографии его обозначают знаком 1_φ, в электротехнике — знаком $\angle\varphi$, а в работах по математике — через $\exp(i\varphi)$ или $e^{i\varphi}$. Таким образом, мы здесь принимаем следующее обозначение:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi. \tag{1}$$

Например,

$$e^{i0}=\cos 0+i\sin 0=1,\quad e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+$$
$$+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,\quad e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i \text{ и т. п.}$$

Формула (1) впервые встречается в статье Эйлера (1743 г.) и теперь называется его именем. Выражение вида $e^{i\varphi}$ называют *мнимой экспонентой.*

Встречающиеся в дальнейшем записи вида $e^{-i\varphi}$, $e^{\varphi i}$, $e^{ni\varphi}$ следует понимать как $e^{i(-\varphi)}$, $e^{i\varphi}$, $e^{i(n\varphi)}$.

Обозначение (1) оправдано сходством в свойствах выражений вида e^x (степень с действительным показателем x) и выражений вида $\cos\varphi+i\sin\varphi\equiv e^{i\varphi}$.

Для действительных x и x_1 и целых n верны такие формулы:

$$e^x\cdot e^{x_1}=e^{x+x_1}, \tag{2}$$

$$e^{-x}=\frac{1}{e^x}, \tag{3}$$

$$(e^x)^n=e^{nx}. \tag{4}$$

Иными словами, при умножении степеней с одним и тем же основанием показатели складываются, при возведении какой-либо степени в целую степень — перемножаются. Напишем для выражения вида $e^{i\varphi}$ аналогичные формулы (ниже φ, φ_1 — произвольные действительные числа, n — любое целое число):

$$e^{i\varphi}\cdot e^{i\varphi_1}=e^{i(\varphi+\varphi_1)}, \tag{5}$$

$$e^{-i\varphi}=\frac{1}{e^{i\varphi}}, \tag{6}$$

$$(e^{i\varphi})^n=e^{i(n\varphi)}. \tag{7}$$

Верны ли эти равенства? Оказывается, да! В этом можно убедиться, пользуясь формулами сложения для тригонометрических функций. Справедливость формул (5) — (7) оправдывает введение обозначения (1). Докажем формулы (5) — (7):

$$e^{i\varphi}\cdot e^{i\varphi_1}=(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=(\cos\varphi\cdot\cos\varphi_1-$$
$$-\sin\varphi\cdot\sin\varphi_1)+i(\sin\varphi\cdot\cos\varphi_1+\cos\varphi\cdot\sin\varphi_1)=$$
$$=\cos(\varphi+\varphi_1)+i\sin(\varphi+\varphi_1)=e^{i(\varphi+\varphi_1)}.$$

Итак, для любых φ и φ_1 формула (5) верна.

Полагая в (5) $\varphi_1=-\varphi$, получим: $e^{i\varphi}\cdot e^{i(-\varphi)}=e^{i\cdot 0}=1$, откуда следует $e^{-i\varphi}=\frac{1}{e^{i\varphi}}$, т. е. формула (6).

Доказательство формулы (7) для любых натуральных n проведем методом математической индукции. При $n=1$ формула (7), очевидно, верна. Пусть k — такой номер, для которого (7) имеет место:

$$(e^{i\varphi})^k=e^{i(k\varphi)}. \tag{8}$$

Покажем, что в таком случае формула (7) верна и для следующего номера (при $n=k+1$). Действительно, в силу формул (5) и (8) имеем:

$$(e^{i\varphi})^{k+1}=(e^{i\varphi})^k\cdot e^{i\varphi}=e^{i(k\varphi)}\cdot e^{i\varphi}=e^{i(k\varphi+\varphi)}=e^{i(k+1)\varphi}.$$

Итак, если формула (8) верна, то формула (7) верна при $n = k+1$. Согласно принципу математической индукции формула (7) верна для всех натуральных n.

Пусть теперь n — *произвольное целое отрицательное число,* тогда $n = -m$, где m — натуральное число, поэтому $(e^{i\varphi})^m = e^{i(m\varphi)}$. Следовательно,

$$(e^{i\varphi})^n = (e^{i\varphi})^{-m} = \frac{1}{(e^{i\varphi})^n} = \frac{1}{e^{i(m\varphi)}} = e^{i(-m\varphi)} = e^{i(n\varphi)},$$

то есть формула (7) верна и при любом целом отрицательном n.

Для $n = 0$, как обычно, полагают $z^0 = 1$, и тогда справедливость формулы (7) очевидна. Итак, формула (7) действительно верна для всех целых чисел n. Формулу (7) называют *формулой Муавра.* Распространена и другая ее запись:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \qquad (9)$$

Однако часто предпочтение отдают записи (7) как более компактной, естественной и удобной для применений.

Абрахам де МУАВР (1667—1754) — английский математик. Родился во Франции. В юности, в связи с преследованиями гугенотов во Франции, эмигрировал в Англию. Член Лондонского королевского общества. Помимо комплексных чисел успешно занимался вопросами комбинаторики и теории вероятностей. В теории вероятностей доказал важную теорему, названную его именем. В теории комплексных чисел вывел правила возведения в степень и извлечения корня n-й степени из комплексных чисел. Наиболее известной была его книга «Теория случая».

Формулы (5) — (7) позволяют выполнять преобразования с выражениями вида $\cos\varphi + i\sin\varphi$ так, как будто это обычные степени.

Из формулы Эйлера следуют две формулы, выражающие $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ через мнимые экспоненты. Заменяя в (1) φ на $-\varphi$, имеем:

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \qquad (10)$$

Складывая и вычитая почленно (1) и (10), получим:

$$2\cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}; \quad 2i\sin\varphi = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}, \qquad (11)$$

откуда следуют интересующие нас формулы:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \qquad (12)$$

Примеры

1. Запишем число $\sin 1^\circ + i\cos 1^\circ$ в виде мнимой экспоненты.

Решение. Воспользуемся формулами (1) и (5): $\sin 1^\circ + i\cos 1^\circ = i(\cos 1^\circ - i\sin 1^\circ) =$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{180} - i\sin\frac{\pi}{180}\right) =$$

$$= e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{180}} = e^{\frac{i\cdot 89\pi}{180}}.$$

Упражнения

7.1. Даны девять комплексных чисел $z_1 = \cos 10^\circ + i\sin 10^\circ$, $z_2 = \cos 20^\circ + i\sin 20^\circ$, $z_3 = \cos 30^\circ + i\sin 30^\circ$, $z_4 = \cos 40^\circ + i\sin 40^\circ$, ..., $z_9 = \cos 90^\circ + i\sin 90^\circ$. Являются ли они членами геометрической прогрессии? Если да, то каков ее знаменатель?

7.2. Можно ли комплексные числа $z_1 = \sin 1^\circ - i\cos 1^\circ$, $z_2 = \sin 2^\circ - i\cos 2^\circ$, ..., $z_{89} = \sin 89^\circ - i\cos 89^\circ$ рассматривать как последовательные члены геометрической прогрессии?

§. 8. Применение формул Эйлера и Муавра в тригонометрии

Формулы Эйлера и Муавра позволяют эффективно решать разнообразные задачи, связанные с тригонометрическими функциями. В частности, их можно использовать при вычислении различных тригонометрических сумм, с которыми приходится встречаться в прикладных дисциплинах. Достаточно общий прием вычисления таких сумм состоит в том, что данная действительная сумма заменяется некоторой комплексной суммой, которая часто вычисляется с использованием формулы суммы членов геометрической прогрессии. Заметим, что эта формула сохраняется и в случае, если члены прогрессии и ее знаменатель — комплексные числа, и что в рассматриваемых ниже задачах ее удобно применить в таком виде: сумму (S) n первых членов геометрической прогрессии, у которой a — первый член, l — последний, q — знаменатель, находим (при $q \neq 1$) по формуле $S = \dfrac{lq-a}{q-1}$.

Примеры

1. Вычислим суммы: $A = \cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots + \cos 99\alpha$, $B = \sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \ldots + \sin 99\alpha$.

Решение. Можно одновременно вычислить эти суммы, если ввести новую, комплексную сумму:

$$S = A + Bi = (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha) + \ldots + (\cos 99\alpha + i\sin 99\alpha).$$

По формулам Эйлера и Муавра имеем:

$$S = A + Bi = e^{i\alpha} + (e^{i\alpha})^3 + \ldots + (e^{i\alpha})^{99}.$$

Вычисляем S по формуле для суммы членов геометрической прогрессии:

$$S=\frac{(e^{i\alpha})^{99}\cdot(e^{i\alpha})^2-e^{i\alpha}}{(e^{i\alpha})^2-1}=\frac{e^{i\cdot 101\alpha}-e^{i\alpha}}{(e^{i\alpha})^2-1}.$$

Чтобы найти A и B, достаточно в S отделить действительную и мнимую части. Для этого целесообразно воспользоваться формулами Эйлера и Муавра и соотношениями (7) и (11) из § 7.

Получим:

$$S=\frac{(e^{i\cdot 50\alpha}-e^{-i\cdot 50\alpha})e^{i\alpha}\cdot e^{i\cdot 50\alpha}}{e^{i\alpha}(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})}=\frac{e^{i\cdot 50\alpha}\cdot 2i\sin 50\alpha}{2i\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 50\alpha}{\sin\alpha}\cdot(\cos 50\alpha+i\sin 50\alpha).$$

Отсюда

$$A=\frac{\sin 50\alpha\cdot\cos 50\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin 100\alpha}{2\sin\alpha},\quad B=\frac{\sin^2 50\alpha}{\sin\alpha}.$$

2. Пользуясь свойствами мнимых экспонент (см. (1) — (8) из § 7), выведем формулы для преобразования сумм $A=\cos\alpha+\cos\beta$ и $B=\sin\alpha+\sin\beta$ в произведения.

Решение. $A+Bi=(\cos\alpha+i\sin\alpha)+(\cos\beta+i\sin\beta)=$

$$=e^{i\alpha}+e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)=\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\right.$$

$$\left.+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+$$

$$+i\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

По закону равенства комплексных чисел находим:

$$A=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad B=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.\ \blacktriangle$$

Формулу Эйлера целесообразно использовать при изучении колебательных процессов. Рассмотрим два гармонических колебания точки с одинаковой частотой ω:

$$v_1 = A \sin(\omega t + \alpha),$$

$$v_2 = B \sin(\omega t + \beta).$$

Здесь A и B — амплитуды колебаний, а α и β — их начальные фазы.

Покажем, что при сложении этих гармонических колебаний получается *гармоническое* колебание v *с той же частотой* ω. Итак, нас интересует сумма

$$v = v_1 + v_2 = A \sin(\omega t + \alpha) + B \sin(\omega t + \beta).$$

Ее можно рассматривать как мнимую часть комплексной суммы

$$S = Ae^{i(\omega t + \alpha)} + Be^{i(\omega t + \beta)},$$

то есть

$$v = \mathrm{Im}[Ae^{i(\omega t + \alpha)} + Be^{i(\omega t + \beta)}] = \mathrm{Im}[e^{i\omega t}(Ae^{i\alpha} + Be^{i\beta})].$$

Запишем комплексное число $Ae^{i\alpha} + Be^{i\beta}$ в показательной форме:

$$Ae^{i\alpha} + Be^{i\beta} = Ce^{i\gamma}.$$

Тогда

$$v = \mathrm{Im}[e^{i\omega t} \cdot Ce^{i\gamma}] = \mathrm{Im}[Ce^{i(\omega t + \gamma)}] = C \sin(\omega t + \gamma).$$

Таким образом, v — гармоническое колебание с частотой ω, C — его амплитуда.

Обозначив разность начальных фаз через φ (то есть $\beta - \alpha = \varphi$), вычислим амплитуду C результирующего колебания. Учитывая, что $|e^{i\alpha}| = 1$, имеем:

$$C = |Ae^{i\alpha} + Be^{i\beta}| = |Ae^{i\alpha} + Be^{i(\alpha + \varphi)}| = |e^{i\alpha}| \cdot |A + Be^{i\varphi}| =$$

$$= |(A + B\cos\varphi) + iB\sin\varphi| = \sqrt{A^2 + 2AB\cos\varphi + B^2}.$$

Полученная формула позволяет провести качественное исследование результирующего колебания. Из нее следует, что результирующее колебание имеет максимальную амплитуду, равную $A+B$ (при $\varphi=0$), то есть в случае, когда начальные фазы обоих колебаний одинаковы. Если окажется, что $A=B$ и $\cos\varphi=-1$ (в этом случае фазы колебаний противоположны), то при наложении колебаний точка остается в состоянии покоя.

3. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — какие-либо действительные числа и $f(t)=\cos(t+\alpha_1)+\frac{\cos(t+\alpha_2)}{2}+\ldots+\frac{\cos(t+\alpha_n)}{2^{n-1}}$, причем $f(t_1)=f(t_2)=0$. Докажем, что $t_2-t_1=m\pi$, где m — некоторое целое число. (Задача была предложена на IX Международной математической олимпиаде учащимся десятых классов.)

Решение. Рассмотрим функцию

$$S(t)=e^{i(t+\alpha_1)}+\frac{1}{2}e^{i(t+\alpha_2)}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}e^{i(t+\alpha_n)}=$$

$$=e^{it}\left(e^{i\alpha_1}+\frac{1}{2}e^{i\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}e^{i\alpha_n}\right)=e^{it}\cdot A,$$

где $A=e^{i\alpha_1}+\frac{1}{2}e^{i\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}e^{i\alpha_n}$.

Так как $\left|e^{i\alpha_1}\right|=1$, а $\left|\frac{1}{2}e^{i\alpha_2}+\frac{1}{2^2}e^{i\alpha_3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}e^{i\alpha_n}\right|\leqslant$

$$\leqslant\left|\frac{1}{2}e^{i\alpha_2}\right|+\left|\frac{1}{2^2}e^{i\alpha_3}\right|+\ldots+\left|\frac{1}{2^{n-1}}e^{i\alpha_n}\right|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+$$

$$+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<1, \text{ то } A\neq 0.$$

Запишем число A в показательной форме $A=\rho e^{i\varphi}$ ($\rho\neq 0$), тогда $S(t)=\rho e^{i(t+\varphi)}=\rho\cos(t+\varphi)+i\rho\sin(t+\varphi)$. Отсюда $f(t)=\mathrm{Re}\,S(t)=\rho\cos(t+\varphi)$. Из условия $f(t_1)=f(t_2)=0$ получим: $\cos(t_1+\varphi)=\cos(t_2+\varphi)=0$, откуда

$t_1+\varphi=\frac{\pi}{2}+m_1\pi$, $t_2+\varphi=\frac{\pi}{2}+m_2\pi$ (m_1, m_2 — целые числа). Исключая φ, получим требуемое соотношение: $t_2-t_1=m\pi$, где $m=m_2-m_1$ — целое число.

Физический смысл этой задачи заключается в следующем. Если функция $f(t)$ является суммой нескольких гармонических колебаний с одной и той же частотой $\omega=1$ и амплитудами $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{2^{n-1}}$ и если в два момента времени t_1 и t_2 величина $f(t)$ обращается в 0, то промежуток времени между этими моментами должен быть кратным числу π.

Упражнения

8.1. Дано, что $\sin\varphi=\frac{1}{3}$. Чему равен $\sin 3\varphi$?

8.2. Вычислите сумму: $A=1-\cos 2\alpha+\cos 4\alpha-\cos 6\alpha+...+\cos 40\alpha$.

8.3. Вычислите суммы: $A=\cos\alpha-\cos 2\alpha+\cos 3\alpha-...+\cos(2n-1)\alpha$, $B=\sin\alpha-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha-...+\sin(2n-1)\alpha$.

8.4. Проверьте, справедливо ли равенство: $\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+...+\cos\frac{17\pi}{19}=\frac{1}{2}$.

8.5. Докажите, что при $x\neq 2k\pi$ (k — целое) справедливо тождество $\sin x+\sin 2x+...+\sin nx=$

$$=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

§ 9. Показательная форма комплексного числа

Выше мы рассматривали тригонометрическую форму записи комплексного числа: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Формула Эйлера позволяет, очевидно, комплексное число z $(z \neq 0)$ записать более компактно: $z = re^{i\varphi}$, где φ — какой-либо аргумент числа z, а r — его модуль.

Это так называемая показательная или экспоненциальная форма записи комплексного числа.

Для получения показательной формы комплексного числа нет необходимости предварительно записывать его в тригонометрической форме.

Примеры

1. Запишем в показательной форме число i.

Решение. Изобразим число i в виде вектора на комплексной плоскости. Его длина равна 1, а угол наклона к действительной оси равен $\frac{\pi}{2}$. Значит, $|i| = 1$, $\arg i = \frac{\pi}{2}$, $i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Это и будет показательная форма числа i.

2. Запишем число $z = 1 - i$ в показательной форме.

Решение. Число $z = 1 - i$ имеет модуль $\sqrt{2}$ и аргумент $-\frac{\pi}{4}$, поэтому его показательная форма такова: $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. ▲

Заметим, что, имея показательную форму комплексного числа z, мы можем указать его модуль и аргумент. Например, если $z = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$, то $|z| = 5$. Один из аргументов числа z равен $\frac{\pi}{2}$, так что $z = 5i$.

Рассмотрим правила действий с аргументами и мо-

О возможности упорядочить комплексные числа. До сих пор мы не встречали (и в дальнейшем не встретим) неравенств вида $A<B$ или $A>B$, где A и B — комплексные числа. Чем это объяснить? Неужели невозможно комплексные числа упорядочить, то есть сформулировать правило, позволяющее для любых двух из них сказать, какое следует считать меньшим, а какое — большим? Оказывается, что такое правило установить можно, и даже не одним способом. Самый простой способ упорядочения чисел — *лексикографический,* по аналогии с тем, как упорядочиваются слова в словаре. Возьмем два числа $z_1=a_1+b_1 i$ и $z_2=a_2+b_2 i$. Будем считать, что $z_1<z_2$ (или: число z_1 предшествует числу z_2), если имеет место одно из двух:

1) $a_1<a_2$ (независимо от того, что больше: число b_1 или b_2);

2) $a_1=a_2$, но $b_1<b_2$.

В том же случае можно условиться считать, что $z_2>z_1$.

дулями произведений и частных комплексных чисел, отличных от нуля.

Пусть $z=z_1\cdot z_2$. Запишем каждый множитель в показательной форме: $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$. Тогда

$$z=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=$$
$$=(r_1\cdot r_2)e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=$$
$$=(r_1\cdot r_2)e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Отсюда видно, что z имеет своим модулем число $r_1\cdot r_2$, аргументом (точнее, одним из аргументов) — число $\varphi_1+\varphi_2$.

Итак, *при умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются* (методом индукции можно доказать, что это верно для любого числа множителей).

В случае равных множителей мы получаем следующее правило: *при возведении комплексного числа z в степень с натуральным показателем его модуль возводится в степень с тем же показателем, а аргумент умножается на показатель степени.*

Таким образом, если число z имеет модулем число r, а одним из своих аргументов число φ, то число z^n имеет модуль r^n, а одним из своих аргументов число $n\varphi$.

Заметим, что при любых натуральных m и n верны равенства:

$$|z^{m\cdot n}| = |z|^{m\cdot n} = |z^m|^n.$$

3. Упростим выражение $w = (\sqrt{3} - i)^6$.

Решение. Полагая $z = \sqrt{3} - i$, найдем: $|z| = 2$, $\arg z = -\frac{\pi}{6}$. Поэтому $|w| = |z|^6 = 2^6 = 64$, а один из аргументов числа w равен $\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot 6 = -\pi$, так что $w = 64e^{-i\pi} = -64$. ▲

Пусть теперь $z = z_1/z_2$. Запишем делимое и делитель в экспоненциальной форме: $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$. Тогда

$$z = \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i\varphi_1}\cdot\frac{1}{e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i\varphi_1}\cdot e^{-i\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Видим, что z_1/z_2 имеет модулем число $\frac{r_1}{r_2}$, а одним из своих аргументов — число $\varphi_1 - \varphi_2$. Итак, *при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.*

4. Пусть $z = \frac{a-b}{a+b}$, где a и

Например, $5+4i < 6+3i$. Рассмотрим другой возможный способ упорядочения комплексных чисел. Пусть z_1 и z_2 — два комплексных числа, $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ ($\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2$, $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$). Условимся считать, что $z_1 < z_2$ при выполнении одного из условий:

1) $r_1 < r_2$ (независимо от того, что больше: φ_1 или φ_2);

2) $r_1 = r_2$, но $\varphi_1 < \varphi_2$.

При применении каждого из этих способов определения для комплексных чисел понятия «меньше» имеет место «свойство транзитивности»: если $z_1 < z_2$ и $z_2 < z_3$, то $z_1 < z_3$. Однако для таких определений не сохраняется важное свойство, часто используемое при рассмотрении неравенств для действительных чисел: если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$. Например, пусть $a = -i$, $b = i$, $c = i$. Тогда в силу приведенного выше определения мы должны считать, что $c > 0$ и $a < b$. Но $a\cdot c = -i\cdot i = 1$, $b\cdot c = i\cdot i = -1$, и неравенство $ac < bc$ уже неверно. Такие отклонения от привычных свойств неравенств побудили отказаться в случае комплексных чисел от рассмотрения понятий «меньше» и «больше».

b — два комплексных числа, причем $|a|=|b|$. Верно ли, что z — чисто мнимое число?

Решение. Обозначив модули чисел a и b буквой r, а их аргументы соответственно α и β, запишем данные числа в показательной форме: $a=re^{i\alpha}$, $b=re^{i\beta}$. Тогда (см. (7)—(8) из § 7):

$$z=\frac{re^{i\alpha}-re^{i\beta}}{re^{i\alpha}+re^{i\beta}}=\frac{re^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}-e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)}{re^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)}=\frac{2i\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=$$

$$=i\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Видим, что z — чисто мнимое число.

Упражнения

9.1. Запишите данные комплексные числа в показательной форме:

1) 1; 2) $-i$; 3) $1+i$; 4) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9.2. Проверьте справедливость равенств:

1) $e^{2\pi i}=1$; 2) $e^{2k\pi i}=1$ (k — любое целое число); 3) $e^{\pi i}+1=0$.

9.3. Вычислите выражения, пользуясь показательной формой комплексных чисел:

1) $\frac{1+i}{1-i}$; 2) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; 3) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60}-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{60}$.

9.4. Докажите, что произведение $P=(a^2+1)(b^2+1)\times$ $\times(c^2+1)$ при любых целых a, b, c можно представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

9.5. Пусть целое число A можно представить в виде суммы двух точных квадратов (квадратов натуральных чисел). Будет ли A^2 обладать тем же свойством?

§ 10. Комплексный множитель как оператор

Мы убедились, что комплексное число можно толковать как точку и как вектор.

Остановимся еще на одном важном геометрическом толковании комплексного числа. Пусть имеется на плоскости какой-то вектор $\overrightarrow{OZ}$ (рис. 12) и пусть z — его комплексная координата. Повернем вектор вокруг его начала O на угол α (против движения часовой стрелки, если $\alpha > 0$, и по часовой стрелке, если $\alpha < 0$) и растянем этот вектор (не меняя его начала) с коэффициентом растяжения ρ (растягиваем «в ρ раз»; при $0 < \rho < 1$ это преобразование будет на самом деле сжатием). В результате получаем новый вектор $\overrightarrow{OW}$; его комплексную координату обозначим через w. Как же выражается число w через числа z, α, ρ?

Пусть $z = re^{i\varphi}$. Ясно, что $|w| = \rho r$, $\varphi + \alpha$ — один из аргументов числа w. Поэтому $w = \rho \cdot r \cdot e^{i(\varphi+\alpha)} = (\rho e^{i\alpha}) \times \times (re^{i\varphi})$. Обозначим через c комплексное число $\rho e^{i\alpha}$. Тогда имеем: $w = cz$.

Таким образом, если над вектором $\overrightarrow{OZ}$ выполнить операции поворота (на угол α) и растяжения (с коэффициентом растяжения ρ), то его комплексную координату z нужно умножить на комплексное число $c = \rho e^{i\alpha}$.

И наоборот, если комплексную координату z некоторого вектора $\overrightarrow{OZ}$ умножить на комплексное число $c = \rho e^{i\alpha}$, то новое число $w = cz$ будет представлять собой комплексную координату вектора $\overrightarrow{OW}$, который может быть получен из вектора $\overrightarrow{OZ}$ путем поворота (на угол α) и растяжения (с коэффициентом ρ).

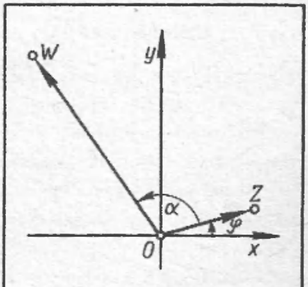


Рис. 12

Можно сказать так: *каждый комплексный множитель* c ($c \neq 0$) *можно толковать геометрически как оператор поворота (на угол* α, *равный аргументу числа* c) *и растяжения (с коэффициентом растяжения, равным* $|c|$).

Латинское слово *оператор* означает исполнитель. Можно сказать, что множитель c (в формуле $w = c \cdot z$) преобразует вектор с координатой z в вектор с координатой cz. Мы выяснили геометрическую картину: что «делает» комплексный множитель c с вектором z, какие элементарные геометрические преобразования следует выполнить над этим вектором, чтобы получить вектор cz.

Понятно, что сделанный выше вывод легко обобщается на тот случай, когда началом какого-либо из рассматриваемых векторов не является начало координат. Например, если векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{MN}$ имеют комплексные координаты z и w, причем $w = -3iz$, то это означает, что после поворота вектора $\overrightarrow{KL}$ вокруг K на угол $-\frac{\pi}{2}$ радиан $\left(\arg(-3i) = -\frac{\pi}{2}\right)$ и растяжения его с коэффициентом $3(|-3i| = 3)$ получим вектор $\overrightarrow{KL'} = \overrightarrow{MN}$.

Особенно важен случай, когда $|c| = 1$. Тогда комплексное число c (оно имеет вид $e^{i\alpha}$) представляет собой *оператор поворота*. Например, комплексное число $i (i = e^{i\frac{\pi}{2}})$ является оператором поворота на угол $+\frac{\pi}{2}$ радиан (поворот совершается в положительном направлении, то есть против часовой стрелки).

Мы рассмотрели три различных толкования комплексных чисел (комплексное число — точка на плоскости; комплексное число — вектор; комплексное число — оператор поворота и растяжения). Именно эта многоликость комплексных чисел делает их особенно удобным аппаратом для решения задач по геометрии и механике.

Примеры

1. $OABC$ — квадрат (рис. 13). Вектор $\overrightarrow{OA}$ имеет комплексную координату $z=3-i$. Вычислим комплексную координату вектора $\overrightarrow{OB}$ (обозначим ее через w_1) и вектора $\overrightarrow{AC}$ (w_2).

Р е ш е н и е. Можно получить $\overrightarrow{OB}$, если $\overrightarrow{OA}$ повернуть на угол $+\frac{\pi}{4}$ радиан и затем растянуть с коэффициентом растяжения $\sqrt{2}$. Поэтому $w_1=\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot z=\sqrt{2}\times$ $\times\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot z=(1+i)(3-i)=4+2i$. Если $\overrightarrow{OB}$ повернуть на $90°$ в положительном направлении, то получим вектор $\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{AC}$. Поэтому $w_2=iw_1=i(4+2i)=$ $=-2+4i$.

2. Острый угол при вершине O ромба $OZ_1Z_2Z_3$ (O — начало координат) равен $45°$, а вершина Z_1 имеет комплексную координату $z_1=2\sqrt{2}+i$ (вершины O, Z_1, Z_2, Z_3 следуют против часовой стрелки). Найдем комплексные координаты остальных вершин ромба.

Р е ш е н и е. Обозначим комплексные координаты вершин ромба Z_1, Z_2, Z_3 соответственно через z_1, z_2, z_3,

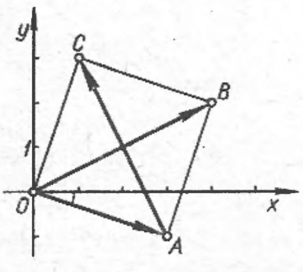


Рис. 13

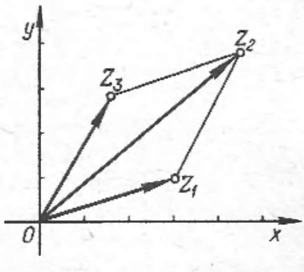


Рис. 14

вершина O имеет комплексную координату 0. Вектор $\overrightarrow{OZ_3}$ получаем из вектора OZ_1 (рис. 14) поворотом (без растяжения) на угол 45° ($\frac{\pi}{4}$ радиан). Поэтому имеем:

$$z_3 = z_1 \cdot e^{\frac{i\pi}{4}} = (2\sqrt{2}+i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Так как $\overrightarrow{OZ_2} = \overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_3}$, то (см. пример 1 из § 4) получим:

$$z_2 = z_1 + z_3 = \left(2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(3+\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \quad \blacktriangle$$

Отметим важное следствие из полученного толкования комплексного множителя: *два вектора тогда и только тогда коллинеарны, когда отношение их комплексных координат является действительным числом* (и притом положительным, если векторы сонаправлены, и отрицательным, если они противонаправлены). В самом деле, пусть векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (рис. 15) имеют комплексные координаты $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$. Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены, то $\theta = \varphi$ (с точностью до целого кратного числа 2π), и поэтому $w/z = \rho/r > 0$. Если же векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ противоположно направлены (рис. 16), то $\theta = \varphi + \pi$ (с точностью до целого кратного числа 2π), и поэтому $w/z = -\rho/r < 0$.

Если же $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не коллинеарны, то $\theta - \varphi \neq k\pi$ и число $\frac{w}{z}$ не является, очевидно. действительным. $\blacktriangle$

3. Изобразим на комплексной плоскости точки Z_1, Z_2, Z_3 с координатами $8+13i$, $13+21i$, $21+34i$. Лежат ли они на одной прямой?

Р е ш е н и е. При рассмотрении указанных точек создается впечатление, что они лежат на одной прямой. Попытаемся проверить это рассуждением. Точки Z_1, Z_2, Z_3 тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда

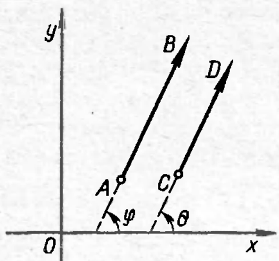


Рис. 15

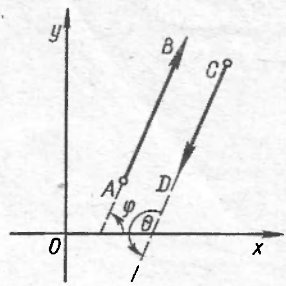


Рис. 16

векторы $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ и $\overrightarrow{Z_2Z_3}$ коллинеарны, а это будет лишь в том случае, когда отношение их комплексных координат z и w представляет собой действительное число. Но $z = z_2 - z_1 = 5 + 8i$, $w = z_3 - z_2 = 8 + 13i$ и $\dfrac{w}{z} = \dfrac{8+13i}{5+8i} =$

$$= \frac{(8+13i)(5-8i)}{(5+8i)(5-8i)} = \frac{144+i}{89}.$$

А это — не действительное число. Значит, точки Z_1, Z_2, Z_3 расположены не на одной прямой. Нетрудно найти угол α между векторами $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ и $\overrightarrow{Z_2Z_3}$: $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{1}{144}$, находим (например, с помощью микрокалькулятора), что $\alpha = 0°24'$.

4. Однажды юным следопытам попалась такая запись: «*Я, пират Кид, по прозвищу Математик, закопал клад на большой лесной поляне, где растут березка B, старый дуб D, и на расстоянии около пятидесяти метров от него большая сосна C. Точку B я мысленно повернул вокруг дуба D на 90° против направления движения Солнца, а относительно сосны на 90° по направлению*

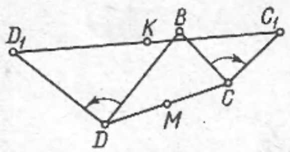


Рис. 17

движения Солнца. В результате получил две точки: D_1 и C_1, середину K отрезка D_1C_1 я выбрал местом для клада.» Ребята разыскали поляну и с помощью комплексных чисел обнаружили клад. Как они это сделали?

Р е ш е н и е. Будем считать, что точки B, C, D, C_1, D_1 и K (рис. 17) заданы на координатной плоскости и b, c, d, c_1, d_1 и k — их координаты. Тогда $d_1-d=i(b-d)$, $c_1-c=-i(b-c)$, $k=\frac{1}{2}(c_1+d_1)$, откуда $k=\frac{1}{2}(c+d)+$ $+i\frac{c-d}{2}$. Число $m=\frac{1}{2}(c+d)$ — это координата середины M отрезка DC, а число $p=\frac{1}{2}(c-d)$ — координата вектора $\overrightarrow{MC}$. Так как $k-m=ip$, то ясно, что точку K получим из точки C, если последнюю повернуть вокруг точки M в положительном направлении («против направления движения Солнца») на 90°.

5. На сторонах треугольника $A_1A_2A_3$ (рис. 18) построены квадраты, не имеющие с треугольником общих внутренних точек, и отмечены их центры B_1, B_2, B_3. Проверим справедливость соотношений: $B_1B_2=A_3B_3$, $B_1B_2\perp$ $\perp A_3B_3$.

Р е ш е н и е. Выберем в плоскости треугольника декартову систему координат xOy. Комплексные координаты точек A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 и векторов $\overrightarrow{B_1B_2}$ и $\overrightarrow{A_3B_3}$ обозначим соответственно через a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, z и w. Выразим z и w через a_1, a_2, a_3. Имеем: $z=b_2-b_1$, $w=$ $=b_3-a_3$. Для нахождения b_2 отметим середину C_2 отрезка A_1A_3 и обозначим ее комплексную координату через c_2. Тогда $c_2=\frac{a_1+a_3}{2}$. Вектор $\overrightarrow{C_2A_3}$ имеет комплексную координату $a_3-c_2=\frac{1}{2}(a_3-a_1)$. Вектор $\overrightarrow{C_2B_2}$ получается из вектора $\overrightarrow{C_2A_3}$ поворотом на $+\frac{\pi}{2}$ радиан, поэтому комплексная координата вектора $\overrightarrow{C_2B_2}$ равна $\frac{1}{2}(a_3-a_1)i$. Используя пример 2 из § 4, найдем:

$$b_2=\frac{a_3+a_1}{2}+i\frac{a_3-a_1}{2}.$$

Аналогичные формулы для b_3 и b_1 можно написать, совершив в этой формуле круговую замену индексов (1 заменяется на 2, 2 — на 3, 3 — на 1). Получим:

$$b_3=\frac{a_1+a_2}{2}+i\frac{a_1-a_2}{2}.$$

Повторив эту операцию, получим:

$$b_1=\frac{a_2+a_3}{2}+i\frac{a_2-a_3}{2}.$$

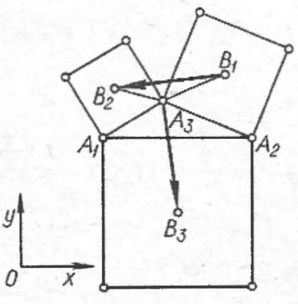


Рис. 18

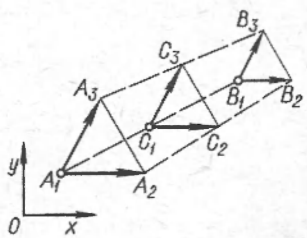


Рис. 19

Теперь нетрудно подсчитать, что

$$z=\frac{a_1-a_2}{2}+i\frac{2a_3-a_1-a_2}{2},\quad w=\frac{a_2+a_1-2a_3}{2}+i\frac{a_1-a_2}{2}.$$

Отсюда видно, что $w=iz$. Это означает, что при повороте вектора $\overrightarrow{B_1B_2}$ на 90° против часовой стрелки получим вектор $\overrightarrow{B_1B_2'}$, причем $\overrightarrow{B_1B_2'}=\overrightarrow{A_3B_3}$. Но в таком случае $A_3B_3=B_1B_2$, $A_3B_3\perp B_1B_2$.

6. Вершины каждого из двух правильных треугольников (рис. 19) пронумерованы против часовой стрелки. Вершины с одинаковыми номерами соединены отрезками. Докажем, что середины этих отрезков являются вершинами некоторого правильного треугольника (который может выродиться в точку).

Решение. Пусть $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ — данные треугольники (рис. 19), C_1, C_2, C_3 — середины отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, a_k, b_k, c_k $(k=1, 2, 3)$ — комплексные координаты рассматриваемых девяти точек. Тогда вектор $\overrightarrow{A_1A_3}$ имеет комплексную координату a_3-a_1, а вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ — комплексную координату a_2-a_1. Так как треугольник $A_1A_2A_3$ — правильный, то вектор $\overrightarrow{A_1A_3}$ может быть получен из вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ поворотом на $\frac{\pi}{3}$ радиан против движения часовой стрелки, поэтому $a_3-a_1=e^{i\frac{\pi}{3}}(a_2-a_1)$. Аналогично получим:

$$b_3-b_1=e^{i\frac{\pi}{3}}(b_2-b_1).$$

Так как C_1 — середина отрезка A_1B_1, то $c_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$.

Аналогично $c_2=\frac{1}{2}(a_2+b_2)$, $c_3=\frac{1}{2}(a_3+b_3)$. Из полученных соотношений следует, что

$$c_3-c_1=e^{i\frac{\pi}{3}}(c_2-c_1).$$

Но это означает, что вектор $\overrightarrow{C_1C_3}$ может быть получен из вектора $\overrightarrow{C_1C_2}$ с помощью поворота на угол $+\frac{\pi}{3}$ радиан, т. е. $\triangle C_1C_2C_3$ — правильный.

7. В равнобедренном треугольнике ACB (рис. 20) из его вершины проведена высота CD, в треугольнике CBD — высота DK. Середина M отрезка DK соединена с вершиной C. Докажем, что отрезки CM и AK взаимно перпендикулярны.

Решение. Пусть DB — ось абсцисс, DC — ось ординат. D имеет комплексную координату 0. Обозначим комплексные координаты точек A, B, C, K, M и векторов $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{MC}$ соответственно a, b, c, k, m, z и w. Тогда $w = c - m$, $z = k - a = k + b (a = -b)$. $\overrightarrow{DC}$ получим из $\overrightarrow{DB}$ поворотом на угол $+\frac{\pi}{2}$ радиан и растяжением с коэффициентом, который мы обозначим через ρ. Поэтому $c = b\rho i$. Так как $\triangle DBK \backsim \triangle CBD$, то $\frac{DK}{KB} = \frac{DC}{DB} = \rho$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{DK}$ (его координата равна k) получаем из вектора $\overrightarrow{KB}$ (его координата $b-k$) поворотом на угол $+\frac{\pi}{2}$ радиан и растяжением с коэффициентом ρ, то есть $k=(b-k)i\rho$, откуда

$$k = \frac{b\rho i}{1+i\rho} \quad \text{и} \quad m = \frac{k}{2} = \frac{b\rho i}{2(1+i\rho)}.$$

Поэтому $w = c - m = b\rho i - \frac{b\rho i}{2(1+i\rho)} = \frac{ib\rho(1+2\rho i)}{2(1+i\rho)}$, $z = k + b = \frac{b\rho i}{1+\rho i} + b = \frac{b(1+2\rho i)}{1+i\rho}$. $\frac{w}{z} = \frac{i\rho}{2}$.

Итак $w = \left(\frac{1}{2}\rho i\right)\cdot z$. А это означает, что $MC \perp AK$.

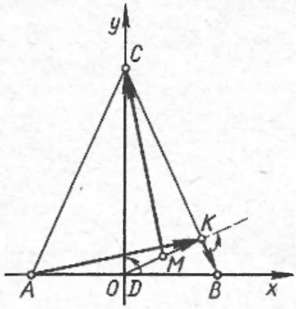


Рис. 20

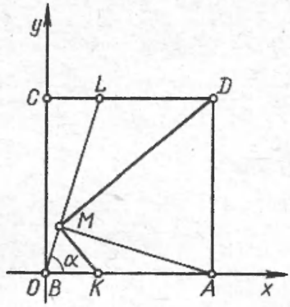


Рис. 21

Проиллюстрируем метод комплексных координат еще на двух примерах.

8. Имеется квадрат $ABCD$, длина стороны которого равна 1. На его сторонах AB и CD взяты точки K и L так, что $BK=CL=\lambda$. Из точки A опущен перпендикуляр AM на BL. Найдем угол KMD и отношение $DM:KM$ (рис. 21).

Решение. Имеем:

$$m=\cos\alpha\cdot e^{i\alpha},\quad k=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Пусть z и w — координаты векторов MK и MD. Тогда

$$\frac{w}{z}=\frac{1+i-\cos\alpha\cdot e^{i\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha-\cos\alpha\cdot e^{i\alpha}}=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}\cdot\frac{(1-\cos^2\alpha+i(1-\cos\alpha\cdot\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha\cos\alpha)-i\sin^2\alpha},$$

$$\frac{w}{z}=i\operatorname{tg}\alpha.$$

Отсюда следует: $DM\perp MK$ и $DM:MK=\operatorname{tg}\alpha=\lambda$.

*** 9.** Вне треугольника ABC взяты точки P и Q так, что треугольники APB и BQC прямоугольные, с прямыми углами в точках P и Q, а величины углов PAB и BCQ

равны φ. Требуется найти углы треугольника PQR, где R — середина отрезка AC (рис. 22).

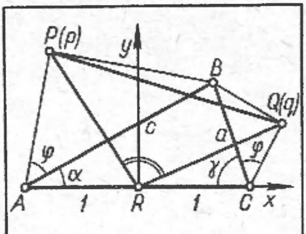


Рис. 22

Решение. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы точка R была ее началом, а луч RC — положительным лучом оси абсцисс. Без потери общности можно считать, что отрезок RC имеет длину 1. Тогда комплексные координаты точек C и A равны соответственно 1 и -1, а для точек Q и P имеем (ниже a и c — длины сторон BC и BA, α и γ — противолежащие им углы); $q-1=$ $=a\cos\varphi\cdot e^{i(\pi-\gamma-\varphi)}$, $p+1=c\cos\varphi\cdot e^{i(\alpha+\varphi)}$. Так как по теореме синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{2}{\sin(\alpha+\gamma)},$$

то

$$p=\frac{2\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}\cos\varphi e^{i(\alpha+\varphi)}-1,$$

$$q=-\frac{2\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}\cos\varphi e^{i(\gamma+\varphi)}+1.$$

Преобразуем p и q:

$$p=e^{i\varphi}\frac{1}{\sin(\alpha+\gamma)}(2\sin\gamma\cos\varphi e^{i\alpha}-\sin(\alpha+\gamma)\,e^{-i\varphi})=$$

$$=e^{i\varphi}\frac{1}{\sin(\alpha+\gamma)}((2\sin\gamma\cos\alpha-\sin(\alpha+\gamma))\cos\varphi+$$

$$+i\,(2\sin\gamma\cos\varphi\sin\alpha+\sin(\alpha+\gamma)\sin\varphi)),$$

$$q=-e^{-i\varphi}\frac{1}{\sin(\alpha+\gamma)}((2\sin\alpha\cos\gamma-\sin(\alpha+\gamma))\times$$

$$\times\cos\varphi-i\,(2\sin\alpha\sin\gamma\cos\varphi+\sin(\alpha+\gamma)\sin\varphi)).$$

Учитывая, что

$$2\sin\gamma\cos\alpha - \sin(\alpha+\gamma) = \sin(\gamma-\alpha),$$
$$2\sin\alpha\cos\gamma - \sin(\alpha+\gamma) = -\sin(\gamma-\alpha),$$

Получаем:

$$\frac{p}{q} = e^{i2\varphi}.$$

Следовательно, $\triangle PRQ$ — равнобедренный и $\angle QRP = 2\varphi$. Затем уже легко найти, что каждый из двух других углов составляет $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

Упражнения

10.1. При обходе против часовой стрелки правильного треугольника встречаются последовательно вершины Z_1, Z_2, Z_3 с комплексными координатами z_1, z_2, z_3. Известно, что $z_1 = 1$, $z_2 = 2 + i$. Вычислите z_3.

10.2. Известно, что вершины треугольника OAB имеют комплексные координаты соответственно 0; $2+2i$; $(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$. Докажите, что $\triangle OAB$ — равнобедренный с углом при вершине 30°.

10.3. На двух сторонах AB и AC треугольника ABC как на основаниях построены квадраты ABB_1B_2 и ACC_1C_2, перекрывающиеся с треугольником ABC. Верно ли, что отрезок B_2C_2 перпендикулярен медиане AM треугольника ABC? Во сколько раз отрезок B_2C_2 длиннее отрезка AM?

10.4. На сторонах четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ как на гипотенузах построены перекрывающиеся с ним равнобедренные прямоугольные треугольники $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, $A_3B_3A_4$, $A_4B_4A_1$ (прямые углы при вершинах B_1, B_2, B_3, B_4). Если совпадут вершины B_1 и B_3, то совпадут и вершины B_2 и B_4. Докажите это.

10.5. На сторонах параллелограмма $A_1A_2A_3A_4$ (вершины указаны в порядке их следования при движении против часовой стрелки) как на основаниях построены не перекрывающиеся с ним квадраты и обозначены их центры Z_1, Z_2, Z_3, Z_4. Верно ли, что $Z_1Z_2Z_3Z_4$ — квадрат?

10.6. Четырехугольник $ABCD$ повернут около некоторой точки O, лежащей в его плоскости, на угол $+\frac{\pi}{2}$ в положение $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что если точки P, Q, R и S — середины отрезков A_1B, B_1C, C_1D, D_1A, то отрезки PR и QS равны и взаимно перпендикулярны.

10.7. В квадрате $ABCD$ точка O — его центр, а M и K — середины отрезков BO и CD. Верно ли, что $\triangle AMK$ равнобедренный и прямоугольный?

10.8. На двух сторонах AB и BC треугольника ABC как на основаниях построены квадраты, не имеющие с треугольником общих внутренних точек. Проверьте, являются ли вершинами равнобедренного прямоугольного треугольника центры этих двух квадратов и середина третьей стороны.

10.9. На двух сторонах AB и AC треугольника ABC как на основаниях построены квадраты $ABNQ$ и $ACMP$, не имеющие с треугольником ABC общих внутренних точек. Проверьте: отрезки BP и CQ равны и взаимно перпендикулярны.

*** 10.10.** Если на двух сторонах параллелограмма, исходящих из одной вершины, построить (не перекрывающиеся с ним) правильные треугольники, то противоположная вершина параллелограмма и свободные вершины треугольников образуют правильный треугольник. Докажите это.

*** 10.11.** Про выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ известно, что он имеет центр симметрии. На его сторонах AB, CD, EF как на основаниях построены правильные треугольники APB, CQD, ERF, которые не перекрываются с шестиугольником (не имеют с ним общих внутренних точек). Будет ли $\triangle PQR$ правильным?

*** 10.12.** На сторонах A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 произвольного плоского четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ как на основаниях построены правильные треугольники, не перекрывающиеся с четырехугольником. Пусть их вершины B_1, B_2, B_3, B_4. Пусть M и N — середины отрезков B_1B_3 и B_2B_4, а P и Q — середины диагоналей A_1A_3 и A_2A_4. Являются ли эти четыре точки вершинами квадрата (быть может, вырождающегося в точку)?

§ 11. Комплексные числа в геометрических построениях

Применение комплексных чисел облегчает решение трудных задач на построение (с помощью циркуля и линейки или другого заданного набора инструментов). Суть приема заключается в том, что мы сводим задачу к построению какой-либо точки, а комплексную координату этой точки выражаем формулой через величины, которые можно считать известными (например, через комплексные координаты данных точек). По полученной формуле строим искомую точку. Целесообразно применять этот прием в задачах, где речь идет о поворотах.

Примеры

1. На сторонах некоторого треугольника ABC как на основаниях были построены правильные треугольники ADB, BEC, CFA, не имеющие с ним общих внутренних точек (рис. 23). После этого все четыре треугольника были стерты, а оставлены лишь три точки D, E, F. Рассмотрим способ, с помощью которого можно восстановить треугольник ABC, используя циркуль и линейку.

Решение. Для решения задачи достаточно, очевидно, построить хотя бы одну из точек A, B, C. Выберем на плоскости, на которой расположены шесть точек A, B, C, D, E, F, декартову систему координат. Пусть a, b, c, d,

e, f — комплексные координаты этих точек. Выразим a через d, e, f. Так как вектор $\overrightarrow{DB}$ получаем из вектора $\overrightarrow{DA}$ поворотом на угол $+\frac{\pi}{3}$ радиан, то

$$b-d=\lambda(a-d),\text{ где }\lambda=\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right). \tag{1}$$

Аналогично получим:

$$c-e=\lambda(b-e), \tag{2}$$

$$a-f=\lambda(c-f). \tag{3}$$

Из системы уравнений (1)—(3) найдем a. Для этого перепишем систему в таком виде:

$$\lambda a-b=(\lambda-1)d, \quad \Big|\ \lambda^2 \tag{4}$$

$$\lambda b-c=(\lambda-1)e, \quad \Big|\ \lambda \tag{5}$$

$$\lambda c-a=(\lambda-1)f. \quad \Big|\ 1 \tag{6}$$

Исключим b и c. Чтобы найти a, умножим (6) на 1, (5) — на λ, (4) — на λ^2 и полученные равенства сложим почленно. Учитывая, что $\lambda^3=-1$, получим:

$$-2a=(\lambda-1)(d\lambda^2+e\lambda+f).$$

Пусть точка D будет началом координат. Тогда $d=0$ и

$$a=\mu(f+\lambda e), \tag{7}$$

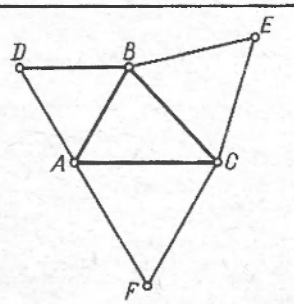


Рис. 23

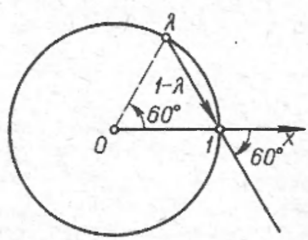


Рис. 24

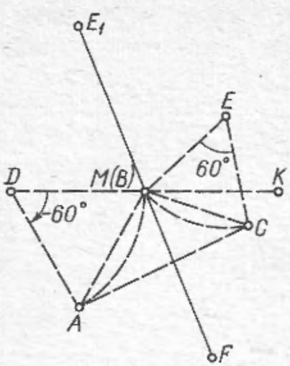


Рис. 25

где $\mu=\frac{1}{2}(1-\lambda)$.

Найдем аргумент и модуль числа μ. Из рисунка 24 ясно, что для числа $1-\lambda$ модуль равен 1, а аргумент равен $-\frac{\pi}{3}$. Значит,

$$\mu=\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\pi}{3}i\right). \quad (8)$$

Теперь из формул (7) и (8) понятен способ построения точки A. Строим (рис. 25) вектор с координатой λe (поворачиваем вектор $\overrightarrow{DE}$ на $60°$ в положительном направлении (против часовой стрелки). Полученный в результате поворота вектор $\overrightarrow{DE_1}$ складываем (по правилу параллелограмма) с вектором $\overrightarrow{DF}$ (получаем вектор $\overrightarrow{DK}$ с координатой $f+\lambda e$). Строим вектор $\overrightarrow{DM}$ такой, что $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DK}$. Вектор $\overrightarrow{DM}$ поворачиваем на $-\frac{\pi}{3}$ радиан (на $60°$ по часовой стрелке). Конец полученного вектора и будет искомой точкой A. Затем уже очевидно, как построить точки B и C.

Упражнения

***11.1.** Был начерчен некоторый пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ и отмечены середины его последовательных сторон: B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Затем пятиугольник был стерт, оставлены лишь точки B_k ($k=1, 2, 3, 4, 5$). Укажите способ, с помощью которого можно восстановить пятиугольник, используя циркуль и линейку.

***11.2.** На сторонах треугольника ABC выбраны точки P, Q, R так, что $AP=2PB$, $BQ=2QC$, $CR=2RA$. После этого треугольник был стерт, остались только три точки P, Q, R. Укажите способ, с помощью которого можно восстановить треугольник.

§ 12. Комплексные числа и центр масс

Пусть на плоскости выбраны несколько точек A_1, A_2, ..., A_n (рис. 26) и в них помещены массы m_1, m_2, ..., m_n (мы полагаем, что числа m_1, m_2, ..., m_n — действительные, $m_1+m_2+...+m_n\neq 0$). Возникшие в результате материальные точки обозначим так: m_1A_1, m_2A_2, ..., m_nA_n. *Центром масс* этой системы материальных точек называется такая точка C, для которой справедливо векторное равенство:

$$m_1\cdot\overrightarrow{CA_1}+m_2\cdot\overrightarrow{CA_2}+...+m_n\cdot\overrightarrow{CA_n}=\vec{0}\,. \tag{1}$$

Выберем на плоскости произвольно декартову систему координат, тогда точки A_1, A_2, ..., A_n, C приобретают комплексные координаты, которые обозначим буквами a_1, a_2, ..., a_n, c. Векторы $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{CA_2}$, ..., $\overrightarrow{CA_n}$ имеют комплексные координаты a_1-c, a_2-c, ..., a_n-c, а равенство (1) равносильно равенству:

$$m_1\cdot(c-a_1)+m_2(c-a_2)+...+m_n\cdot(c-a_n)=0, \tag{2}$$

откуда получаем формулу для комплексной координаты центра масс:

$$c=\frac{m_1a_1+m_2a_2+...+m_na_n}{m_1+m_2+...+m_n} \tag{3}$$

Из формул (2) — (3) следуют важные для приложений свойства центров масс.

1. *Каждая система материальных точек с ненулевой суммарной массой имеет центр масс и притом — единственный.*

2. *Центр двух положительных масс расположен на отрезке, который соединяет эти материальные точки, и*

Жозеф Луи ЛАГРАНЖ (1736—1813) — французский математик. Образование получил в высшем военном училище г. Турина, где в 18 лет стал преподавателем. По рекомендации Эйлера Лагранж в 23 года был избран членом Академии наук в Берлине, а в 30 лет стал ее президентом. Лагранж сыграл ведущую роль в разработке основных направлений математического анализа, механики (в частности, небесной механики), теории чисел. Он успешно применял комплексные числа в исследованиях по математическому анализу и картографии.

его положение удовлетворяет правилу рычага: $m_1 \cdot |a_1 - c| = m_2 \cdot |a_2 - c|$. Если массы не равны, то центр двух (положительных) масс ближе к большей из них.

3. *Если в системе материальных точек*

$$m_1A_1,\ m_2A_2,\ \ldots,\ m_kA_k,\quad m_{k+1}A_{k+1},\ \ldots,\ m_nA_n \qquad (4)$$

отобрать несколько материальных точек

$$m_1A_1,\ m_2A_2,\ \ldots,\ m_kA_k \qquad (5)$$

и сконцентрировать их суммарную массу в их центре масс C', то от *этого положение центра масс всей системы* (4) *не изменится.*

Иными словами, система материальных точек

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_k)C',\quad m_{k+1}A_{k+1},\ \ldots,\ m_nA_n \qquad (6)$$

имеет тот же центр масс, что и система (4). Как для механики, так и для геометрии полезна теорема Лагранжа о моментах инерции. Пусть на плоскости имеется материальная точка mA и точка S. Эйлер назвал *моментом инерции материальной точки* mA относительно точки S величину $m \cdot SA^2$. *Моментом инерции системы материальных точек* (4) относительно точки S Эйлер назвал такую сумму: $I_S = m_1 \cdot SA_1^2 + m_2 \cdot SA_2^2 + \ldots + m_n \times \times SA_n^2$. Оказывается, что если известен момент инерции системы материальных точек (4) относительно ее центра масс, то легко найти ее момент инерции относительно любой другой точки S.

Теорема Лагранжа. *Момент инерции I_S системы материальных точек*

$$m_1A_1,\ m_2A_2,\ \ldots,\ m_nA_n$$

относительно произвольной точки S может быть выражен через момент инерции той же системы относительно ее центра масс I_C по формуле $I_S = I_C + M \cdot SC^2$, где M — суммарная масса системы (5), *то есть $M = m_1 + \ldots + m_n$.*

Доказательство. Для конкретности ограничимся случаем трех материальных точек, лежащих в одной плоскости. Выберем на плоскости декартову систему координат.

Пусть точки A_1, A_2, A_3, C, S имеют комплексные координаты a_1, a_2, a_3, c, s. Тогда

$$I_S = m_1|s-a_1|^2 + m_2|s-a_2|^2 + m_3|s-a_3|^2, \qquad (7)$$

$$I_C = m_1|c-a_1|^2 + m_2|c-a_2|^2 + m_3|c-a_3|^2 \qquad (8)$$
$$M \cdot c = m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_2 + m_3 \cdot a_3.$$

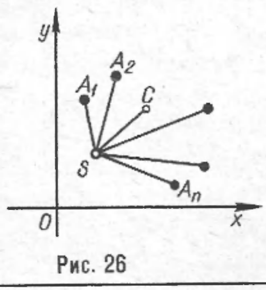


Рис. 26

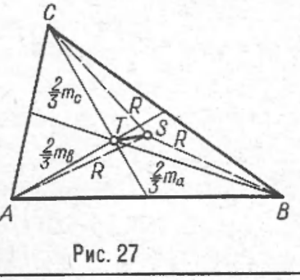


Рис. 27

Так как

$$SA_1^2=|s-a_1|^2=(s-a_1)(\bar{s}-\bar{a}_1)=((s-c)+(c-a_1))((\bar{s}-\bar{c})+$$
$$+(\bar{c}-\bar{a}_1))=|s-c|^2+|c-a_1|^2+(\bar{s}-c)(c-a_1)+$$
$$+(s-c)(c-\bar{a}_1), \qquad (9)$$

то $$m_1\cdot SA_1^2=m_1SC^2+m_1CA_1^2+(\bar{s}-\bar{c})(m_1c-m_1a_1)+$$
$$+(s-c)(m_1\bar{c}-m_1\bar{a}_1).$$

Аналогично имеем:

$$m_2\cdot SA_2^2=m_2SC^2+m_2CA_2^2+(\bar{s}-\bar{c})(m_2c-m_2a_2)+$$
$$+(s-c)(m_2\bar{c}-m_2\bar{a}_2),$$
$$m_3\cdot SA_3^2=m_3SC^2+m_3CA_3^2+(\bar{s}-\bar{c})(m_3c-m_3a_3)+$$
$$+(s-c)(m_3\bar{c}-m_3\bar{a}_3).$$

Складывая последние три равенства почленно и учитывая равенства (3), (7) — (8), получим:

$$I_S=M\cdot SC^2+I_C.$$

Упражнения

12.1. Пусть в $\triangle ABC$ известны медианы m_a, m_b, m_c и радиус R описанной окружности. Вычислите расстояние между центром этой окружности и точкой пересечения медиан (рис. 27).

12.2. В окружность радиуса R вписан правильный треугольник ABC. По окружности перемещается точка P так, что постоянно меняются ее расстояния от вершин треугольника. Будет ли при этом изменяться сумма квадратов ее расстояний от этих вершин?

12.3. Зная длины a, b, c сторон треугольника ABC, вычислите длины его биссектрис.

12.4. Выведите теорему Лейбница (см. упражнение 6.6) из теоремы Лагранжа.

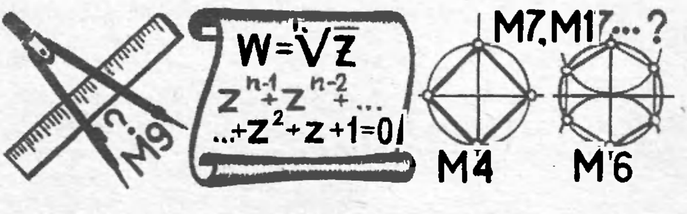
II

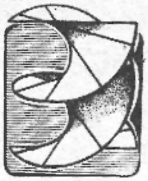
ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ГЕОМЕТРИИ И ТЕОРИИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Занимался исследованиями по теории рядов и дифференциальным уравнениям, изучал вопросы теоретической физики, разработал методы вычислительной математики. Почти во всех исследованиях применял комплексные числа.

Современная наука не могла, конечно, остановиться на образовании этих понятий, ибо наука как таковая не знает отдыха, и только тот или иной исследователь может прийти в изнеможение.

Ф. КЛЕЙН





В этой главе мы рассмотрим более сложные задачи, которые решаются с применением комплексных чисел. Мы увидим, как с помощью комплексных чисел могут быть доказаны некоторые классические теоремы геометрии, например теорема Птолемея. На языке комплексных чисел будет изложена аналитическая геометрия прямых и окружностей, освещена идея Гаусса решения с помощью комплексных чисел многовековой проблемы о возможности построения правильных многоугольников. Мы убедимся, что поиску целочисленных решений неопределенных уравнений помогают мнимые числа.

§ 13. Прямые на комплексной плоскости

На декартовой плоскости каждая прямая может быть задана уравнением:

$$ax+by+c=0, \quad \text{где } a^2+b^2\neq 0. \tag{1}$$

Нетрудно записать то же уравнение прямой в комплексной форме. Для этого достаточно ввести комплексное переменное $z=x+y\cdot i$ и вспомнить (см. § 3), что $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y=-\frac{i}{2}(z-\bar{z})$. Тогда (1) приобретает вид:

$$\frac{1}{2}(a-bi)z+\frac{1}{2}(a+bi)\bar{z}+c=0.$$

Обозначим комплексное число $\frac{1}{2}(a-bi)$ через α. Тогда $\frac{1}{2}(a+bi)=\bar{\alpha}$, и уравнение прямой приобретают вид:

$$\alpha z+\bar{\alpha}\bar{z}=\beta, \tag{2}$$

где α — комплексное число, $\alpha\neq 0$, а β — действительное. Например, уравнение $(1-i)z+(1+i)\bar{z}=3$ задает такую прямую: $(1-i)(x+yi)+(1+i)(x-yi)=3$, то есть $x+$

$+y=\frac{3}{2}$. С помощью комплексных переменных удобно записать уравнение прямой, проходящей через две данные точки Z_1 и Z_2. В самом деле, при любом выборе точки Z на прямой Z_1Z_2 векторы $\overrightarrow{Z_1Z}$ и $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ коллинеарны, поэтому отношение их комплексных координат $(z-z_1)/(z_2-z_1)$ выражается действительным числом, откуда:

$$(\bar{z}_2-\bar{z}_1)z-(z_2-z_1)\bar{z}=$$
$$=z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1. \qquad (3)$$

Это и будет уравнение прямой, проходящей через точки Z_1 и Z_2.

Напишем уравнение прямой MN, которая проходит через данную точку Z_0 и параллельна заданному вектору PQ (рис. 28). Будем полагать, что этот вектор задан своей комплексной координатой c. Тогда при любом выборе точки Z на прямой MN вектор $\overrightarrow{Z_0Z}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{PQ}$, следовательно, отношение их комплексных координат выражается действительным числом. Иначе говоря, комплексная координата каждой точки Z прямой удовлетворяет условию:

Карл Фридрих ГАУСС (1777—1855) — один из крупнейших математиков XIX в. Еще в детские годы проявил исключительные способности к математике и языкознанию. Гаусс учился в Гёттингенском университете, где позднее был директором обсерватории и руководил кафедрой математики. В 1799 г. Гаусс доказал основную теорему алгебры о том, что при $n\geqslant1$ многочлен n-й степени имеет хотя бы один комплексный корень. В 1809 г. Гаусс разработал способ, позволивший по трем наблюдениям восстановить орбиту малой планеты Цереры. В связи с потребностями астрономии Гаусс занимался также важными исследованиями по теории рядов и дифференциальным уравнениям. В 1830—1840 г. он разрабатывал вопросы теоретической физики (магнитные явления, оптика). Гаусс изобрел электрический телеграф, разработал методы вычислительной математики. Почти во всех своих работах по алгебре, теории чисел, теории функций, теории поверхностей Гаусс применял комплексные числа.

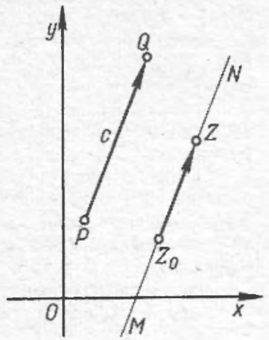


Рис. 28

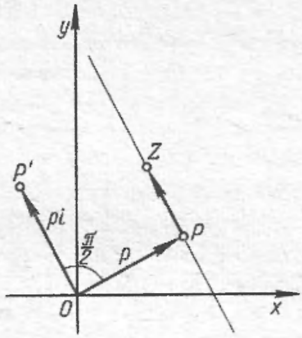


Рис. 29

$$\frac{z}{c}-\frac{\bar{z}}{\bar{c}}=\frac{z_0}{c}-\frac{\bar{z}_0}{\bar{c}}.$$

Это и будет искомое уравнение прямой. Заметим, что число $\left(\frac{z_0}{c}\right)-\left(\frac{\bar{z}_0}{\bar{c}}\right)$ чисто мнимое и его можно записать в виде bi, где b — действительная константа. Получаем:

$$\frac{z}{c}-\frac{\bar{z}}{\bar{c}}=bi. \qquad (4)$$

Уравнением вида (4) может быть задана любая прямая. При этом $\arg c$ — угол наклона прямой к действительной оси. Понятно, что уравнение (4) всегда можно привести к виду (3), и наоборот.

Остановимся на уравнении прямой, проходящей через данную точку P *перпендикулярно* вектору $\overrightarrow{OP}$, где O — нулевая точка (рис. 29). Пусть Z — произвольная точка этой прямой. Тогда вектор $\overrightarrow{PZ}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{OP'}$ с комплексной координатой $p\cdot i$. Поэтому

$(z-p)/(pi)$ — действительное число и, следовательно, равно сопряженному с ним числу: $\dfrac{z-p}{pi}=\dfrac{\bar{z}-\bar{p}}{-\bar{p}i}$, то есть

$$\frac{z}{p}+\frac{\bar{z}}{\bar{p}}=2. \tag{5}$$

Это и есть уравнение прямой, проходящей через точку P перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{OP}$.

Чтобы найти комплексную координату точки пересечения двух прямых $\alpha z+\bar{\alpha}\bar{z}=\beta$ и $\alpha_1 z+\bar{\alpha}_1\bar{z}=\beta_1$, нужно решить систему из этих двух уравнений и найти z (или $\bar{z}$).

Примеры

1. Из точки z_1 опущен перпендикуляр на прямую

$$\alpha z+\bar{\alpha}\bar{z}=b. \tag{6}$$

Найдем комплексную координату основания перпендикуляра и длину этого перпендикуляра.

Решение. Уравнение прямой можно переписать так: $i\alpha z-(\bar{i}\cdot\bar{\alpha})\bar{z}=bi$, или

$$\frac{z}{\gamma}-\frac{\bar{z}}{\bar{\gamma}}=bi, \quad \text{где } \gamma=\frac{1}{\alpha i}.$$

Из этой записи следует (см. (4)), что данная прямая параллельна вектору с комплексной координатой γ; поэтому прямая, проходящая через точку z_1 перпендикулярно к данной прямой, параллельна вектору с комплексной координатой $\delta=i\gamma$; следовательно, ее уравнение (см. (3)) будет: $\dfrac{z-z_1}{\delta}=\dfrac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{\delta}}$.

После элементарных преобразований получаем:

$$\alpha z-\bar{\alpha}\bar{z}=\alpha z_1-\bar{\alpha}\bar{z}_1. \tag{7}$$

Решая систему уравнений (6) и (7) относительно z и $\bar{z}$, получим, что координата z_0 основания перпендикуляра удовлетворяет условию:

$$2\alpha z_0 = b + \alpha z_1 - \bar{\alpha}\bar{z}_1,$$

$$z_0 = \frac{b + \alpha z_1 - \bar{\alpha}\bar{z}_1}{2\alpha}. \qquad (8)$$

Длина рассматриваемого перпендикуляра равна

$$|z_1 - z_0| = \frac{|\alpha z_1 + \bar{\alpha}\bar{z}_1 - b|}{2|\alpha|}.$$

§ 14. Окружность на комплексной плоскости

Окружность с центром в точке C и радиусом R — это множество всех тех точек Z, для которых расстояние CZ равно R, то есть

$$|z - c| = R. \qquad (1)$$

Это и есть *уравнение окружности*. Равенство (1) можем переписать так:

$$(z - c)(\bar{z} - \bar{c}) = R^2,$$
$$z \cdot \bar{z} - \bar{c}z - c\bar{z} + |c|^2 - R^2 = 0,$$

то есть уравнение каждой окружности имеет вид:

$$z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \gamma = 0, \qquad (2)$$

где α — комплексное число, а γ — действительное. Однако уравнение вида (2) не при каждом γ задает окружность. Действительно, мы можем уравнение (2) записать так:

$$|z + \bar{\alpha}|^2 = |\alpha|^2 - \gamma, \qquad (3)$$

а это уравнение задает окружность лишь при условии, что $\gamma < |\alpha|^2$. При $\gamma = |\alpha|^2$ уравнению (2) удовлетворяет лишь одна точка $z = -\bar{\alpha}$, а при $\gamma > |\alpha|^2$ — ни одно комплексное число z не удовлетворяет равенству (3), то есть вовсе не существует точек, удовлетворяющих условию (2).

Особенно удобно записывать в комплексной форме уравнение окружности Г, проходящей через три данные точки Z_1, Z_2, Z_3. Выведем это уравнение. Точки Z_1 и Z_2 (рис. 30) делят окружность на дуги Г′ и Г″. Пусть Г′ — та из них, которая возникает при движении от Z_1 к Z_2 в положительном направлении (против часовой стрелки). Будем считать, что Г′ — дуга, не содержащая точку Z_3, а дуга Г″ содержит Z_3. Радианную меру дуги Г′ обозначим через 2φ. Тогда $\angle Z_1Z_3Z_2=\varphi$, и вектор $\overrightarrow{Z_3Z_2}$ может быть получен из вектора $\overrightarrow{Z_3Z_1}$ поворотом на угол φ с последующим растяжением. Поэтому

$$\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}=te^{i\varphi}, \tag{4}$$

где t — действительное (даже положительное) число. Для каждой фиксированной точки Z, лежащей на дуге Г″, имеем аналогичное равенство:

$$\frac{z_2-z}{z_1-z}=t_1e^{i\varphi}, \tag{5}$$

где t_1 — положительное число. Если же точка Z расположена на дополнительной дуге Г′, то угол Z_1ZZ_2 содер-

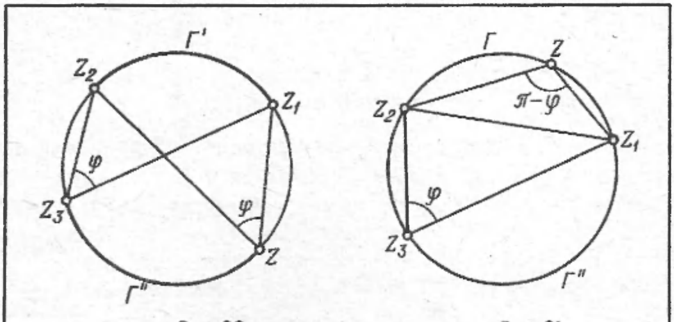


Рис. 30 Рис. 31

жит $\pi-\varphi$ радиан, причем проходится в отрицательном направлении (рис. 31). Поэтому

$$\frac{z_2-z}{z_1-z}=t_2e^{-i(\pi-\varphi)}=-t_2\cdot e^{i\varphi}, \tag{6}$$

где t_2 — положительное число.

Из (4) и (5) — (6) видим, что при *любом* выборе точки Z на окружности Γ дробь

$$\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

является действительным числом, а это значит, что она равна сопряженной с ней дроби:

$$\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{z}-\bar{z}_2}:\frac{\bar{z}_3-\bar{z}_1}{\bar{z}_3-\bar{z}_2}. \tag{7}$$

Это и есть *уравнение окружности, проходящей через три заданные точки* Z_1, Z_2, Z_3. В том случае, когда точки Z_1, Z_2, Z_3 лежат на одной прямой, окружности, проходящей через эти три точки, не существует, но уравнение (7) имеет и в этом случае смысл: оно задает эту прямую.

Упражнение

14.1. Напишите (в комплексной форме) уравнение окружности, проходящей через точки 0, -2, $1+i$.

§ 15. Геометрические задачи, решаемые с помощью единичной окружности

Единичной окружностью в комплексном анализе принято называть окружность, у которой центром является нулевая точка (начало координат), а длина радиуса равна единице. На ней, очевидно, расположены те и только те точки плоскости, чьи комплексные координаты z удовлетворяют условию $|z|=1$. Это условие можно переписать и так: $|z|^2=1$, т. е. $z\cdot\bar{z}=1$, или $\bar{z}=\frac{1}{z}$. Таким образом, для координаты z точки единичной окружности (и только для координаты такой точки) число сопряженное ($\bar{z}$) совпадает с числом обратным $\left(\frac{1}{z}\right)$. Такой простой переход позволяет упростить многие выкладки.

Если мы имеем на плоскости произвольную окружность ω с центром в некоторой точке O и радиуса R, то можно выбрать декартову систему координат так, чтобы началом координат был центр O этой окружности. Тогда координаты z точек окружности будут задаваться условием $|z|=R$, или $\bar{z}=\frac{R^2}{z}$. Поэтому выкладки, связанные с такой окружностью, тоже просты. При необходимости можем от такой окружности перейти к единичной с помощью гомотетии с центром в точке O. Аналитически это означает замену переменных: $z=Rz_1$.

Если точка Z лежит на окружности радиуса R, имеющей центром нулевую точку, и если радиус-вектор точки Z образует с действительной осью угол t, то комплексная координата z точки Z задается формулой

$$z=Re^{it}.$$

Эти простые соображения позволяют решить разнообразные задачи, связанные с окружностью с центром в нулевой точке.

Примеры

1. Пусть AB и CD — две параллельные хорды единичной окружности. Докажем, что тогда для комплексных координат концов этих хорд имеет место равенство

$$ab=cd. \tag{1}$$

Р е ш е н и е. В силу условия векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, поэтому для получения вектора, равного вектору $\overrightarrow{CD}$, из вектора $\overrightarrow{AB}$ над последним следует выполнить только растяжение (или сжатие) и либо совсем не выполнять поворот (если $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ одинаково направлены), либо выполнить поворот на π радиан (если они противоположно направлены). Поэтому отношение комплексных координат этих векторов $(b-a)/(d-c)$ должно быть действительным числом. Но тогда справедливо равенство

$$\frac{b-a}{d-c}=\overline{\left(\frac{b-a}{d-c}\right)},$$

то есть,

$$\frac{b-a}{d-c}=\frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{d}-\bar{c}}.$$

Так как a, b, c, d — координаты точек на единичной окружности, то $\bar{a}=\frac{1}{a}$, ..., $\bar{d}=\frac{1}{d}$, и мы получаем:

$$(b-a):(d-c)=\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right):\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{c}\right),$$

что приводит к равенству (1). Повторяя те же рассуждения в обратном порядке, можно убедиться, что условие (1) не только необходимо, но и достаточно для параллельности прямых AB и CD.

2. Какая должна быть связь между координатами точек A, B, C, лежащих на единичной окружности, чтобы касательная к окружности в точке C была параллельна хорде AB?

Решение. Выберем на окружности две точки C_1 и D_1 (рис. 32) так, чтобы хорда C_1D_1 была параллельна хорде AB. Тогда

$$ab=c_1d_1. \tag{2}$$

Пусть теперь точки C_1 и D_1 неограниченно приближаются к точке C, но так, что хорда C_1D_1 остается параллельной хорде AB. В пределе хорда C_1D_1 выродится в касательную и $c_1\to c$, $d_1\to c$. Поэтому из (2) получим искомое условие:

$$ab=c^2. \tag{3}$$

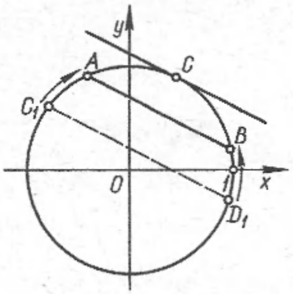


Рис. 32

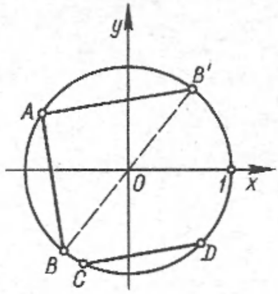


Рис. 33

Этот факт легко установить иначе, если обратить внимание на то, что C — середина дуги AB.

3. Как должны быть связаны между собой координаты a, b, c, d концов хорд AB и CD единичной окружности, чтобы эти хорды были взаимно перпендикулярны (рис. 33)?

Решение. Обозначим через B' точку, симметричную точке B относительно центра единичной окружности (рис. 33). Тогда $\triangle BAB'$ — прямоугольный, поэтому $AB' \perp AB$. Следовательно, тогда и только тогда $AB \perp CD$, когда $AB' \| CD$, то есть когда $ab' = cd$. Но $b' = -b$. Поэтому получаем условие перпендикулярности: $a \cdot (-b) = -cd$, $ab + cd = 0$.

4. Из точки C, лежащей на единичной окружности, опущен перпендикуляр CZ на хорду AB. Зная комплексные координаты точек A, B, C (рис. 34), найдем координату основания перпендикуляра Z.

Решение. Сначала найдем координату точки D (рис. 34) встречи прямой CZ с окружностью. В силу решения примера 3 имеем: $ab + cd = 0$, $d = -\frac{ab}{c}$. Очевидно,

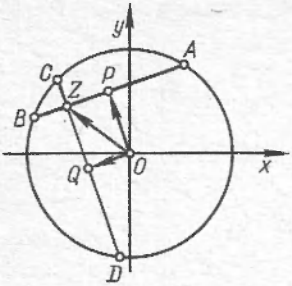


Рис. 34

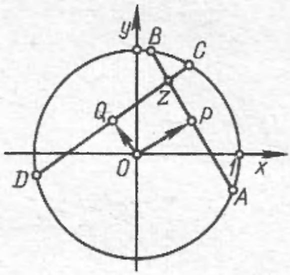


Рис. 35

$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$, где P и Q — середины хорд AB и CD. Поэтому $z=p+q$, $p=\frac{1}{2}(a+b)$, $q=\frac{1}{2}(c+d)$,

$$z=\frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{ab}{c}\right).$$

Эта формула позволяет найти комплексную координату точки пересечения двух взаимно перпендикулярных хорд.

5. Найдем координату точки пересечения двух хорд AB и CD единичной окружности (рис. 35).

Решение. Пусть P и Q — середины этих хорд. Тогда $p=\frac{1}{2}(a+b)$, $q=\frac{1}{2}(c+d)$, и прямые AB и CD имеют уравнения (см. § 13, формула (5)):

$$\frac{z}{a+b}+\frac{\bar{z}}{\bar{a}+\bar{b}}=1, \quad \frac{z}{c+d}+\frac{\bar{z}}{\bar{c}+\bar{d}}=1.$$

Решим систему этих двух уравнений, исключив $\bar{z}$ (для чего умножим первое уравнение на $\frac{1}{(\bar{c}+\bar{d})}$, второе —

на $\frac{1}{(\bar{a}+\bar{b})}$, а полученные равенства вычтем почленно). Получим:

$$\bar{z}\cdot\left(\frac{1}{(\bar{a}+\bar{b})(\bar{c}+\bar{d})}-\frac{1}{(\bar{c}+\bar{d})(\bar{a}+\bar{b})}\right)=\frac{1}{\bar{c}+\bar{d}}-\frac{1}{\bar{a}+\bar{b}}.$$

Так как окружность единичная, то $\bar{a}=\frac{1}{a}$, ..., $\bar{d}=\frac{1}{d}$, и поэтому

$$z\cdot\left(\frac{1}{(a+b)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}-\frac{1}{(c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}-\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},$$

откуда

$$z=\frac{(a+b)cd-(c+d)ab}{cd-ab}.$$

Заметим, что часто удобнее подсчитать не z, а $\bar{z}$. В самом деле, если в последней формуле заменить все числа на сопряженные и учесть, что $\bar{a}=\frac{1}{a}$, $\bar{b}=\frac{1}{b}$, $\bar{c}=\frac{1}{c}$, $d=$ $=\frac{1}{d}$, то получим:

$$\bar{z}=\frac{(a+b)-(c+d)}{ab-cd}. \quad \blacktriangle$$

Результаты из примеров 1—5 остаются в силе и тогда, когда речь идет не о единичной окружности, а об окружности произвольного радиуса с центром в нулевой точке.

Для координат точек, расположенных на единичной окружности (или на окружности произвольного радиуса R с центром в нулевой точке), имеется полезная для приложений формула, позволяющая перейти от модуля разности этих чисел к самой их разности. Пусть z_1 и z_2 —

комплексные координаты каких-либо двух точек, расположенных на окружности радиуса R с центром в нулевой точке (рис. 36), α и β — аргументы чисел z_1 и z_2, $0 < \alpha < \beta < 2\pi$. Тогда

$$z_2 - z_1 = |z_2 - z_1| \cdot i \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}. \tag{4}$$

Действительно, пользуясь показательной формой комплексного числа и следствием из формулы Эйлера (см. (12) в § 7), имеем:

$$\frac{z_2 - z_1}{ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}} = R \cdot \frac{e^{i\beta} - e^{i\alpha}}{ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}} = \frac{1}{i} R \left(e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\beta-\alpha}{2}}\right) =$$

$$= 2R \sin\frac{\beta-\alpha}{2} > 0.$$

Отсюда

$$|z_2 - z_1| = 2R \sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

так что

$$\frac{z_2 - z_1}{ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}} = |z_2 - z_1|,$$

а это равенство равносильно формуле (4).

6. (Задача Архимеда.) Известно, что если отрезок стягивает некоторую дугу окружности (является ее хордой), то перпендикуляр, опущенный из середины P дуги, делит хорду пополам. Архимед заинтересовался более общим вопросом. Пусть двузвенная ломаная ABC (рис. 37) имеет все свои вершины на некоторой окружности. Точки A, B, C задают некоторое направление обхода окружности (от A к B, затем к C). Пусть P — середина дуги ABC, пройденной в указанном направлении. Опустим из P перпендикуляр PQ на «ломаную ABC» (под этим, естественно, понимаем перпендикуляр, опущенный на ближайшее к P звено ломаной ABC). Будет

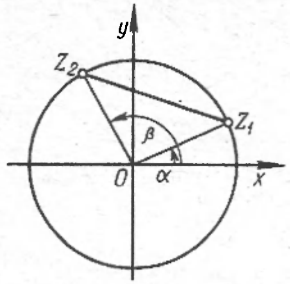


Рис. 36

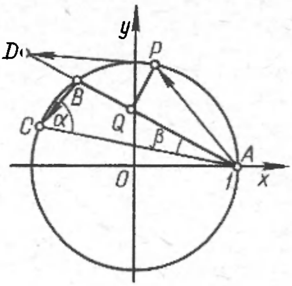


Рис. 37

ли этот перпендикуляр также делить длину ломаной ABC пополам?

Р е ш е н и е. Без потери общности можно ограничиться случаем, когда хорда AB больше хорды BC. Точки A, B, C расположены по окружности в положительном направлении (против движения часовой стрелки), а длина радиуса равна единице. Выберем декартову систему координат так, как указано на рисунке. Обозначим радианную меру дуги APB через 2α, а дуги BC — через $2\beta (0 < \alpha < \pi,\ 0 < \beta < \pi,\ 0 < \alpha + \beta < \pi)$. Тогда точки A, B, C, P имеют соответственно комплексные координаты $a = 1$, $b = e^{i2\alpha}$, $c = e^{i(2\alpha + 2\beta)}$, $p = e^{i(\alpha + \beta)}$. «Распрямим» ломаную ABC, то есть найдем на продолжении отрезка AB такую точку D, что $BD = BC$, и сопоставим длины отрезков DP и PA. Если они окажутся равными, то $\triangle\ DPA$ — равнобедренный, и Q делит длину ломаной ABC пополам. Для выяснения этого найдем комплексную координату d точки D. Сначала найдем величину угла DBC. Так как $\angle\ DBC$ — внешний для $\triangle\ ABC$, а $\angle\ BCA = \alpha$, $\angle\ BAC = \beta$, то $\angle\ DBC = \alpha + \beta$. Так как вектор $\overline{BD}$ получаем из вектора $\overline{BC}$ поворотом на угол $\alpha + \beta$ в отрицательном направлении (по часовой стрелке), то

$d-b=(c-b)\,e^{-i(\alpha+\beta)}$. Теперь легко находим комплексные координаты векторов $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{PD}$:

$$p-a=e^{i(\alpha+\beta)}-1,\ d-p=b+(c-b)\,e^{-i(\alpha+\beta)}-p,$$

а также их длины:

$$|\overrightarrow{AP}|=|p-a|=|e^{i(\alpha+\beta)}-1|,$$

$$|\overrightarrow{PD}|=|d-p|=|e^{i\cdot 2\alpha}+(e^{i(2\alpha+2\beta)}-e^{i2\alpha})\,e^{-i(\alpha+\beta)}-$$
$$-e^{i(\alpha+\beta)}|=|e^{i2\alpha}-e^{i(\alpha-\beta)}|=|e^{i(\alpha-\beta)}(e^{i(\alpha+\beta)}-1)|=$$
$$=|e^{i(\alpha+\beta)}-1|.$$

Видим, что $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{PD}|$, $\triangle\ DPA$ — равнобедренный, поэтому длина отрезка AQ вдвое меньше длины ломаной ABC[1].

7. Древнегреческому геометру и астроному Клавдию Птолемею пришлось (в связи с составлением астрономических таблиц) решать такую задачу: Пусть в окружность вписан выпуклый четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 38). Требуется выразить сумму произведений его противоположных сторон через диагонали четырехугольника.

Решим эту задачу с помощью комплексных чисел.

Р е ш е н и е. Без потери общности можно считать, что центр окружности принят в качестве начала координат и что при обходе окружности против часовой стрелки мы последовательно встречаем вершины A_1, A_2, A_3, A_4. Их комплексные координаты обозначим через z_1, z_2, z_3, z_4.

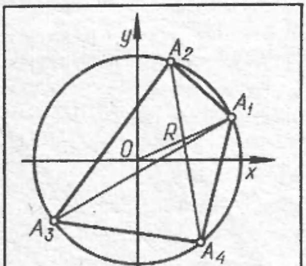


Рис. 38

[1] Другое решение примера 6 (без комплексных чисел) можно получить, если воспользоваться формулой для суммы синусов.

Эти числа можно записать так:

$$z_k = R\cdot e^{i\alpha_k} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

В дальнейшем пользуемся соотношением (4). Имеем:

$$A_1A_2\cdot A_3A_4 + A_2A_3\cdot A_4A_1 = |z_2-z_1|\cdot|z_4-z_3| + |z_3-z_2|\times$$

$$\times|z_4-z_1| = \frac{z_2-z_1}{ie^{i\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}}\cdot\frac{z_4-z_3}{ie^{i\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}}} + \frac{z_3-z_2}{ie^{i\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}}}\cdot\frac{z_4-z_1}{ie^{i\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}}} =$$

$$= \frac{-z_1z_4 - z_2z_3 + z_3z_4 + z_1z_2}{i^2\cdot e^{i\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{2}}} = \frac{z_4-z_2}{ie^{i\frac{\alpha_2+\alpha_4}{2}}}\cdot\frac{z_3-z_1}{ie^{i\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}}} =$$

$$= |z_4-z_2|\cdot|z_3-z_1| = A_2A_4\cdot A_1A_3,$$

или окончательно:

$$A_1A_2\cdot A_3A_4 + A_2A_3\cdot A_4A_1 = A_1A_3\cdot A_2A_4.$$

Итак, *в каждом вписанном выпуклом четырехугольнике сумма произведений противоположных сторон равна произведению его диагоналей.*

Мы установили известную *теорему Птолемея.*

8. Может ли случиться, чтобы в каком-либо выпуклом четырехугольнике $A_1A_2A_3A_4$ (вписанном или не вписанном в окружность) произведение диагоналей оказалось больше, чем сумма произведений противоположных сторон?

Решение. В ходе решения примера 7 мы уже пользовались тождеством, верным для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3, z_4: $(z_2-z_1)(z_4-z_3)+(z_3-z_2)(z_4-z_1)=$ $=(z_4-z_2)(z_3-z_1)$.

Опираясь на свойства модулей комплексных чисел (см. § 6), получим:

$$|z_4-z_2|\cdot|z_3-z_1| \leqslant |z_2-z_1|\cdot|z_4-z_3| + |z_3-z_2|\cdot|z_4-z_1|,$$

то есть всегда

$$A_1A_3\cdot A_2A_4 \leqslant A_1A_2\cdot A_3A_4 + A_2A_3\cdot A_4A_1.$$

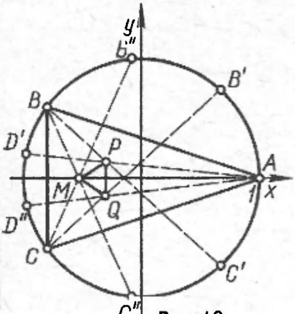


Рис. 40

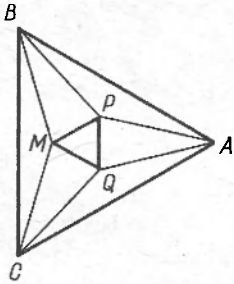


Рис. 39

Мы получили такое дополнение к теореме Птолемея: *в каждом четырехугольнике произведение диагоналей не больше суммы произведений его противоположных сторон.*

9. *Трисектрисой угла* называют луч, исходящий из вершины угла и отсекающий от угла втрое меньший угол (рис. 39). Понятно, что каждый угол имеет две трисектрисы. Рассмотрим сначала равносторонний треугольник ABC. Пусть M — точка пересечения двух трисектрис, примыкающих к стороне BC; Q — точка пересечения двух трисектрис, примыкающих к стороне CA; P — точка пересечения трисектрис, примыкающих к AB. Очевидно (и это нетрудно доказать), что $\triangle\ MPQ$ — равносторонний. Будем теперь удалять вершину A от стороны BC, но так, чтобы $\triangle\ BAC$ оставался равнобедренным; тогда будут изменять свое положение его трисектрисы, а также точки их пересечения M, P, Q (рис. 40). Очевидно (и это тоже легко обосновать), что $\triangle\ MPQ$ останется равнобедренным. Американский математик Морли предположил, что $\triangle\ MPQ$ должен при этом оставаться *равносторонним*. Справедлива ли эта гипотеза Морли?

Р е ш е н и е. Расположим равнобедренный $\triangle ABC$ на комплексной плоскости так, как указано на рисунке 40, причем радиус описанной окружности можем, не теряя общности, считать равным единице. В силу симметрии чертежа относительно действительной оси ясно, что точка M лежит на этой оси, а точки P и Q симметричны относительно этой оси. Пусть дуги AB', $B'B''$, $B''B$, AC', $C'C''$, $C''C$ содержат по φ радиан каждая, а дуги BD', $D'D''$, $D''C$ содержат по $\frac{2\pi}{3}-2\varphi$ радиан.

Введем обозначение: $e^{i\varphi}=\alpha$, $e^{i\frac{\pi}{3}}=\lambda$.

Имеем:

$$\lambda^3=e^{i\pi}=-1,\ \lambda^6=1,\ a=1,\ b'=\alpha,\ b''=\alpha^2,\ b=\alpha^3,$$

$$d'=e^{i\left(\frac{2}{3}\pi+\varphi\right)}=\lambda^2\cdot\alpha,\ c=\alpha^{-3},\ c'=\alpha^{-1},\ c''=\alpha^{-2},$$

$$\bar{m}=m,\ \bar{p}=q.$$

Для решения нашей задачи вычислим координаты векторов $\overrightarrow{MQ}$ и $\overrightarrow{MP}$ и после этого выясним, можно ли вектор $\overrightarrow{MP}$ получить из вектора $\overrightarrow{MQ}$ поворотом на 60°. Воспользуемся формулой для координаты точки пересечения двух хорд единичной окружности (см. пример 5). Так как концы хорд BC'' и CB'' имеют соответственно координаты α^3 и α^{-2}, α^{-3} и α^2, то

$$m=\bar{m}=\frac{(\alpha^3+\alpha^{-2})-(\alpha^{-3}+\alpha^2)}{\alpha-\alpha^{-1}}=\frac{\alpha^3-(\alpha^{-1})^3}{\alpha-\alpha^{-1}}-\frac{\alpha^2-(\alpha^{-1})^2}{\alpha-\alpha^{-1}},$$

$$m=\alpha^2-\alpha+1-\alpha^{-1}+\alpha^{-2}. \qquad (5)$$

Так как концы хорд BC' и AD' имеют соответственно координаты α^3 и α^{-1}, 1 и $\lambda^2\alpha$, то

$$\bar{p}=\frac{(\alpha^3+\alpha^{-1})-(1+\alpha\lambda^2)}{\alpha^2-\lambda^2\alpha}=\frac{\alpha^3-1}{\alpha(\alpha-\lambda^2)}+\frac{\alpha^{-1}(1-\alpha^2\lambda^2)}{\alpha(\alpha-\lambda^2)}.$$

Если учесть, что $\lambda^6=1$, то можно числители разделить на $\alpha-\lambda^2$: достаточно в каждом из двух числителей заменить 1 на λ^6. Получим:

$$\bar{p}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^3-\lambda^6}{\alpha-\lambda^2}-\frac{\alpha^{-2}(\alpha^2\lambda^2-\lambda^6)}{\alpha-\lambda^2}-\frac{1}{\alpha}(\alpha^2+\alpha\lambda^2+\lambda^4)-$$
$$-\alpha^{-2}\lambda^2(\alpha+\lambda^2).$$

Если учесть, что $\lambda^3=-1$, то получим:

$$q=\bar{p}=\alpha+\lambda^2-(\lambda+\lambda^2)\alpha^{-1}+\lambda\alpha^{-2}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что вектор $\overrightarrow{MQ}$ имеет комплексную координату

$$q-m=-\alpha^2+2\alpha+\lambda^2-1-(\lambda^2+\lambda-1)\alpha^{-1}+$$
$$+(\lambda-1)\alpha^{-2}. \tag{7}$$

Так как вектор $\overrightarrow{MP}$ симметричен вектору $\overrightarrow{MQ}$ относительно действительной оси, то $p-m=\overline{q-m}$, то есть

$$p-m=-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{2}{\alpha}+\left(\frac{1}{\lambda^2}-1\right)-\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}-1\right)\alpha+$$
$$+\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)\alpha^2. \tag{8}$$

Кроме того

$$\lambda(q-m)=-\lambda\alpha^2+2\lambda\alpha+\lambda^3-\lambda-(\lambda^3+\lambda^2-\lambda)\alpha^{-1}+$$
$$+(\lambda^2-\lambda)\alpha^{-2}. \tag{9}$$

Остается проверить, равны ли коэффициенты при соответствующих степенях буквы α в формулах (8) и (9). Это нетрудно сделать, если учесть, что $1+\lambda^3=0$, то есть $(1+\lambda)(1-\lambda+\lambda^2)=0$ и, следовательно (так как $\lambda\neq-1$),

$$1-\lambda+\lambda^2=0. \tag{10}$$

Для примера сопоставим коэффициенты при α^2 в (8) и (9):

$$\frac{1}{\lambda}-1=\frac{1-\lambda}{\lambda}=\frac{-\lambda^2}{\lambda}=-\lambda.$$

Итак, видим, что $p-m=\lambda(q-m)$, а это означает, что вектор $\overrightarrow{MP}$ получаем из вектора $\overrightarrow{MQ}$ путем поворота на 60°, то есть $\triangle\ MPQ$ действительно правильный. Гипотеза Морли оказалась верной.

Оказалось, что аналогичный результат (теорема Морли) имеет место не только для равнобедренных, но и для любых треугольников: *при любом выборе треугольника ABC точки пересечения пар трисектрис, прилегающих соответственно к сторонам AB, BC и CA треугольника, являются вершинами правильного треугольника.* В случае произвольного треугольника эта теорема также может быть доказана с помощью комплексных чисел. Следует лишь несколько видоизменить приведенные выше рассуждения.

Упражнения

15.1. В единичную окружность Γ вписан треугольник ABC. Зная координаты трех вершин треугольника, вычислите его площадь и координаты точки H пересечения его высот, точки K пересечения его биссектрис и точки M пересечения его медиан. Сохранятся ли эти формулы в случае, если Γ — произвольная окружность с центром в нулевой точке?

* **15.2.** В треугольнике ABC проведены биссектрисы его углов, которые пересекают описанную окружность соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Являются ли прямые A_1A, B_1B и C_1C продолженными высотами для треугольника $A_1B_1C_1$?

* **15.3.** В окружности выбраны два взаимно перпендикулярных радиуса OA и OB. Через точки B и A и некоторую точку M четверти окружности (ограниченной радиусами OA и OB) проведены две прямые, которые пересекают лучи OA и OB соответственно в точках A_1 и B_1. Оказалось, что $OA_1 = 2OA$. Во сколько раз отрезок OB_1 длиннее отрезка OB?

Решите аналогичную задачу, если $OA_1 = \alpha \cdot OA (\alpha \neq 1)$.

* **15.4.** В окружность вписан треугольник $Z_1Z_2Z_3$. Из произвольной точки Z окружности опущены перпенди-

кулярЫ на все три стороны треугольника (или их продолжения). Возникают три точки C_1, C_2, C_3 — основания указанных перпендикуляров. Верно ли, что они лежат на одной прямой?

* § 16. Геометрические применения определителей с комплексными элементами

Решение некоторых геометрических задач значительно упрощается, если воспользоваться *определителями* третьего порядка. Определители (их также называют детерминантами) были впервые введены Г. В. Лейбницем в связи с решением систем линейных уравнений. Пусть требуется решить систему двух уравнений (с действительными или комплексными коэффициентами):

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Получим (если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$):

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Решение будет, и притом единственное, если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$. Выражение $a_1b_2-a_2b_1$ называют *определителем второго порядка* и записывают так:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Решение системы (1) можно записать так:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Под *определителем третьего порядка*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

понимают такой многочлен:

$$a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2.$$

Этот громоздкий многочлен запоминают так: сначала берут со знаком плюс три уравнения, указанные в таблице

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(«главная диагональ» и два треугольника, у которых одна из сторон параллельна главной диагонали), а затем со знаком минус три произведения, указанные в той же таблице

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(«вторая диагональ» и два треугольника со стороной, параллельной этой диагонали).

Такое определение удобно для решения системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases} \tag{2}$$

Оказывается, что если определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0,$$

то решение системы единственное и оно может быть получено по формулам:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ z=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

При $d_1=d_2=d_3=0$ система (2) приобретает вид:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0. \end{cases} \qquad (3)$$

Такую систему называют *однородной*. Она всегда имеет решение (тройка чисел $x=0$, $y=0$, $z=0$), которое называется *тривиальным*, или *нулевым*. Иногда тривиальное решение системы (3) является единственным. Однако есть однородные системы уравнений, у которых, помимо тривиального, существуют и другие решения. Такова, например, система $x-y=0$, $y-z=0$, $z-x=0$ (одно из ее нетривиальных решений: 7, 7, 7).

Перечислим некоторые свойства определителей третьего порядка.

1) Вычисление определителя третьего порядка можно свести к вычислению определителей второго порядка по формуле

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

2) Если определитель имеет два одинаковых столбца (строки), то он равен нулю.

3) Если все элементы [1] какого-нибудь столбца (строки) имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

4) Если ко всем элементам какого-нибудь столбца

[1] *Элементами* определителя называются числа, из которых он составлен.

(строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), предварительно умноженные на одно и то же число (λ), то от этого значение определителя не изменится.

5) Определитель третьего порядка тогда и только тогда равен нулю, когда какой-нибудь его столбец (строка) является линейной комбинацией двух других его столбцов (строк).

6) Однородная система (3) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Примеры.

1. Пусть на комплексной плоскости даны три различные прямые, из которых хотя бы две не параллельны:

$$\alpha_1 z + \bar{\alpha}_1 \bar{z} - b_1 = 0, \quad (4)$$

$$\alpha_2 z + \bar{\alpha}_2 \bar{z} - b_2 = 0, \quad (5)$$

$$\alpha_3 z + \bar{\alpha}_3 \bar{z} - b_3 = 0. \quad (6)$$

Докажем, что эти прямые имеют общую точку тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \bar{\alpha}_1 & b_1 \\ \alpha_2 & \bar{\alpha}_2 & b_2 \\ \alpha_3 & \bar{\alpha}_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Решение. Пусть z_0 — общая точка этих трех прямых. Тогда выполняются равенства:

$$\alpha_1 z_0 + \bar{\alpha}_1 \bar{z}_0 - b_1 = 0,$$
$$\alpha_2 z_0 + \bar{\alpha}_2 \bar{z}_0 - b_2 = 0,$$
$$\alpha_3 z_0 + \bar{\alpha}_3 \bar{z}_0 - b_3 = 0.$$

Это означает, что вспомогательная система трех однородных уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_1 u + \bar{\alpha}_1 v + b_1 w &= 0, \\ \alpha_2 u + \bar{\alpha}_2 v + b_2 w &= 0, \\ \alpha_3 u + \bar{\alpha}_3 v + b_3 w &= 0 \end{aligned}$$

имеет заведомо ненулевое решение $(z_0, \bar{z}_0, -1)$, поэтому определитель этой системы должен быть равным нулю.

И наоборот, если о трех прямых (4), (5), (6) известно, что хотя бы две из них непараллельны и что определитель системы равен нулю, то все три прямые имеют общую точку.

Равенство нулю определителя означает, что третья строка является линейной комбинацией двух других строк, то есть существуют такие числа λ_1 и λ_2, что $\alpha_3 = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2$, $\bar{\alpha}_3 - \lambda_1 \bar{\alpha}_1 + \lambda_2 \bar{\alpha}_2$, $b_3 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$. Если точка z_0 лежит на первых двух прямых, то $\alpha_1 z_0 + \bar{\alpha}_1 \bar{z}_0 - b_1 - 0$, $\alpha_2 z_0 + \bar{\alpha}_3 \bar{z}_0 - b_2 = 0$ и, следовательно, $\alpha_3 z_0 + \bar{\alpha}_3 \bar{z}_0 - b_3 = \lambda_1 (\alpha_1 z_0 + \bar{\alpha}_1 \bar{z}_0 - b_1) + \lambda_2 (\alpha_2 z_0 + \bar{\alpha}_2 \bar{z}_0 - b_2) = 0$. Видим, что общая точка двух прямых (4) и (5) лежит и на третьей прямой.

§ 17. Корни из комплексных чисел

Корнем n-й степени (n — натуральное число) из комплексного числа z называют каждое такое комплексное число w, для которого выполняется равенство $w^n = z$. Тот факт, что комплексное число w является корнем n-й степени из комплексного числа z, записывают так: $w = \sqrt[n]{z}$.

Учитывая, например, что $i^2 = -1$ и $(-i)^2 = -1$, мы можем сказать, что значениями корня квадратного из числа -1 являются комплексные числа i и $-i$. Этот пример, в частности, свидетельствует о том, что корень n-й степени из комплексного числа определяется неоднозначно. Возникает вопрос: сколько различных значений имеет корень n-й степени из комплексного числа z и как все они могут быть вычислены?

Формулы Эйлера и Муавра позволяют получить простое правило для извлечения корня из комплексного числа. Пусть $z=re^{i\varphi}\neq 0$ ($r=|z|$, φ — аргумент числа z) и пусть $w=\rho e^{i\alpha}$ (здесь $\rho=|w|$, α — аргумент числа w). Равенство $z=w^n$ можно записать так: $re^{i\varphi}=\rho^n e^{in\alpha}$. Сопоставляя модули и аргументы обеих частей последнего равенства, записываем:

$$\rho^n=r, \tag{1}$$

$$n\alpha=\varphi+2k\pi \quad (k \text{ — некоторое целое число}). \tag{2}$$

Из (1) следует, что $\rho=\underset{+}{\sqrt[n]{r}}$ (в правой части записан *арифметический* корень n-й степени из числа r, так что ρ — неотрицательное число). А из (2) получаем: $\alpha=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$, где k — целое число. Легко проверить, что при любом целом числе k число $w=\rho e^{i\alpha}$ удовлетворяет условию $w^n=z$, то есть w является одним из значений корня n-й степени из числа z. Итак, множество всех чисел, являющихся корнями n-й степени из числа z, задается формулой:

$$w=\underset{+}{\sqrt[n]{r}}\cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \tag{3}$$

где k — любое целое число.

Формулу (3) можно записать так (в тригонометрической форме):

$$\sqrt[n]{z}=\underset{+}{\sqrt[n]{r}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \tag{4}$$

Сколько же *различных* значений корня n-й степени из числа z получим по формуле (3) при всевозможных целых значениях k? Оказывается, что только n (при $z\neq 0$). Действительно, подставляя в формулу (3) вместо k целые числа $0, 1, 2, \ldots, n-1$, можно убедиться, что все получаемые при этом значения корня n-й степени представляют собой числа с попарно различными аргументами, отличающимися друг от друга меньше, чем на 2π, и изображаются попарно различными векторами, а следовательно, различны. Если же k принимает любое другое целое значение, то его можно представить в виде $k=nq+p$, где q — целое число, а p — одно из чисел $0, 1, 2, ..., n-1$. Тогда

$$e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}=e^{i\left(\frac{\varphi+2p\pi}{n}+2q\pi\right)}=e^{i\frac{\varphi+2p\pi}{n}}\cdot e^{i2q\pi}=e^{i\frac{\varphi+2p\pi}{n}}.$$

Поэтому соответствующее выбранному значению k значение $\sqrt[n]{z}$ совпадает с одним из ранее полученных (при $k=0, 1, 2, ..., n-1$) значений корня n-й степени из числа z.

Итак, *корень n-й степени из комплексного числа $z\neq 0$ имеет n различных значений, которые могут быть вычислены по формуле* (3) *или* (4) при $k=0, 1, ..., n-1$.

Примеры

1. Вычислите все значения $\sqrt[3]{1}$.

Решение. Пусть $z=1$, $|z|=1$, $\varphi=0$. Выражение $\sqrt[3]{1}$ имеет три различных комплексных значения, которые можно вычислить по формуле (4):

$$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3}+i\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right)\qquad(k=0,\ 1,\ 2).$$

Откуда

$$(\sqrt[3]{1})_1=1,\quad (\sqrt[3]{1})_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},$$

$$(\sqrt[3]{1})_3=\cos\frac{2\cdot 2\pi}{3}+i\sin\frac{2\cdot 2\pi}{3}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.\ \blacktriangle$$

Рассмотренные выше (см. гл. 1, § 4) геометрические толкования комплексных чисел позволяют легко строить геометрические изображения корней n-й степени из комплексных чисел. При этом формулу (3) для извлечения корня целесообразно представить в таком виде:

$$\sqrt[n]{z} = \underset{+}{\sqrt[n]{|z|}} \cdot e^{i\frac{\varphi}{n}} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{n}} = w_1 \cdot e^{i\frac{2k\pi}{n}}. \qquad (5)$$

Здесь $w_1 = \underset{+}{\sqrt[n]{|z|}} \cdot e^{i\frac{\varphi}{n}}$ является одним из значений корня n-й степени из числа z. Формула (5) позволяет при $k=0$, $1, 2, \ldots, n-1$ найти все значения $\sqrt[n]{z}$, если известно одно из этих значений.

2. Пусть вектор $\overrightarrow{OC}$ (рис. 41) изображает некоторое комплексное число c, $|c|=1$. Построим на чертеже векторы, изображающие корни уравнения $w^4=c$.

Р е ш е н и е. Число c может быть представлено в виде $c=e^{i\alpha}$. Формула (3) подсказывает нам, что число $w_1 = e^{i\frac{\alpha}{4}}$ — корень уравнения $w^4=c$. Его изображение $\overrightarrow{OW_1}$ дано на рисунке 41. Остальные корни (w_2, w_3, w_4) находим по формуле (5): $w_2 = w_1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$, $w_3 = w_1 \cdot e^{i\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2}}$, $w_4 = w_1 \cdot e^{i\cdot 3\cdot\frac{\pi}{2}}$. Умножение числа w_1 на число $e^{i\frac{\pi}{2}}$ можно истолковать как поворот вектора $\overrightarrow{OW_1}$, имеющего комплексную координату w_1, на угол, равный $+\frac{\pi}{2}$ радиан. Аналогично понимаем умножение числа w_1 на числа $e^{i\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2}}$ и $e^{i\cdot 3\cdot\frac{\pi}{2}}$.

Таким образом, векторы с комплексными координатами w_2, w_3, w_4 получаем из вектора с координатой w_1 поворотом без растяжения (так как $|e^{i\frac{\pi}{2}}| = |e^{i\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2}}| = |e^{i\cdot 3\cdot\frac{\pi}{2}}| = 1$) соответственно на один прямой угол, на два прямых угла, на три прямых угла (против часовой

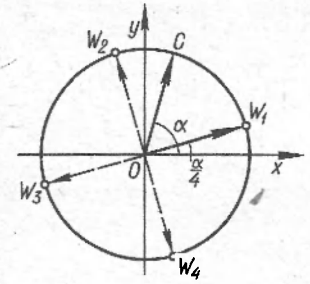


Рис. 41

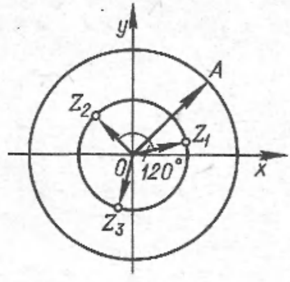


Рис. 42

стрелки). Векторы $\overrightarrow{OW_2}$, $\overrightarrow{OW_3}$, $\overrightarrow{OW_4}$ изображены на рисунке 41.

3. Изобразим на чертеже векторы, соответствующие корням уравнения $z^3 = 2 + 2i$.

Решение. На рисунке 42 вектор $\overrightarrow{OA}$ изображает комплексное число $2+2i$, при этом $|2+2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\arg(2+2i) = \frac{\pi}{4}$. Нам предстоит найти $z = \sqrt[3]{2+2i}$. Так как $|z| = \sqrt[3]{|2+2i|} = \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3} = \sqrt{2}$, то все значения $\sqrt[3]{2+2i}$ будут находиться на окружности радиуса $\sqrt{2}$ (вдвое меньшего, чем $|2+2i| = 2\sqrt{2}$). Ясно, что $z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ — один из корней данного уравнения. Его изображение дано на рисунке 42. Остальные корни находим по формулам $z_2 = z_1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_3 = z_1 \cdot e^{i\cdot 2\cdot\frac{2\pi}{3}}$. Векторы с комплексными координатами z_2 и z_3 получаем из вектора, имеющего комплексную координату z_1, поворотом соответственно на угол $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$ радиан против часовой стрелки.

На основании приведенных выше примеров геометрического изображения корней n-й степени ($n>2$) из комплексного числа можно сделать следующий вывод: *если различные значения корня n-й степени из комплексного числа z изображать точками на комплексной плоскости, то эти точки можно рассматривать как вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса* $\underset{+}{\sqrt[n]{|z|}}$ *с центром в начале координат.*

Упражнения

17.1. Вычислите все значения корней:

1) $\sqrt[3]{-i}$; 2) $\sqrt[3]{2+2i}$; 3) $\sqrt[4]{i}$; 4) $\sqrt{i}$.

17.2. Изобразите векторы, соответствующие корням уравнений, и вычислите эти корни:

1) $z^2+i=0$; 2) $z^4+i=0$; 3) $z^3+8i=0$; 4) $z^6-1=0$.

17.3. Чему равно произведение $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$ при положительных a и b: числу $+\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ или числу $-\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$?

17.4. Прочитайте следующее рассуждение: «Очевидно, что $i^{21}=(i^4)^{\frac{21}{4}}=1^{\frac{21}{4}}=1$, потому что единица в любой степени равна единице. С другой стороны, $i^{21}=(i^4)^5\cdot i=1^5\cdot i=1\cdot i=i$. Следовательно, $i=1$». В чем ошибка?

§ 18. Мнимые числа и плоские многоугольники

Построение правильных многоугольников. Построение правильных треугольников, четырехугольников, пятиугольников, шестиугольников с помощью циркуля и линейки было известно греческим геометрам еще в IV в. до н. э. Архимед (III в. до н. э.) пытался найти способ построения теми же инструментами правильного семиугольника, однако ему это не удалось. Такого построения не сумели найти геометры и в течение двух тысячелетий после Архимеда, хотя никто не сомневался в существовании способа решения этой задачи. Вопрос о построении правильного семиугольника был решен в 1796 г. немецким математиком К. Ф. Гауссом. Более того, Гаусс получил теорему, которая позволяет для каждого натурального числа n сказать, можно ли циркулем и линейкой построить правильный n-угольник или же такое построение невозможно. Проблему построения правильных многоугольников Гаусс сумел решить благодаря применению комплексных чисел.

Будем полагать, что n — простое число. Понятно, что построение правильного n-угольника равносильно делению окружности на n равных дуг. Мы можем взять произвольную окружность ω, принять длину ее радиуса равной единице, рассмотреть декартову систему координат с началом в центре O избранной нами окружности. Тогда каждая точка на плоскости приобретает определенную комплексную координату. В частности, точка Z_0 пересечения окружности с положительным лучом оси абсцисс будет иметь координату $z_0=1$. Правильный n-угольник, имеющий Z_0 одной из своих вершин, будет иметь остальными своими вершинами точки Z_k с комплексными координатами

$$z_k=\exp\left(i\frac{2\pi}{n}k\right) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Все эти числа — отличные от единицы корни уравнения $z^n-1=0$, т. е. корни уравнения

$$z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z^2+z+1=0. \qquad (1)$$

Задача деления окружности состоит в том, чтобы построить точки с комплексными координатами z_k ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$) (для краткости будем говорить: «построить точки z_k»), т. е. в том, чтобы построить корни уравнения (1). Поэтому уравнение (1) называют *уравнением деления окружности*. Заметим, что при *простом* n для построения всех вершин правильного n-угольника, вписанного в окружность, достаточно построить *одну* из этих вершин.

В курсах алгебры устанавливается, что, если n — простое число, то *последовательно возводя в натуральные степени любой, не равный единице корень уравнения* $z^n - 1 = 0$, *можно найти все корни* n*-й степени из единицы.* Геометрически это означает, что *если помимо вершины* Z_0 *построена на окружности какая-нибудь одна вершина* Z_k, *то, откладывая последовательно по окружности* $n-2$ *раза дугу* Z_0Z_k, *получим все остальные вершины правильного* n*-угольника.*

Таким образом (при простом n) вопрос о возможности построения с помощью циркуля и линейки правильного n-угольника сводится к вопросу о том, возможно ли с помощью этих инструментов построить на комплексной плоскости какой-нибудь корень уравнения (1) деления окружности.

Рассмотрим три частных случая.

1) Пусть $n=5$.

Тогда уравнение деления окружности имеет вид:

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0. \tag{2}$$

Выясним, возможно ли построить циркулем и линейкой корень уравнения (2)

$$z = \exp\left(i\frac{2\pi}{5}\right). \tag{3}$$

Положим

$$v = z + \frac{1}{z}, \tag{4}$$

где под z понимаем число (3). Тогда

$$v = 2\cos\frac{2\pi}{5}. \tag{5}$$

Так как число z удовлетворяет уравнению (2), то оно удовлетворяет и уравнению

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0. \tag{6}$$

В силу (4) имеем $z^2+\frac{1}{z^2}=v^2-2$, и уравнение (6) приобретает вид:

$$v^2+v-1=0.$$

Из (5) видно, что нас интересует положительный корень этого уравнения $v=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$. Отрезок такой длины легко построить циркулем и линейкой (напомним, что *единичный* отрезок и *единичная* окружность считаются уже заданными). После этого можно построить и точку z, задаваемую формулой (3). Тем самым не только установлена возможность построения правильного пятиугольника, но и найден определенный способ для фактического выполнения этого построения.

Прежде чем рассмотреть следующий частный случай, приведем без доказательства некоторые утверждения, устанавливаемые в теории геометрических построений и в алгебре (см.: Б. И. Аргунов, М. Б. Балк. Геометрические построения на плоскости.— М.: Учпедгиз, 1957.— С. 190—196, 210—212).

I. Для построения циркулем и линейкой отрезка, длина которого является данной положительной функцией от длин данных отрезков, необходимо и достаточно, чтобы длину искомого отрезка можно было выразить через длины данных отрезков при помощи конечного числа следующих основных операций: сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня.

II. Если кубическое уравнение вида $y^3+ay^2+by+c=0$ с рациональными коэффициентами не имеет ни одного рационального корня, то ни один из его трех корней не может быть выражен через единицу лишь с помощью конечного числа основных операций.

III. Если алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1, имеет рациональный корень, то он является целым числом и служит делителем свободного члена уравнения (см.: Курош А. Г. Курс высшей алгебры.— М.: Наука, 1976.)

2) Пусть $n=7$.

Уравнение деления окружности на 7 равных частей имеет вид:

$$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0,$$

или

$$z^3+z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}=0.$$

Пусть z — какой-либо его корень. Положим $v=z+\frac{1}{z}$, тогда легко найти, что $z^2+\frac{1}{z^2}=v^2-2$, $z^3+\frac{1}{z^3}=v^3-3v$, и мы приводим уравнение к виду:

$$v^3+v^2-2v-1=0. \qquad (7)$$

Это уравнение не имеет рациональных корней (если бы таковые имелись, то они в силу приведенного выше утверждения III должны оказаться среди целочисленных делителей свободного члена, т. е. среди чисел -1 и 1, а эти числа, как легко проверить, уравнению (7) не удовлетворяют). В силу утверждений I и II ни один из корней уравнения (7) не может быть построен циркулем и линейкой. Следовательно, *не существует способа, позволяющего построить правильный семиугольник с помощью циркуля и линейки* (речь идет об абсолютно точных построениях, хотя возможность указания способа приближенного построения не исключается).

** 3) Пусть $n=17$.

В этом случае задача сводится к построению отрезка $v=z+\frac{1}{z}=z+z^{16}=2\cos\frac{2\pi}{17}$. К построению этой величины можно подоити постепенно, исходя из соотношения:

$$z+z^2+z^3+\ldots+z^{16}=-1. \qquad (8)$$

Обозначим:

$$(z+z^{16})+(z^2+z^{15})+(z^4+z^{13})+(z^8+z^9)=\gamma_1,$$
$$(z^3+z^{14})+(z^5+z^{12})+(z^6+z^{11})+(z^7+z^{10})=\gamma_2.$$

Из соотношения (8) ясно, что $\gamma_1+\gamma_2=-1$. С другой стороны, исходя из того, что $z^{17}=1$, нетрудно установить, что $\gamma_1\cdot\gamma_2=-4$[1]. Следовательно γ_1 и γ_2 — корни квадратного уравнения $\gamma^2+\gamma-4=0$, так что $\gamma_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. Корни эти можно легко построить (по абсолютной величине). Чтобы отличить один корень от другого, заметим, что $\gamma_2=2\left(\cos\frac{6}{17}\pi-\cos\frac{7}{17}\pi-\cos\frac{5}{17}\times\right.$ $\left.\times\pi-\cos\frac{3}{17}\pi\right)$. Это число — отрицательное, так что $\gamma_2=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$, $\gamma_1=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$.

Располагая величинами γ_1 и γ_2, можно построить величины: $\beta_1=z+z^4+z^{13}+z^{16}$, $\beta_2=z^2+z^8+z^9+z^{15}$, $\beta_3=z^3+z^5+z^{12}+z^{14}$ и $\beta_4=z^6+z^7+z^{10}+z^{11}$. Действительно, $\beta_1+\beta_2=\gamma_1$, $\beta_1\cdot\beta_2=-1$, так что β_1 и β_2 — корни уравнения $\beta^2-\gamma_1\cdot\beta-1=0$ и, следовательно,

$$\beta_{1,2}=\frac{\gamma_1\pm\sqrt{\gamma_1^2+4}}{2}.$$

---

[1] γ_1 — сумма восьми слагаемых, γ_2 — сумма восьми слагаемых, поэтому $\gamma_1\cdot\gamma_2$ — сумма 64 слагаемых, каждое из которых — степень числа z. Если в каждом таком слагаемом из $\gamma_1\cdot\gamma_2$, в котором z входит в степени более высокой, чем шестнадцатая, заменить z^{17} на единицу, то получим (как в этом можно убедиться в результате подсчета), что $\gamma_1\cdot\gamma_2=4z+4z^2+\ldots+4z^{16}=-4$.

Так как

$$\beta_1 = 2\left(\cos\frac{2}{17}\pi + \cos\frac{8}{17}\pi\right) > 0,$$

то

$$\beta_1 = \frac{\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + 4}}{2}, \quad \beta_2 = \frac{\gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2 + 4}}{2}.$$

Точно так же можно показать, что

$$\beta_3 = \frac{\gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2 + 4}}{2}, \quad \beta_4 = \frac{\gamma_2 - \sqrt{\gamma_2^2 + 4}}{2}.$$

Обозначим $z + z^{16} = \alpha_1$, $z^4 + z^{13} = \alpha_2$. Тогда $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1$, $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \beta_3$, так что величины α_1 и α_2 являются корнями уравнения

$$\alpha^2 - \beta_1 \cdot \alpha + \beta_3 = 0,$$

то есть

$$\alpha_{1,2} = \frac{\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_3}}{2}.$$

Так как

$$\alpha_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17}, \quad \alpha_2 = 2\cos\frac{8\pi}{17},$$

то $\alpha_1 > \alpha_2$ и, следовательно,

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_3}}{2}.$$

Считая, что β_1 и β_3 уже построены, заметим, что циркуль и линейка позволяют теперь построить отрезок длины $\alpha_1 = v$.

Проводя аналогичные рассуждения, К. Ф. Гаусс в 1796 г. доказал теорему: *построение правильного n-угольника с помощью циркуля и линейки возможно в* *том и только в том случае, когда число n может быть представлено в виде $2^m p_1 p_2 ... p_s$, где $p_1, p_2, ..., p_s$ — попарно различные простые числа вида $2^{2^k}+1$, а число m — целое неотрицательное.*

В частности, если n — простое число, то для построения правильного n-угольника посредством циркуля и линейки необходимо и достаточно, чтобы число n имело вид $2^{2^k}+1$.

Мнимые числа и площадь многоугольника. В школьном курсе геометрии известны формулы, которые позволяют по трем независимым основным элементам треугольника (например, по трем его сторонам; или по двум сторонам и углу между ними; или по стороне и двум углам) вычислить его площадь. А как вычислить площадь n-угольника при $n>3$ (например, пятиугольника или семиугольника), если известны его стороны и углы? Ответ на подобные вопросы подсказывают комплексные числа. Ради конкретности ограничимся случаем выпуклого пятиугольника (рассуждения в случае произвольного n-угольника аналогичны).

В дальнейшем мы воспользуемся несколькими легко проверяемыми замечаниями.

I. *Мнимая часть суммы нескольких комплексных чисел равна сумме мнимых частей слагаемых.*

II. *Пусть p и q — два каких-либо комплексных числа, Φ и Ψ — их аргументы. Тогда*

$$\operatorname{Im}(\bar{p}\cdot q)=|p|\cdot|q|\sin(\Psi-\Phi). \tag{9}$$

Действительно, легко подсчитать, что

$$\bar{p}\cdot q=|p|\cdot|q|\,(\cos(\Psi-\Phi)+i\sin(\Psi-\Phi));$$

отсюда следует равенство (9).

III. *Пусть $\triangle OPQ$ расположен на комплексной плоскости; p и q — комплексные координаты векторов $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$, причем* $0<\arg q-\arg p<\pi$. Тогда площадь треугольника OPQ (будем ее обозначать: (OPQ)) связана с числами p и q зависимостью:

$$\operatorname{Im}(\bar{p}\cdot q)=2(OPQ). \tag{10}$$

Для доказательства достаточно в (9) положить $\Phi=\arg p$, $\Upsilon=\arg q$ и учесть, что тогда правая часть в (9) — это удвоенная площадь $\triangle OPQ$.

IV. *Пусть в* $\triangle OPQ$ *векторы* $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ *и* $\overrightarrow{PQ}$ *имеют соответственно комплексные координаты* p, q *и* m, *причем* $0<\arg q-\arg p<\pi$. *Тогда*

$$2(OPQ)=\operatorname{Im}(\bar{p}\cdot m). \tag{11}$$

В самом деле, пусть q — комплексная координата вектора $\overrightarrow{OQ}$. Тогда

$$2(OPQ)=\operatorname{Im}(\bar{p}\cdot q)=\operatorname{Im}(\bar{p}\cdot(p+m))=\operatorname{Im}(|p|^2+\bar{p}\cdot m)=$$
$$=\operatorname{Im}(\bar{p}\cdot m).$$

Примеры

1. В выпуклом пятиугольнике $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ (здесь $A_0=A_5$) известны длины a_1, a_2, a_3, a_4 четырех его последовательных сторон A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и три угла φ_1, φ_2, φ_3 при вершинах A_1, A_2, A_3. Вычислим площадь (S) этого пятиугольника.

Решение. Можем считать, что пятиугольник расположен на комплексной плоскости, нулевой точкой (началом координат) служит точка A_0, положительным лучом действительной оси служит луч A_0A_1 и вершины A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 следуют одна за другой при обходе контура пятиугольника против направления движения часовой стрелки. Угол между векторами $\overrightarrow{A_0A_1}$ и $\overrightarrow{A_1A_2}$ обозначим через β_1 и, вообще, угол между векторами $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$ и $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ обозначим через β_k ($k=$

$=1, 2, 3, 4$); это внешний угол при вершинах A_k. Комплексные координаты вершин многоугольника A_1, A_2, A_3, A_4 обозначим через z_1, z_2, z_3, z_4; координаты векторов-сторон $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$ — через c_1, c_2, c_3, c_4 (так что $|c_1|=a_1$, $|c_2|=a_2$, $|c_3|=a_3$, $|c_4|=a_4$. Так как при сложении векторов их комплексные координаты складываются (см. § 4), то имеем для площади (S) пятиугольника:

$$2S=2\,(A_0A_1A_2)+2\,(A_0A_2A_3)+2\,(A_0A_3A_4),$$

$$2S=\operatorname{Im}\,(\bar{z}_1z_2+\bar{z}_2z_3+\bar{z}_3z_4). \tag{12}$$

Эта формула выражает площадь пятиугольника через комплексные координаты его вершин в предположении, что $z_5=0$.

Учитывая сделанные выше замечания I—IV, получаем из (12):

$$2S=\operatorname{Im}\,(\bar{z}_1(z_1+c_2)+\bar{z}_2(z_2+c_3)+\bar{z}_3(z_3+c_4))=$$

$$=\operatorname{Im}(|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+\bar{z}_1c_2+\bar{z}_2c_3+\bar{z}_3c_4)=$$

$$=\operatorname{Im}\,(\bar{c}_1c_2+(\bar{c}_1+\bar{c}_2)c_3+(\bar{c}_1+\bar{c}_2+\bar{c}_3)c_4),$$

$$2S=\operatorname{Im}\,(\bar{c}_1c_2+\bar{c}_1c_3+\bar{c}_1c_4+\bar{c}_2c_3+\bar{c}_2c_4+\bar{c}_3c_4). \tag{13}$$

Эта формула выражает площадь пятиугольника через комплексные координаты его векторов-сторон.

Мы обозначали угол $(\widehat{\vec{c}_1, \vec{c}_2})$ (между векторами $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$) через β_1, угол $(\widehat{\vec{c}_2, \vec{c}_3})$ — через β_2, $(\widehat{\vec{c}_3, \vec{c}_4})$ — через β_3.

Видим, что если повернуть вектор $\vec{c}_1$ на угол β_1, то получим вектор, сонаправленный с вектором $\vec{c}_2$; если затем вновь полученный вектор повернуть на угол β_2, то получим вектор, сонаправленный с $\vec{c}_3$; а если потом повернуть вектор $\vec{c}_3$ на угол β_3, то получим вектор, сонаправленный с вектором $\vec{c}_4$. Поэтому

$$(\widehat{\vec{c}_1, \vec{c}_3})=\beta_1+\beta_2,\quad (\widehat{\vec{c}_1, \vec{c}_4})=\beta_1+\beta_2+\beta_3,\quad (\widehat{\vec{c}_2, \vec{c}_4})=\beta_2+\beta_3.$$

В силу формулы (13) и замечаний имеем:

$$2S=a_1a_2\sin\beta_1+a_1a_3\sin(\beta_1+\beta_2)+$$
$$+a_1a_4\sin(\beta_1+\beta_2+\beta_3)+a_2a_3\sin\beta_2+$$
$$+a_2a_4\sin(\beta_2+\beta_3)+a_3a_4\sin\beta_3. \qquad (14)$$

Эта формула выражает площадь пятиугольника через четыре его стороны и три внешних угла. Теперь легко перейти к внутренним углам пятиугольника, если учтем, что $\beta_k=\pi-\varphi_k$ при $k=1$, 2, 3. Получаем

$$2S=a_1a_2\sin\varphi_1-a_1a_3\sin(\varphi_1+\varphi_2)+$$
$$+a_1a_4\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)+a_2a_3\sin\varphi_2-$$
$$-a_2a_4\sin(\varphi_2+\varphi_3)+a_3a_4\sin\varphi_3. \qquad (15)$$

Рассуждения, которые мы провели для пятиугольника, применимы и в случае n-угольника при любом n. А именно, можно доказать такое утверждение: *Если в выпуклом n-угольнике $A_0A_1A_2...A_n$ ($A_n=A_0$) длины $n-1$ последовательных сторон A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-2}A_{n-1}$ равны соответственно a_1, a_2, ..., a_n, а $n-2$ углов A_1, A_2, ..., A_{n-2}* равны φ_1, φ_2, ..., φ_{n-2}, то площадь (S) этого многоугольника может быть вычислена по формуле

$$2S=a_1a_2\sin\varphi_1-a_1a_3\sin(\varphi_1+\varphi_2)+...+$$
$$+(-1)^{n-3}a_1a_{n-1}\sin(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_{n-2})+$$
$$+a_2a_3\sin\varphi_2-a_2a_4\sin(\varphi_2+\varphi_3)+...+$$
$$+(-1)^{n-4}a_2a_{n-1}\sin(\varphi_2+...+\varphi_{n-2})+$$
$$+a_{n-2}a_{n-1}\sin\varphi_{n-2}. \qquad (16)$$

Более тщательный анализ показывает, что приведенные выше формулы применимы и в случае невыпуклого многоугольника.

Упражнения

18.1. В окружность вписан правильный пятнадцатиугольник $A_1A_2 \ldots A_{15}$. Проверьте: $A_1A_7 = A_1A_2 + A_1A_5$.

18.2. В плоскости правильного пятиугольника был взят вектор $\overrightarrow{MN}$ и спроектирован на пять прямых, содержащих пять различных сторон пятиугольника. В результате получилось пять векторов-проекций $\overrightarrow{M_1N_1}$, $\overrightarrow{M_2N_2}$, ..., $\overrightarrow{M_5N_5}$. Можно ли, зная величины этих пяти векторов, вычислить величину вектора $\overrightarrow{MN}$, породившего их?

18.3. Вершины семиугольника имеют комплексные координаты: 0; 2; $4+2i$, $3+4i$, $6i$, $-1+5i$, $-2+i$. Вычислите его площадь.

18.4. В шестиугольнике $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ $(A_6 = A_0)$ противоположные стороны попарно равны и параллельны. Известно, что $A_0A_1 = 2$, $A_1A_2 = 4$, $A_2A_3 = 1$, $\angle A_1 = 135°$, $\angle A_2 = 90°$. Вычислите площадь шестиугольника. Решите аналогичную задачу, если $\angle A_1 = \varphi_1$, $\angle A_2 = \varphi_2$.

§ 19. Как числа мнимые помогают изучать числа натуральные

Разнообразные задачи, касающиеся натуральных чисел, удается решить, если привлечь комплексные числа. Простейшие такие приложения связаны со свойствами модулей произведений:

$$|u_1 \cdot u_2|^2 = |u_1|^2 \cdot |u_2|^2, \quad |u^m|^n = |u^n|^m \quad \text{и т. п.}$$

Начнем с очень простого примера — «для разминки».

Примеры

1. Все мы знаем пример прямоугольного треугольника, у которого длины всех трех сторон выражаются целыми числами, а именно — «египетский треугольник»:

длины его сторон равны 3, 4 и 5 единицам и $3^2+4^2=5^2$. Как найти бесконечную серию целочисленных прямоугольных треугольников? Как найти бесконечную серию таких троек натуральных чисел x, y, v, которые удовлетворяли бы условию

$$x^2+y^2=v^2? \tag{1}$$

Решение. Какое отношение имеет равенство (1) к комплексным числам? Ну, конечно: левая часть есть квадрат модуля числа $z=x+yi$. Условие (1) можем переписать так:

$$|z|^2=v^2. \tag{2}$$

Следовательно, мы ищем такое комплексное число z с целочисленными компонентами и такое натуральное число v, что квадрат модуля числа z (то есть $|z|^2$) и квадрат числа v равны между собой.

Воспользуемся тождеством, верным для любого комплексного числа u:

$$|u^2|^2=(|u|^2)^2. \tag{3}$$

Отсюда видно, что если положить $u=m+ni$, где m и n — какие-либо целые числа, то левая часть равенства (3) окажется квадратом модуля некоторого комплексного числа с целочисленными компонентами, а правая часть будет точным квадратом некоторого целого числа (так как при целых m и n число $|u|^2$ — целое число). Следовательно, при $z=u^2$ и $v=|u|^2$ будет выполняться равенство (1).

Итак, полагаем: $u=m+ni$, где m и n — целые числа; $z=u^2$, $v=|u|^2$. Тогда имеем:

$$z=x+yi=(m+ni)^2=m^2-n^2+i2mn,$$

$$x=m^2-n^2, \quad y=2mn, \quad v=m^2+n^2. \tag{4}$$

При любых целых m и n тройка чисел (4) удовлетворяет равенству (1).

При некоторых целых m и n числа x и y могут оказаться отрицательными. А мы хотели найти лишь *натуральные* числа x, y, v, удовлетворяющие равенству (1).

Но этого добиться легко: достаточно полагать в формулах (4), что m и n — не произвольные целые, а лишь натуральные числа, причем $m > n$.

Легко теперь написать и более общие формулы для «пифагоровых троек», а именно:

$$x = \lambda(m^2 - n^2), \quad y = 2\lambda mn, \quad v = \lambda(m^2 + n^2), \tag{5}$$

где λ, m, n — произвольные натуральные числа, $m > n$.

В случае, когда m и n — оба четные или оба нечетные (короче: когда m и n — «одной и той же четности») не обязательно считать в (5), что число λ — целое; можно также считать, что λ имеет такой вид: $\lambda = \frac{1}{2}\mu$, где μ — произвольное натуральное число; при таком предположении относительно μ мы все равно получим пифагорову тройку натуральных чисел. Например, полагая в (5) $m = 5$, $n = 1$, $\mu = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, получим пифагорову тройку $x = \frac{1}{2}(5^2 - 1^2) = 12$, $y = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 = 5$, $v = \frac{1}{2}(5^2 + 1^2) = 13$. Заметим, что ту же пифагорову тройку мы могли бы получить при $m = 3$, $n = 2$, $\lambda = 1$.

2. $0^2 + 0^2 = 0^3$, $0^2 + 1^2 = 1^3$, $2^2 + 2^2 = 2^3$. Однако не так легко подобрать еще какую-либо тройку целых неотрицательных чисел x, y, v, связанных зависимостью $v^3 = x^2 + y^2$ (то есть таких, что куб одного из них равен сумме квадратов двух других). Найдем способ получить бесконечную серию таких целочисленных троек.

Р е ш е н и е. Число $x^2 + y^2$ можно рассматривать как квадрат модуля некоторого комплексного числа. Следовательно, и число v^3 должно оказаться квадратом модуля некоторого комплексного числа. Этого мы наверняка достигнем, если само число v окажется квадратом модуля комплексного числа. Действительно, если $v = |t_1 + it_2|^2 = t_1^2 + t_2^2$ (причем t_1, t_2 — целые числа), то $v^3 = (|t_1 + it_2|^2)^3 = |(t_1 + it_2)^3|^2$. Преобразуя правую часть, получим: $v^3=|(t_1^3-3t_1t_2^2)+i(3t_1^2t_2-t_2)|^2=(t_1^3-3t_1t_2^2)^2+$ $+(3t_1^2t_2-t_2^3)^2$. Теперь ясно, что равенство $v^3=x^2+y^2$ будет заведомо выполнено, если положим $v=t_1^2+t_2^2$, $x=|t_1^3-3t_1t_2^2|$, $y=|3t_1^2t_2-t_2^3|$. Например, при $t_1=1$, $t_2=$ $=2$ найдем: $v=5$, $x=11$, $y=2$. Действительно, 11^2+ $+2^2=5^3$.

3. Существуют ли прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами, у которых длина гипотенузы является точным квадратом (квадратом целого числа)? Оказывается, существуют. Требуется указать формулы, позволяющие получить бесконечно много таких треугольников.

Решение. Обозначим через x и y длины катетов, а через v^2 — длину гипотенузы. По условию задачи ищем такие тройки натуральных чисел x, y, z, чтобы имело место равенство $v^4=x^2+y^2$. Будем искать v в виде $v=|t_1+it_2|^2$, где t_1, t_2 — целые числа. Воспользуемся тождеством: $(|t_1+it_2|^2)^4=|(t_1+it_2)^4|^2$. Получаем:

$$(v^2)^2=v^4=|((t_1^2-t_2^2)+2it_1t_2)^2|^2=|(t_1^2-t_2^2)^2-4t_1^2t_2^2+$$
$$+i\cdot 4t_1t_2(t_1^2-t_2^2)|^2=((t_1^2-t_2^2)^2-4t_1^2t_2^2)^2+(4t_1t_2(t_1^2-t_2^2))^2.$$

Отсюда видно, что, если

$$x=|(t_1^2-t_2^2)-4t_1^2t_2^2|,$$
$$y=|4t_1t_2\cdot(t_1^2-t_2^2)|,\quad v=t_1^2+t_2^2 \qquad (6)$$

(t_1 и t_2 — произвольные целые числа), то x, y, v будут удовлетворять условию $x^2+y^2=v^4$. Например, при $t_1=$ $=2$, $t_2=1$ получаем: $x=7$, $y=24$, $v=5$. Легко проверить, что $7^2+24^2=(5^2)^2$. Заметим попутно, что формулы (6) не дают всех решений данной задачи: если x, y, v — три натуральных числа, задаваемые формулами (6), а k — любое натуральное число, то и числа $x_1=k^2x$, $y_1=k^2y$, $v_1=kv$ также удовлетворяют условию задачи. Например, при $x=7$, $y=24$, $v=5$, $k=2$, получим: $x_1=28$, $y_1=96$, $v_1=10$. Можно проверить, что 28^2+ $+96^2=100^2$. ▲

Комплексные числа вида $m+ni$, где m и n — действительные целые числа, называют *целыми комплексными* или *гауссовыми.* Гаусс построил теорию таких чисел, нашел для них важные приложения при изучении натуральных чисел (1832 г.). Основные понятия *арифметики гауссовых чисел* вводятся по аналогии с такими же понятиями для натуральных чисел.

1. Все гауссовы числа изображаются на комплексной плоскости в виде узлов целочисленной решетки (рис. 43).

2. Сложение, вычитание и умножение гауссовых чисел приводит, очевидно, к гауссову числу. Это обстоятельство в алгебре выражают так: «Совокупность всех гауссовых чисел образует *кольцо*». Это кольцо обозначают через G или $K(i)$.

3. Гауссово число h естественно назвать *кратным гауссову числу* g, если частное h/g является *гауссовым* числом (иначе говоря, если найдется такое гауссово число c, что $h=c\cdot g$). В этом же случае число g называют *делителем* числа h. Например, число $1+i$ кратно числу $1-i$ ($1-i$ — делитель числа $1+i$), потому что

$$\frac{1+i}{1-i}=i,$$

а i — целое комплексное число. Другой пример: гауссово число $2+3i$ — делитель числа 13, потому что $13:(2+3i)=2-3i$, а это гауссово число.

Множество всех чисел, кратных заданному гауссову числу g ($g\neq 0$), изобразится на комплексной плоскости в виде совокупности узлов некоторой целочисленной решетки (см. рис. 44, где $g=-1+4i$). Это узлы сетки, составленной из одинаковых квадратов, причем площадь каждого квадрата равна $|g|^2$. Совокупность этих чисел $K(g)$ «замкнута» относительно сложения, вычитания и умножения (то есть сумма, разность, произведение двух чисел из этой совокупности тоже принадлежит этой совокупности). Иначе говорят: $K(g)$ — кольцо. Запись $K(g)$ будем читать так: «кольцо, порожденное (гауссовым)

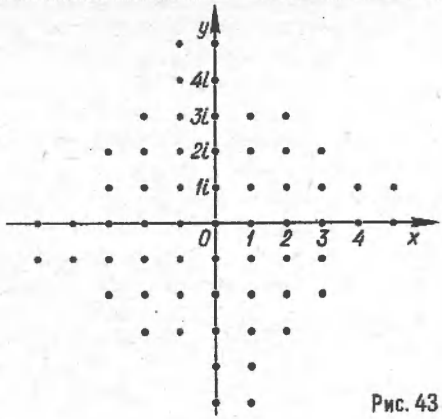


Рис. 43

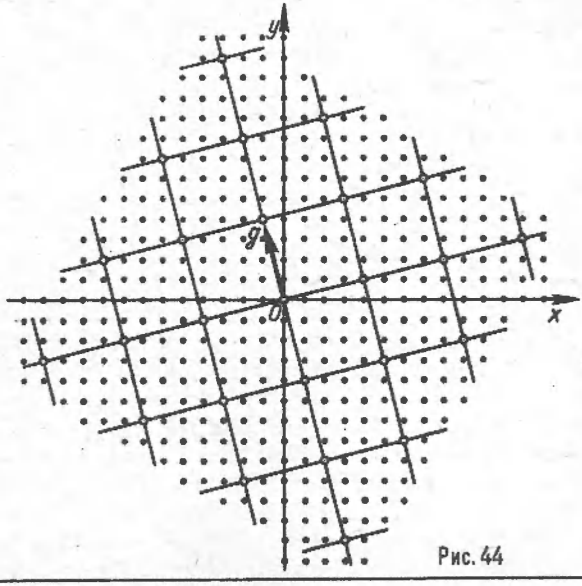


Рис. 44

числом g». Соответствующая решетка на комплексной плоскости — наглядное изображение этого кольца. Если вы попытаетесь построить решетки для колец $K(1)$, $K(-1)$, $K(i)$, $K(-i)$, то легко обнаружите, что эти решетки (а значит, и указанные кольца) совпадают (так как любое гауссово число делится на 1, на -1, на i и на $-i$). Легко также обнаружить, что при любом выборе гауссова числа g $(g \neq 0)$ решетка для кольца $K(g)$ при повороте вокруг нулевой точки на 90°, 180°, 270° переходит сама в себя.

4. Как известно, *простым натуральным числом* называют такое число, которое не имеет других натуральных делителей, кроме единицы и самого себя. Для гауссовых чисел такое определение бесполезно, потому что любое гауссово число g имеет, помимо самого себя и единицы, еще, по крайней мере, шесть делителей: -1, i, $-i$, $-g$, ig, $-ig$. Поэтому Гаусс дал такое определение: *целое комплексное число g назовем простым в кольце G, если оно не делится ни на какое целое комплексное число, отличное от чисел ± 1, $\pm i$, $\pm g$, $\pm ig$.* Четыре числа ± 1, $\pm i$ обладают тем свойством, что если единицу разделить на любое из них, то опять получим гауссово число; поэтому их называют *делителями единицы.* Все непростые (гауссовы) числа называют *составными.* Например, можно проверить, что числа $1-i$, 7 — простые гауссовы числа, а число 2 в кольце гауссовых чисел уже составное. В самом деле, $2=(1+i)(1-i)$. Еще Ферма подметил (а Эйлер доказал), что любое простое (в множестве натуральных чисел) число вида $4n+1$ можно представить в виде суммы двух точных квадратов натуральных чисел: $4n+1=p^2+q^2$. Но $p^2+q^2=(p+iq)(p-iq)$. Следовательно, каждое такое натуральное число вида $4n+1$, которое в множестве натуральных чисел является простым, в множестве гауссовых чисел уже оказывается составным. Остальные нечетные простые числа — простые натуральные числа вида $4n+3$ — оказываются, как это можно доказать, также и *простыми гауссовыми*

числами. Числа ig, $-ig$, $-g$ Гаусс назвал *ассоциированными* с числом g. Например (простое) гауссово число $1+i$ ассоциировано с (простым) числом $1-i$ (так как $1+i=i(1-i)$).

5. Два целых комплексных числа Гаусс называл *взаимно простыми*, если у них нет общих делителей, отличных от ± 1 и $\pm i$.

6. Для натуральных чисел их разложение на простые множители является *единственным* (с точностью до порядка множителей). Для целых комплексных чисел имеет место сходная теорема. *Каждое гауссово число, не равное нулю, можно представить в виде произведения простых гауссовых чисел, и притом единственным образом — с точностью до порядка множителей и их замены ассоциированными с ними числами.*

7. Для любых натуральных чисел a и b $(b \neq 0)$ найдутся такие целые неотрицательные числа p и q, что $a=p \cdot b+q$, где $q<b$ (p — частное, q — остаток). Аналогичное утверждение верно и для гауссовых чисел. *Для любых двух гауссовых чисел h и g, где $g \neq 0$, найдется такое третье гауссово число c* (их частное), *что число $h-cg$ (остаток от деления числа h на число g) будет по модулю меньше, чем делитель g, $|h-cg|<|g|$.*

8. Для гауссовых чисел остаются в силе и некоторые другие утверждения, которые верны для натуральных чисел. В частности, *если произведение двух гауссовых чисел $g \cdot h$ делится на третье гауссово число c и один из множителей взаимно прост с числом c, то второй множитель делится на c.*

9. Известно, что если произведение двух взаимно простых натуральных чисел является точным кубом натурального числа, то и каждый из этих двух множителей является точным кубом [1]. Аналогичное верно и для

---

[1] В этом утверждении можно слова «точный куб» заменить словами «точная n-я степень», где n — натуральное число.

гауссовых чисел. *Если произведение двух взаимно простых гауссовых чисел является точным кубом некоторого гауссового числа, то и каждый из этих двух множителей ассоциирован с точным кубом гауссова числа* (то есть множители имеют вид $\varepsilon_1 u^3$ и $\varepsilon_2 v^3$, где ε_1 и ε_2 равны 1, -1, $-i$ или i, а $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 1$).

Доказательство утверждения 9 очевидно, если представить себе каждый точный куб разложенным в произведение простых множителей.

4. Найдем все пары нечетных целых чисел (x, v), удовлетворяющих уравнению $x^2 + 4 = v^3$.

Решение. Левую часть уравнения представим в виде произведения гауссовых чисел:

$$(x+2i)(x-2i) = v^3. \tag{7}$$

Выясним, не являются ли множители $x+2i$, $x-2i$ взаимно простыми (в кольце гауссовых чисел). Допустим, что существует какое-то простое гауссово число γ, на которое делятся оба эти числа. Тогда их разность $4i$ тоже делится на γ. Но $4i = -i(1+i)^4$, а γ — простое гауссово число, значит, число γ ассоциировано с простым гауссовым числом $1+i$. Так как $x+2i$ делится на γ, то должно найтись такое целое комплексное число $c+di$, что справедливо равенство

$$x + 2i = (1+i)(c+di) = (c-d) + i(c+d),$$

то есть

$$2 = c + d, \tag{8}$$

$$x = c - d. \tag{9}$$

Из равенства (8) ясно, что целые числа c и d или оба четные, или оба нечетные, и поэтому x должно оказаться четным. А по условию оно нечетное. Мы пришли к противоречию. Итак, *множители в левой части уравнения* (7) — *взаимно простые гауссовы числа.* Их произведение — точный куб, поэтому каждый из этих множителей является кубом некоторого гауссова числа $a+bi$

(с точностью до множителя вида ± 1 или $+i$). Это значит, что $x+2i$ можно представить в одном из таких видов:

$$x+2i=(a+bi)^3,$$
$$x+2i=-(a+bi)^3=(-a-bi)^3,$$
$$x+2i=i(a+bi)^3=(b-ai)^3,$$
$$x+2i=-i(a+bi)^3=(-b+ai)^3.$$

Все эти четыре случая объединяются в один случай: число $x+2i$ можно представить в виде точного куба гауссова числа:

$$x+2i=(m+ni)^3.$$

Найдем отсюда m, n, x. Имеем:

$$2=n(3m^2-n^2), \tag{10}$$
$$x=m(m^2-3n^2). \tag{11}$$

Из (10) ясно, что 2 делится на n, так что n должно быть одним из четырех чисел ± 1, ± 2. Но при $n=\pm 1$, как видно из (10), $3m^2-1$ четно и, значит, m нечетно. Следовательно (см. (11)), x четно, что противоречит условию. При $n=2$ имеем из (10): $3m^2=5$, так что *целого* m, удовлетворяющего формуле (10), не существует. При $n=-2$ получаем из (10): $m=\pm 1$. Поэтому возможны два варианта:

$$n=-2, \quad m=1, \quad x=-11 \quad \text{и} \quad v=5;$$
$$n=-2, \quad m=-1, \quad x=11 \quad \text{и} \quad v=5. \quad \blacktriangle$$

В решении уравнения из примера 4 решающую роль сыграло разложение суммы квадратов x^2+4 в произведение целых комплексных чисел.

Идея разложения суммы вида Ax^n+By^n в произведение комплексных множителей первой степени (относительно x и y) неоднократно привлекала к себе математиков прошлого и прежде всего в связи со знаменитой гипотезой, высказанной П. Ферма и известной под названием «большая гипотеза Ферма»: *при любом натуральном n, большем чем 2, не существует таких трех* *целых положительных чисел x, y, v, для которых было бы справедливо равенство*

$$x^n + y^n = v^n. \qquad (12)$$

Если обозначим через λ число $\exp\left(\frac{2\pi}{n} i\right)$, то корнями уравнения $\xi^n = 1$ будут числа $1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}$, и равенство (12) можно записать так:

$$(v-y)(v-\lambda y)(v-\lambda^2 y)\cdot\ldots\cdot(v-\lambda^{n-1}y) = x^n.$$

Это побудило в середине прошлого века некоторых математиков предпринять попытку применить к доказательству гипотезы Ферма комплексные числа вида $z = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1}$, где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ — действительные целые числа. В конечном итоге эта идея действительно привела к существенному продвижению в данной задаче (в частности, была доказана истинность гипотезы Ферма для большого числа номеров n, но пока еще не для всех n), а также оказала значительное влияние на все развитие современной алгебры и теории чисел.

Упражнения

19.1. На декартовой координатной плоскости рассматривается окружность радиуса $R = \sqrt{221}$, имеющая своим центром начало координат. Назовите расположенные на этой окружности 16 точек, имеющих целочисленные комплексные координаты.

19.2. *Нормой* гауссова числа g называется квадрат его модуля; она обозначается так: $N(g)$. Таким образом, $N(g) = |g|^2$. Например, $N(2+i) = 5$, $N(2-i) = 5$, $N(8-i) = 65$.

1) Пусть комплексное число h делится на комплексное число g. Верно ли, что $N(h)$ делится на $N(g)$?

2) Пусть $N(h)$ делится на $N(g)$. Верно ли, что число h делится на g?

19.3. Пусть относительно некоторого гауссова числа g известно, что его норма — простое число (в множестве натуральных чисел). Верно ли, что само g — простое (в кольце гауссовых чисел)?

19.4. Выясните, какие из следующих гауссовых чисел являются простыми, а какие нет: 1) $2+i$; 2) $3-2i$; 3) $8-i$. Если какое-либо из этих чисел составное, то найдите его разложение на простые множители.

19.5. Докажите: 1) число 7 является простым не только в множестве натуральных чисел, но и в кольце гауссовых чисел; 2) то же верно для любого натурального числа, дающего при делении на 4 остаток 3.

19.6. Пусть для гауссова числа g известно, что его норма $N(g)$ — составное число. Верно ли, что и g — составное гауссово число?

19.7. Назовите два прямоугольных треугольника с целочисленными катетами, один неравнобедренный и один равнобедренный, которые имели бы общую гипотенузу. Предложите способ для получения бесконечной серии пар таких треугольников.

19.8. 1) Вы взяли два натуральных числа n_1 и n_2 и оказалось, что каждое из них можно представить в виде суммы двух точных квадратов (например, $n_1=5=2^2+1^2$, $n_2=73=8^2+3^2$). Верно ли, что и их произведение $n=n_1\cdot n_2$ обладает тем же свойством?

2) Вы взяли два натуральных числа n_1 и n_2, и оказалось, что каждое из них можно представить в виде суммы шести точных квадратов, причем пять из них — одинаковые (таковы, например, числа $61=5\cdot 3^2+4^2$ и $69=7^2+5\cdot 2^2$). Верно ли, что и их произведение обладает тем же свойством?

3) Говорят, что натуральное число n_1 можно представить в виде квадратичной формы x^2+y^2+xy, если найдутся для него такие целые числа x_1 и y_1, что

$n_1 = x_1^2 + y_1^2 + x_1y_1$. Верно ли утверждение: если два натуральных числа можно представить в виде квадратичной формы $x^2 + y^2 + xy$, то тем же свойством обладает и их произведение?

4) Пусть p и q — два данных целых числа. Говорят, что число n можно представить в виде квадратичной формы $x^2 + pxy + qy^2$, если для этого числа найдутся такие целые числа x_1 и y_1, что $n = x_1^2 + px_1y_1 + qy_1^2$. Если каждое из двух целых чисел n_1 и n_2 можно представить в виде квадратичной формы $x^2 + pxy + qy^2$, то верно ли то же и для их произведения?

19.9. Уравнение $x^2 + y^2 = 7z^2$ имеет, очевидно, такое целочисленное решение: $x = y = z = 0$. Привлекая комплексные числа, выясните, имеет ли оно еще и другие целочисленные решения.

19.10. Существует ли четверка таких натуральных чисел a, b, c, d, которые удовлетворяют равенству:

$$a^2 + b^2 = 7(c^2 + d^2)?$$

19.11. О двух натуральных числах a и b известно, что сумма их квадратов делится на 19. Следует ли отсюда, что каждое из данных чисел делится на 19?

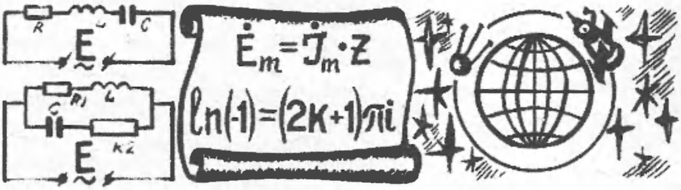
III

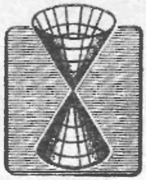
КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Внес замечательный вклад во все области математики, особенно в математический анализ. Одна из важнейших заслуг Коши — создание систематических основ общей теории функций комплексного переменного.

Выражения, которые все считали чисто символическими и не допускающими реального истолкования, входят в мир идей, обретая реальность и значимость.

У. ГАМИЛЬТОН





XIX век был свидетелем возникновения одной из наиболее изящных и богатых приложениями математических дисциплин — теории функций комплексного переменного (комплексного анализа). Из этой главы вы узнаете о том, что объединение двух обычных (действительнозначных) функций от одного действительного переменного в одну комплекснозначную функцию дает ключ к решению важных задач из области электротехники и механики. Аналогичная идея в случае функций двух действительных переменных ведет еще к более содержательным приложениям: объединение двух функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ от двух действительных переменных в одну комплекснозначную функцию $u(x, y)+iv(x, y)$, рассматриваемую как функцию от одного (!) комплексного переменного $x+iy$, нашло широкое практическое применение. Мы ознакомим читателя с простейшими примерами таких функций и их физическим толкованием как некоторых деформаций.

§ 20. Комплекснозначные функции действительного переменного

Заметного упрощения выкладок, большей компактности в записях можно в ряде случаев достигнуть благодаря объединению двух обычных (действительнозначных) функций действительного переменного в одну комплекснозначную функцию (того же переменного).

Пусть мы имеем две действительнозначные функции $u=\varphi_1(t)$ и $v=\varphi_2(t)$ от одного действительного переменного t (t пробегает некоторый интервал, или отрезок, или всю числовую прямую, или числовой луч). Полагая, что $w=u+iv$, мы можем построить комплекснозначную функцию

$$w=\varphi(t)=\varphi_1(t)+i\varphi_2(t) \tag{1}$$

с той же областью определения. Например, вместо двух функций $u=\cos t$, $v=\sin t (0\leqslant t\leqslant \pi)$ можно рассмотреть одну комплекснозначную функцию $w=\cos t+i\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant \pi)$, то есть $w=e^{it}$ $(0\leqslant t\leqslant \pi)$. Для комплекснозначной функции (1) можем ввести понятия «производная» и «интеграл», используя следующие формулы (которые следует рассматривать как определения):

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d\varphi_1}{dt}+i\frac{d\varphi_2}{dt}, \tag{2}$$

$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt=\int_\alpha^\beta \varphi_1(t)dt+i\int_\alpha^\beta \varphi_2(t)dt. \tag{3}$$

Элементарными выкладками можно показать, что применительно к комплекснозначным функциям действительного переменного остаются в силе известные правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного, степени с целым показателем, а также правило о законности вынесения постоянного (теперь уже комплексного) множителя из-под знака производной или интеграла.

Нетрудно проверить, что если комплекснозначные функции $F(t)$ и $\varphi(t)$ связаны зависимостью $F'(t)=\varphi(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant \beta)$, то при любых t_1, t_2, для которых $\alpha<t_1<t_2<$ $<\beta$, справедливо равенство (формула Ньютона-Лейбница):

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt=F(t_2)-F(t_1). \tag{4}$$

Примеры.

1. Пусть $w=e^{int}$ (n — целое число, $n\neq 0$). Найдем производную $\frac{d}{dt}(e^{int})$ и интеграл $\int_0^{2\pi} e^{int}dt$.

Р е ш е н и е. Так как $e^{int}=\cos nt+i\sin nt$, то по определению $\frac{dw}{dt}=\frac{d}{dt}(\cos nt)+i\frac{d}{dt}(\sin nt)=-n\sin nt+$

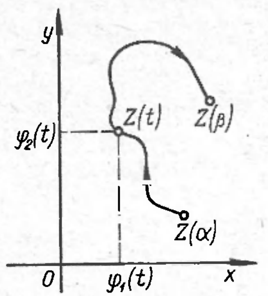


Рис. 45

$+in\cos nt = in(\cos nt + i\sin nt) = in\cdot e^{int}$. Итак,

$$\frac{d}{dt}(e^{int}) = ine^{int}. \qquad (5)$$

Искомый интеграл можно найти, например, с помощью формулы (4). Из (5) видно, что $e^{int} = \left(\frac{1}{in}e^{int}\right)'$.

Поэтому

$$\int_0^{2\pi} e^{int}dt = \frac{1}{in}e^{int}\Big|_0^{2\pi} = 0. \quad ▲$$

С помощью комплекснозначных функций действительного переменного удобно задавать плоские линии. Плоская кривая линия (рис. 45) часто задается параметрически двумя действительнозначными непрерывными функциями действительного аргумента:

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \qquad (6)$$

Вместо них можно воспользоваться только одной комплекснозначной функцией того же аргумента:

$$z = \varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \qquad (7)$$

(здесь $z = x + iy$).

2. Рассмотрим окружность с центром в точке (a_1, a_2) радиуса R. Она может быть задана двумя уравнениями (рис. 46):

$$x = a_1 + R\cos t, \qquad y = a_2 + R\sin t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Зададим ее в комплексной форме.

Р е ш е н и е. В комплексной форме эта окружность может быть задана так:

$$z = x + iy = (a_1 + ia_2) + R(\cos t + i\sin t)$$

или $z = a + Re^{it}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi;\ a = a_1 + ia_2)$.

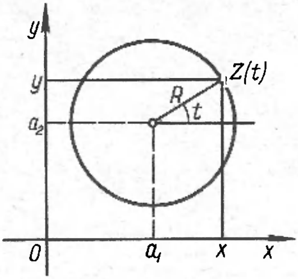


Рис. 46

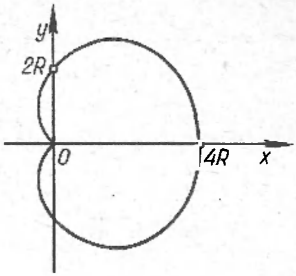


Рис. 47

3. Кардиоида[1] (рис. 47) задается двумя действительными уравнениями:

$$x=2R\cos t\cdot(1+\cos t),\qquad y=2R\sin t\cdot(1+\cos t)$$
$$(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

Найдем ее уравнение в комплексной форме.

Решение. $z=x+iy=R(2\cos t+1+\cos 2t+i(2\times\times\sin t+\sin 2t))=R(1+2e^{it}+e^{i2t})=R(1+e^{it})^2$, то есть комплексное уравнение кардиоиды такое:

$$z=R(1+e^{it})^2\qquad(0\leqslant t\leqslant 2\pi).\ \blacktriangle$$

Применение комплекснозначных функций позволяет более компактно записать формулу для длины кривой. В курсе математического анализа для длины $|\Gamma|$ кривой Γ, задаваемой уравнениями $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$, $\alpha\leqslant\leqslant t\leqslant\beta$, известна формула:

$$|\Gamma|=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi_1'(t))^2+(\varphi_2'(t))^2}\,dt.$$

[1] *Кардиоиду* (в переводе с греческого означает: сердцевидная) можно определить как траекторию, которую опишет точка, расположенная на окружности радиуса R, когда эта окружность катится по другой окружности того же радиуса.

Рассмотрим функцию $\varphi(t)=\varphi_1(t)+i\varphi_2(t)$. Так как $\varphi'(t)=$ $=\varphi_1'(t)+i\varphi_2'(t)$, то формулу для длины кривой можно, очевидно, записать более компактно.

$$|\Gamma|=\int_{\alpha}^{\beta}|\varphi'(t)|\,dt.$$

4. Вычислим длину кардиоиды.

Решение. В силу симметрии ее относительно оси Ox достаточно вычислить длину $|\Gamma_1|$ половины кардиоиды, т. е. дуги

$$z=\varphi(t)=R(1+e^{it})^2 \qquad (0\leqslant t\leqslant\pi).$$

Имеем: $\varphi'(t)=R\cdot 2(1+e^{it})\cdot ie^{it}$. Так как $|i|=1$, $|e^{it}|=$ $=1$, $|1+e^{it}|=|(1+\cos t)+i\sin t|=\sqrt{(1+\cos t)^2+\sin^2 t}=$ $=\sqrt{4\cos^2\frac{t}{2}}=2\cos\frac{t}{2}$, при $0\leqslant t\leqslant\pi$, то $|\varphi'(t)|=4R\times$ $\times\cos\frac{t}{2}$, поэтому $|\Gamma_1|=\int_0^{\pi}4R\cos\frac{t}{2}\,dt=8R\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}=$ $=8R$. Значит, $|\Gamma|=16R$ — длина кардиоиды.

* § 21. Мнимые числа и переменный ток

В конце XIX в. комплексные числа нашли новое важное применение, связанное с расчетом цепей переменного тока. Для расчета цепей постоянного тока к тому времени уже имелись удобные и простые приемы, опирающиеся на закон Ома и правила (законы) Кирхгофа. Все это позволило с помощью средств элементарной алгебры решать разнообразные электротехнические задачи. Многие такие решения уже тогда входили (и сейчас входят) в учебники физики.

Ничего похожего не было известно в то время для цепей переменного тока. Переменный ток, с которым приходилось иметь дело, был синусоидальным. Это означает, что сила тока I в каждом из отдельных участков

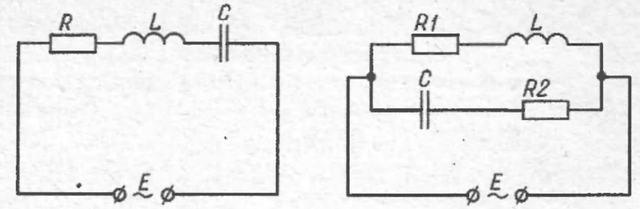


Рис. 48 Рис. 49

цепи изменяется по синусоидальному закону, то есть выражается для любого момента времени t формулой вида:

$$I = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi),$$

где I_m — постоянное положительное число (амплитуда тока), ω — циклическая частота, φ — начальная фаза. ЭДС цепи также изменяется по синусоидальному закону, то есть она задается формулой вида:

$$\mathscr{E} - \mathscr{E}_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $\mathscr{E}_m > 0$ — постоянное число (амплитуда ЭДС), ω — частота, φ_0 — начальная фаза ЭДС. Сформулируем две простейшие задачи для цепей переменного тока.

Задача 1. К зажимам электрической цепи (рис. 48) приложена синусоидальная ЭДС $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$. Цепь состоит из последовательно включенных сопротивления R, индуктивности L и емкости C. Какой будет сила тока в цепи в данный момент времени t?

Задача 2. К зажимам электрической цепи (рис. 49) приложена синусоидальная ЭДС $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. Цепь состоит из двух параллельных ветвей, причем в одной из них последовательно включены сопротивление $R1$ и индуктивность L, а в другой — емкость C и сопротивление $R2$. Какой будет сила тока в момент времени t

в неразветвленной части цепи? Какой будет сила тока в каждой из ветвей цепи в данный момент времени t?

Как же решаются подобные задачи?

В 1893 г. молодой американский электротехник Ч. П. Штейнмец предложил и детально разработал способ решения задач на расчет цепей переменного (синусоидального) тока. Этот метод основан на применении комплексных чисел и называется *методом комплексных амплитуд* или *символическим методом*.

Что такое комплексная амплитуда? Пусть сила тока I в цепи изменяется по синусоидальному закону, то есть задается формулой вида:

$$I = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi), \tag{1}$$

где $I_m > 0$ — амплитуда тока, ω — частота, φ — начальная фаза. Вспомнив формулу Эйлера, замечаем, что величину I можно рассматривать как мнимую часть комплексной величины [1].

$$\dot{I} = I_m \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}. \tag{2}$$

Таким образом,

$$I = \operatorname{Im} \dot{I} = \operatorname{Im}(I_m \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}). \tag{3}$$

Величину $\dot{I}$ иногда называют *комплексным током (комплекс тока)*.

Понятно, что

$$\dot{I} = \dot{I}_m \cdot e^{i\omega t}, \tag{4}$$

где

$$\dot{I}_m = I_m \cdot e^{i\varphi}. \tag{5}$$

Величину $\dot{I}_m$ называют *комплексной амплитудой* тока.

---

[1] В литературе по электротехнике обычно обозначают мнимую единицу буквой j (так что $j^2 = -1$), сохраняя букву i для обозначения силы тока. Мы оставим обозначение i для мнимой единицы. Точка $(\cdot)$ сверху над буквой часто используется в электротехнике при обозначении величин, принимающих комплексные значения.

Если к электрической цепи приложена внешняя ЭДС $\mathscr{E}$, изменяющаяся по синусоидальному закону:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (6)$$

то $\mathscr{E}$ можно рассматривать как мнимую часть некоторой комплексной величины

$$\dot{\mathscr{E}} = \mathscr{E}_m \cdot e^{i(\omega t + \varphi_0)} \qquad (7)$$

($\dot{\mathscr{E}}$ — комплекс ЭДС).

Величина

$$\dot{\mathscr{E}}_m = \mathscr{E}_m \cdot e^{i\varphi_0} \qquad (8)$$

называется *комплексной амплитудой* ЭДС. Понятно, что

$$\dot{\mathscr{E}} = \dot{\mathscr{E}}_m \cdot e^{i\omega t}. \qquad (9)$$

Для дальнейшего полезно заметить, что, если известна частота ω колебания тока, то задача нахождения силы тока I для произвольного момента времени t и задача нахождения комплексной амплитуды $\dot{I}_m$ (в силу формул (1) — (5)) равносильны; то же можно сказать (см. формулы (6) — (9)) и о ЭДС. Действительно, если известна комплексная амплитуда тока $\dot{I}_m$, то по формуле (4) легко найти комплекс тока, а затем и силу тока I как его мнимую часть. Рассмотрим несколько примеров.

Чарльз Протеус ШТЕЙНМЕЦ (1865—1923) родился в Бреславле (ныне Вроцлав), который тогда находился под властью Пруссии. В 1887 г. Штейнмец был вынужден, спасаясь от полиции, которая преследовала его за участие в движении социалистов, эмигрировать сначала в Швейцарию, а затем в США, где работал ведущим инженером.

Примеры.

1. В цепи течет переменный ток, величина которого (в амперах) I изменяется по синусоидальному закону: $I=20\sin\left(100t+\frac{\pi}{2}\right)$. Какова комплексная амплитуда этого тока? Каков комплекс тока?

Решение. Из условия следует, что амплитуда тока $I_m=20A$, циклическая частота $\omega=100c^{-1}$, начальная фаза $\varphi=\frac{\pi}{2}$ радиан. По формулам (5) или (4) находим комплексную амплитуду $\dot{I}_m$ и комплекс тока: $\dot{I}_m=20e^{i\frac{\pi}{2}}=20i$, $\dot{I}=20i\cdot e^{i\cdot 100t}$.

2. Комплексная амплитуда $\dot{\mathscr{E}}_m$ ЭДС источника переменного тока равна $-10+10i$, циклическая частота изменения ЭДС $\omega=50c^{-1}$. Запишем значение ЭДС ($\mathscr{E}$) в любой момент времени t.

Решение. Для записи комплексной амплитуды $\dot{\mathscr{E}}_m$ в показательной форме найдем ее модуль и аргумент: $|\dot{\mathscr{E}}_m|=\sqrt{(-10)^2+10^2}=10\sqrt{2}$, $\arg\dot{\mathscr{E}}_m=\frac{3\pi}{4}$. Поэтому $\dot{\mathscr{E}}_m=10\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}$, $\dot{\mathscr{E}}=\dot{\mathscr{E}}_m\cdot e^{i\omega t}=10\sqrt{2}e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}\cdot e^{i\cdot 50t}=10\sqrt{2}\times e^{i\left(50t+\frac{3\pi}{4}\right)}$. Беря от $\dot{\mathscr{E}}$ мнимую часть, получим: $\mathscr{E}=10\sqrt{2}\sin\left(50t+\frac{3\pi}{4}\right)$.

Сложение синусоидальных токов. Пусть в некоторой цепи переменного тока имеются две ветви, соединенные параллельно. Пусть по ним проходят токи $I'(t)$ и $I''(t)$ одной и той же частоты ω. Тогда при объединении этих ветвей в одну цепь по ней будет проходить ток $I=I'+I''$. Этот факт можно считать установлённым экспериментально. Принято говорить в подобной ситуации, что произошло сложение токов. Что же происходит при сложении токов с их комплексными амплитудами? Пусть токи I', I'' и I имеют комплексные амплитуды соответственно $\dot I'_m$, $\dot I''_m$ и $\dot I_m$. Тогда

$$I = I' + I'' = \operatorname{Im} \dot I' + \operatorname{Im} \dot I'' = \operatorname{Im}(\dot I' + \dot I'') =$$
$$= \operatorname{Im}(\dot I'_m \cdot e^{i\omega t} + \dot I''_m \cdot e^{i\omega t}) = \operatorname{Im}((\dot I'_m + \dot I''_m) e^{i\omega t}).$$

Отсюда ясно, что I — периодическая функция от времени t с частотой ω и что

$$\dot I_m = \dot I'_m + \dot I''_m.$$

Итак, хотя при сложении синусоидальных токов одной и той же частоты их амплитуды,вообще говоря, не складываются, их комплексные амплитуды складываются.

3. Сложим два тока одной и той же циклической частоты $\omega = 50c^{-1}$, если известно, что они имеют такие комплексные амплитуды (в амперах): $\dot I'_m = 15 + 20i$ и $\dot I''_m = 25 - 60i$.

Решение. Найдем сначала комплексную амплитуду суммарного тока:

$$\dot I_m = \dot I'_m + \dot I''_m = 40 - 40i = 40\sqrt{2} \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{4}}.$$

Поэтому

$$\dot I = 40\sqrt{2}\, e^{-i \cdot \frac{\pi}{4}} \cdot e^{i \cdot 50t} = 40\sqrt{2} \cdot e^{i\left(50t - \frac{\pi}{4}\right)},$$

$$I = \operatorname{Im} \dot I = 40\sqrt{2} \sin\left(50t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Комплексное сопротивление. Пусть имеется некоторая цепь, подключенная к генератору с ЭДС, изменяющейся по синусоидальному закону с частотой ω. В этой цепи могут встретиться активные сопротивления, индуктивности (катушки), емкости (конденсаторы). Следуя Штейнмецу, сопоставим каждой катушке, имеющей индуктивность L, чисто мнимое число $R_L = i\omega L$, которое условимся называть *комплексным сопротивлением* этой катушки. Каждому конденсатору, имеющему емкость C, сопоставим чисто мнимое число $R_c = -\frac{1}{\omega C} \cdot i$, которое будем называть *комплексным сопротивлением* этого конденсатора. Кроме того, если в цепи имеется активное сопротивление величины R, то поставим ему в соответствие действительное число R, которое назовем *комплексным сопротивлением* этого активного сопротивления.

Если имеется цепь, составленная из последовательно соединенных активных или реактивных сопротивлений (резисторов, катушек, конденсаторов), то условимся называть комплексным сопротивлением цепи комплексное число Z, которое равно сумме комплексных сопротивлений составляющих элементов. Число Y, обратное числу Z $\left(Y = \frac{1}{Z}\right)$, называют *комплексной проводимостью цепи*, величину $|Z|$ — *полным сопротивлением цепи* $\left(|Z| = |R + R_L + R_C| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\right)$.

Рассмотрим несколько примеров.

4. В цепь последовательно включены реостат с сопротивлением $R = 20$ Ом, конденсатор емкости $C = 0{,}000127$ Ф и катушка индуктивности $L = 0{,}1275$ Гн. Цепь подключена к генератору, дающему синусоидальную ЭДС с частотой $f = 50$ Гц. Вычислим комплексное и полное сопротивление цепи.

Р е ш е н и е. Имеем: $\omega = 2\pi f \approx 314$ с$^{-1}$. Комплексное сопротивление Z вычислим по формуле $Z = R + R_L + R_C$, где $R_L = i\omega L \approx 314 \cdot 0{,}1275 i$; $R_C = -\frac{1}{\omega c} i \approx -\frac{1}{314} \times \frac{1}{0{,}000127} i$. Поэтому $Z = 20 + i\left(314 \cdot 0{,}1275 - \frac{1}{314} \times \frac{1}{0{,}000127}\right) \approx (20 + 15i)$ Ом. Полное сопротивление цепи находим по формуле

$$|Z| = \left|R + i\omega L - \frac{i}{\omega c}\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}, \quad (10)$$

то есть в нашем случае $|Z| = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ Ом. ▲

Пусть в цепь переменного тока параллельно включены два элемента, имеющие комплексные сопротивления соответственно Z_1 и Z_2. *Комплексным сопротивлением* такой цепи условимся называть число Z, определяемое из равенства $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$. Отсюда

$$Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (11)$$

Если через Y, Y_1, Y_2 обозначить соответственно комплексную проводимость всей цепи, проводимости первого и второго элементов, то получим: $Y = Y_1 + Y_2$.

5. Цепь, состоящая из двух параллельных ветвей (рис. 49), имеет следующие параметры: $R_1 = 19{,}7$ Ом, $L = 0{,}031$ Гн; $R_2 = 44$ Ом, $C = 0{,}000096$ Ф. Определим комплексные сопротивления каждой из ветвей и полное сопротивление всей цепи, если по ней проходит ток с частотой $f = 50$ Гц.

Решение. $\omega = 2\pi f \approx 314$; $R_L = i\omega L \approx 9{,}8i$; $R_C = -\frac{i}{\omega C} \approx -33i$. Находим комплексное сопротивление Z_1 первой ветви: $Z_1 = R_1 + R_L = 19{,}7 + 9{,}8i$ и комплексное сопротивление Z_2 второй ветви: $Z_2 = R_2 + R_C = 44 - 33i$. По формуле (11) вычислим комплексное сопротивление всей цепи:

$$Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(19{,}7 + 9{,}8i)(44 - 33i)}{63{,}7 - 23{,}2i} \approx 15{,}4 - 9{,}04i.$$

Определяем полное сопротивление всей цепи:

$$|Z| = \sqrt{15{,}4^2 + 9{,}04^2} \approx 17{,}9 \text{ (Ом)}.$$

Закон Ома для цепи переменного тока. Представим себе, что имеется цепь, подключенная к источнику известной ЭДС $\mathscr{E}$, меняющейся по синусоидальному закону. Нас интересует, какой будет сила тока в цепи в любой момент времени t. Что же нужно знать, кроме $\mathscr{E}$, чтобы ответить на этот вопрос? Оказывается, достаточно знать лишь комплексное сопротивление Z цепи.

Для случая цепей переменного тока Штейнмецу удалось подметить факт, аналогичный закону Ома для цепей постоянного тока. Если неразветвленная цепь (цепь, в которой включены только последовательно активные и реактивные элементы) подключена к источнику синусоидальной ЭДС с комплексной амплитудой $\dot{\mathscr{E}}_m$ и комплексное сопротивление цепи равно Z, то комплексная амплитуда тока $\dot{I}_m$ равна отношению комплексной амплитуды ЭДС источника к комплексному сопротивлению цепи:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{\mathscr{E}}_m}{Z}. \tag{12}$$

Найдя комплексную амплитуду $\dot{I}_m$, уже легко, как мы видели выше, вычислить силу тока I для любого момента времени t.

Полученные сведения позволяют решить поставленную выше задачу 1. В общем виде для ее решения можно использовать следующий алгоритм:

1. Зная параметры $\mathscr{E}_m$, φ_0, ω синусоидальной ЭДС $\mathscr{E}$ ($\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$), находим комплексную амплитуду ЭДС $\dot{\mathscr{E}}_m$ по формуле: $\dot{\mathscr{E}}_m = \mathscr{E}_m \cdot e^{i\varphi_0}$.

2. Находим комплексное сопротивление Z цепи (рис. 48) по формуле

$$Z = R + R_L + R_C = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}.$$

Для упрощения дальнейших вычислений целесообразно Z представить в показательной форме.

3. Применяя формулу (12), вычисляем комплексную

амплитуду тока $\dot{I}_m$, затем по формулам (4) и (3) определяем силу тока I в цепи в любой заданный момент времени t.

Подобный алгоритм можно составить и для решения задачи 2.

6. В цепи переменного тока под действием синусоидальной ЭДС $\mathscr{E}=220e^{i\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)}$ В проходит ток $I=$ $=22e^{i\left(\omega t+\frac{\pi}{5}\right)}$ А. Найдем комплексное сопротивление Z цепи и полное сопротивление цепи.

Решение. Предварительно найдем комплексную амплитуду $\dot{I}_m$ тока и комплексную амплитуду ЭДС $\dot{\mathscr{E}}_m$. Из условия следует, что амплитуда тока $I_m=22$, начальная фаза $\varphi_1=\frac{\pi}{5}$, амплитуда ЭДС $\mathscr{E}_m=220$, начальная фаза $\varphi_2=\frac{\pi}{4}$. Тогда

$$\dot{I}_m=I_m\cdot e^{i\varphi_1}=22e^{i\frac{\pi}{5}},\quad \dot{\mathscr{E}}_m=220e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}.$$

По формуле (12) находим комплексное сопротивление Z цепи:

$$Z=\frac{\dot{\mathscr{E}}_m}{\dot{I}_m}=\frac{220e^{i\frac{\pi}{4}}}{22e^{i\frac{\pi}{5}}}=10e^{i\frac{\pi}{20}}.$$

Полное сопротивление цепи $|Z|=|10e^{i\frac{\pi}{20}}|=10$ (Ом).

7. Катушка, активное сопротивление которой $R=$ $=11$ Ом, а индуктивность $L=0{,}136$ Гн, подключена к источнику, комплексная ЭДС которого равна $\dot{\mathscr{E}}=$ $=220\cdot e^{i\cdot 314t}$ В. Определим комплексную проводимость Y катушки и мгновенное значение силы тока в катушке.

Решение. Из выражения комплексной ЭДС $\mathscr{E}$ определим частоту, начальную фазу и комплексную амплитуду ЭДС: $\omega=314\ \text{с}^{-1}$, $\varphi_0=0$, $\dot{\mathscr{E}}_m=220\cdot e^{i0}=$ $=220$ В. Комплексное сопротивление Z катушки находим по формуле: $Z=R+R_L$, где $R_L=i\omega L$. Имеем: $R_L=$ $=42{,}6i$, $Z=11+42{,}6i$.

Комплексная проводимость катушки $Y=\frac{1}{Z}\approx$ $\approx\frac{1}{11+42{,}6i}\approx0{,}0057-0{,}022i$. Для дальнейшего удобно комплексную проводимость записать в показательной форме. Имеем:

$$|Y|=\sqrt{0{,}0057^2+0{,}022^2}\approx0{,}0227,$$

$$\arg Y\approx-\frac{5\pi}{12}\text{ рад},$$

поэтому $Y\approx0{,}0227e^{-i\cdot\frac{5\pi}{12}}$. По формуле (12) вычисляем комплексную амплитуду $\dot{I}_m$ тока:

$$\dot{I}_m=\frac{\dot{\mathscr{E}}_m}{Z}=\mathscr{E}_m\cdot Y=220e^{i\cdot0}\cdot0{,}0227e^{-i\frac{5\pi}{12}}\approx5e^{-i\frac{5\pi}{12}}.$$

Тогда по формулам (4) и (3) получим:

$$\dot{I}=5e^{-i\frac{5\pi}{12}}\cdot e^{i\cdot314t}=5e^{i\left(314t-\frac{5\pi}{12}\right)},$$

$$I=\operatorname{Im}\dot{I}=5\sin\left(314t-\frac{5\pi}{12}\right)A.$$

** Рассмотрим на примере те соображения, которые приводят к установлению закона Ома для цепей переменного тока (см. (12)).

Пусть имеется электрическая цепь, которая составлена из активного сопротивления R и индуктивности L, соединенных последовательно, и к контуру подключена внешняя ЭДС $\mathscr{E}$, изменяющаяся по синусоидальному закону. В цепи установится какой-то ток I, изменяющийся по синусоидальному закону. Выполняется следующая зависимость (как это устанавливается в курсе физики).

$$R\cdot I+L\cdot\frac{dI}{dt}=\mathscr{E}. \qquad (13)$$

Наша задача состоит в том, чтобы по константам R и L и действительной функции $\mathscr{E}=\mathscr{E}_m\cdot\sin(\omega t+\varphi)$ найти неизвестную функцию I переменного t.

Вместо того чтобы искать I, будем, следуя Штейнмецу, искать сначала комплексный ток $\dot{I}$. С этой целью рассмотрим вместо уравнения (13) уравнение

$$R\cdot\dot{I}+L\cdot\frac{d\dot{I}}{dt}=\dot{\mathscr{E}}, \qquad (14)$$

где $\dot{\mathscr{E}}=\dot{\mathscr{E}}_m\cdot e^{i\omega t}$, $\dot{\mathscr{E}}_m=\mathscr{E}_m\cdot e^{i\varphi}$ ($\dot{\mathscr{E}}$ — комплексная ЭДС, а $\dot{I}$ — комплексный ток).

Если нам удастся найти из уравнения (14) функцию $\dot{I}=\dot{I}(t)$, то затем легко найдем и $I(t)$, потому что функция $I(t)=\mathrm{Im}[\dot{I}(t)]$ будет, очевидно, удовлетворять уравнению (13).

Будем искать $\dot{I}(t)$ в виде

$$\dot{I}(t)=\dot{I}_m\cdot e^{i\omega t},$$

где $\dot{I}_m$ — некоторое неизвестное комплексное число:

$$\dot{I}_m=I_m\cdot e^{i\psi}(I_m>0).$$

Имеем:

$$\frac{d\dot{I}}{dt}=i\omega\dot{I}_m e^{i\omega t}=i\omega\dot{I}.$$

Уравнение (14) принимает вид:

$$R\cdot\dot{I}_m\cdot e^{i\omega t}+i\omega\dot{I}_m\cdot e^{i\omega t}\cdot L=\dot{\mathscr{E}}_m\cdot e^{i\omega t}$$

или

$$R\cdot\dot{I}_m+i\omega L\cdot\dot{I}_m=\dot{\mathscr{E}}_m.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{I}_m=\frac{\dot{\mathscr{E}}_m}{R+i\omega L}.$$

Так как $R+i\omega L=R+R_L=Z$, то $\dot{I}_m=\dfrac{\dot{\mathscr{E}}_m}{Z}$.

Упражнения

21.1. Запишите выражение комплексной амплитуды тока (в показательной и алгебраической форме), если $I_m = 6$ А, $\varphi = 30°$.

21.2. Комплексная амплитуда тока $\dot{I}_m = 15 \cdot e^{-i\frac{\pi}{9}}$. Запишите мгновенное значение силы этого тока в момент времени t, если его частота равна ω.

21.3. Катушка обладает активным сопротивлением $R = 40$ Ом и индуктивностью $L = 0{,}01$ Гн. Определите полное сопротивление катушки, если по ней проходит переменный ток с частотой $f = 100$ Гц.

21.4. В цепь последовательно включены две катушки, имеющие сопротивления $R_1 = 20$ Ом и $R_2 = 30$ Ом и индуктивности $L_1 = 0{,}01$ Гн и $L_2 = 0{,}0218$ Гн. Найдите полное комплексное сопротивление и комплексную проводимость этой цепи, если цепь подключена к источнику синусоидальной ЭДС с частотой $f = 50$ Гц.

21.5. В цепь параллельно включены реостат, имеющий сопротивление $R = 2$ Ом и катушка индуктивности $L = 0{,}02$ Гн. Цепь подключена к источнику, дающему синусоидальную ЭДС с частотой $f = 50$ Гц. Вычислите комплексное и полное сопротивление этой цепи.

21.6. Цепь, состоящая из последовательно включенных реостата, обладающего активным сопротивлением $R = 25$ Ом, и конденсатора емкостью $C = 0{,}000065$ Ф, подключена к источнику, комплексная ЭДС которого равна $E = 220e^{i \cdot 314t}$ В. Определите комплексное сопротивление Z цепи и значение силы тока I в цепи в любой момент времени t.

§ 22. Применение комплекснозначных функций в кинематике и динамике

Применение комплексных функций действительного аргумента позволяет компактно изложить ряд вопросов из области кинематики и динамики.

Пусть точка Z перемещается по плоскости (см. рис. 45). Выбрав прямоугольную систему координат xOy, можем считать, что движение происходит по комплексной плоскости, а точка Z имеет комплексную координату

$$z = x + iy,$$

причем $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. В каждый момент времени t точка Z будет иметь определенную скорость $\vec{v}(t)$, причем ее компоненты равны производным $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ (или $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$[1]). Следовательно, в каждый момент времени t скорость точки Z характеризуется комплексным числом $\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$, которое можно записать так: $\dot{z}(t)$. Аналогично ускорение $\vec{w}$ точки Z в каждый момент времени t задается комплексным числом

$$\ddot{z}(t) = \ddot{x}(t) + i\ddot{y}(t).$$

Числа $\dot{z}(t)$ и $\ddot{z}(t)$ будем называть *комплексной скоростью* и *комплексным ускорением* точки Z.

Примеры

1. (Равномерное движение точки по окружности). Пусть точка Z движется по некоторой окружности $|z| = R$ в положительном направлении с постоянной (по абсолютной величине) линейной скоростью v. Какое ускорение имеет эта точка (рис. 50)?

Решение. Пусть точка Z в момент $t = 0$ находилась в точке A. Угловая скорость точки Z равна ω.

---

[1] Часто производную функции $\Phi(t)$, где t — время, записывают так: $\dot{\Phi}(t)$; а ее вторую производную — $\ddot{\Phi}(t)$.

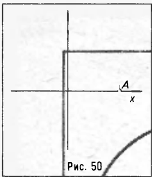


Рис. 50

Тогда $v = R\omega$. Точка Z имеет комплексную координату $z = Re^{i\omega t}$, комплексную скорость $\dot z = R\omega i e^{i\omega t}$, комплексное ускорение $\ddot z = -R\omega^2 e^{i\omega t} = -R\frac{v^2}{R^2}e^{i\omega t} = \frac{v^2}{R}(-e^{i\omega t})$. Отсюда видно, что $|\ddot z| = \frac{v^2}{R}$, а направление ускорения характеризуется ортом (вектором единичной длины), имеющим комплексную координату $-e^{i\omega t}$. А это значит, что точка Z движется с ускорением, которое в каждый момент t направлено к центру окружности.

2. (Разложение скорости точки на радиальную и трансверсальную компоненты). Пусть точка P (рис. 51) движется в плоскости по какому-либо закону, A — начало отсчета. Требуется найти компоненты скорости: радиальную v_r (проекцию вектора скорости на ось AP) и трансверсальную (или поперечную) v_n (проекцию вектора скорости на ось, образующую с осью AP угол $+\frac{\pi}{2}$ радиан).

Р е ш е н и е. Пусть AN — действительная ось Ax, $\measuredangle NAP = \varphi$. В каждый момент t точка P имеет комплексную координату $z = re^{i\varphi}$ (r и φ — функции от t). Скорость точки P характеризуется комплексным числом $\frac{dz}{dt}$ ($\dot z$). Дифференцируя по обычным правилам произведение $re^{i\varphi}$, получим:

$$\dot z = \dot r e^{i\varphi} + r\dot\varphi \cdot ie^{i\varphi}.$$

Отсюда ясно, что $v_r = \dot r$, $v_n = r\cdot\dot\varphi$.

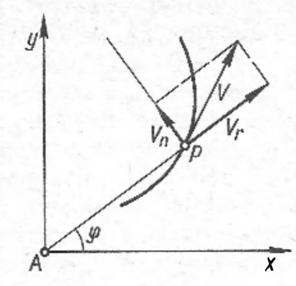


Рис. 5I

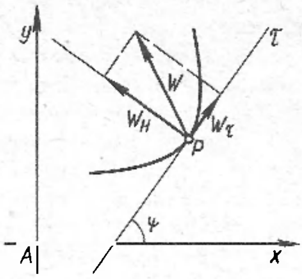


Рис. 52

3. (Разложение ускорения на тангенциальную и нормальную компоненты). Пусть точка P движется по некоторой кривой Γ так, что скорость точки задается в каждый момент t комплексным числом $v = v(t)$ (рис. 52). Понятно, что скорость будет в течение всего движения направлена по касательной τ к кривой, чего нельзя сказать об ускорении. Требуется найти проекции ускорения на касательную (w_τ) и на нормаль ($w_н$) к кривой.

Эта задача аналогична предыдущей. Запишем вектор скорости в комплексной форме:

$$\dot{z} = v \cdot e^{i\psi},$$

где v — абсолютная величина скорости точки P, а ψ — угол между осью Ox и касательной (τ) к кривой Γ. Дифференцируя по переменному t, получим:

$$w = \ddot{z} = \dot{v} \cdot e^{i\psi} + v \cdot \dot{\psi} i e^{i\psi}.$$

Отсюда ясно, что проекция w_τ вектора ускорения $\vec{w}$ на касательную ось τ равна $\dot{v}$, а проекция $w_н$ того же вектора $\vec{w}$ на ось, получающуюся из оси τ поворотом на $+\frac{\pi}{2}$ радиан, равна $v \cdot \dot{\psi}$:

$$w_\tau = \dot{v}, \quad w_н = v \cdot \dot{\psi}.$$

** 4. **(Задача двух тел).** Пусть материальная точка Z («спутник») движется на плоскости под влиянием тяготения к материальной точке A (притягивающего центра или гравицентра). Используя комплексные переменные, определим основные свойства такого движения.

Решение. Выберем прямоугольную систему координат xAy (рис. 53). Будем считать, что масса спутника настолько мала по сравнению с массой гравицентра, что допустимо пренебречь влиянием спутника на гравицентр (точнее, ускорением, которое спутник сообщает гравицентру). Согласно закону всемирного тяготения величина силы, с которой гравицентр притягивает спутник, равна $f\frac{M\cdot m}{r^2}$, где $r=|AZ|$, а M и m — массы гравицентра и спутника, f — универсальная константа тяготения. Направление этой силы характеризуется единичным вектором $-\vec{r}/r=\frac{-\overrightarrow{AZ}}{r}$. Поэтому интересующая нас сила задается вектором: $\vec{F}=-f\frac{M\cdot m}{r^3}\cdot\vec{r}$.

С другой стороны, эта сила равна (по второму закону Ньютона) $m\vec{w}$, где $\vec{w}$ — ускорение спутника. Приходим к равенству:

$$\vec{w}=-K\frac{\vec{r}}{r^3}, \tag{1}$$

где $K=f\cdot M$ (гравитационный параметр гравицентра). В том случае, когда недопустимо пренебречь влиянием спутника на гравицентр (например, когда речь идет о Земле и Луне), переменная координата спутника удовлетворяет уравнению того же вида (1), но в нем нужно полагать $K=f\cdot(M+m)$.

Векторное равенство (1) равносильно двум скалярным равенствам:

$$\ddot{x}=-\frac{K}{r^3}x,\quad \ddot{y}=-\frac{K}{r^3}y.$$

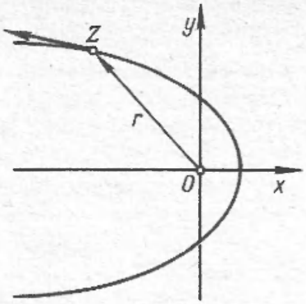


Рис. 53

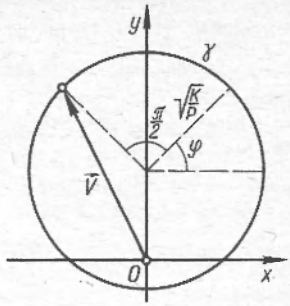


Рис. 54

Обозначая комплексную координату спутника буквой z, так что $z = x + iy$, объединим два равенства в одно комплексное равенство:

$$\ddot{z} = -\frac{K}{r^3} z. \tag{2}$$

Итак, в течение всего времени движения спутника его комплексная координата удовлетворяет условию (дифференциальному уравнению) (2).

Какие отсюда вытекают следствия? Умножая (2) на $\bar{z}$ и учитывая, что $z \cdot \bar{z} = r^2$, получим:

$$\bar{z} \cdot \ddot{z} = -\frac{K}{r},$$

откуда

$$\dot{\bar{z}} \cdot \dot{z} + \bar{z}\ddot{z} = -\frac{K}{r} + \dot{\bar{z}} \cdot \dot{z}, \text{ т. е. } \frac{d}{dt}(\bar{z} \cdot \dot{z}) = -\frac{K}{r} + |\dot{z}|^2.$$

Так как правая часть всегда действительное число, то

$$\mathrm{Im}\, \frac{d}{dt}(\bar{z} \cdot \dot{z}) = 0, \text{ т. е. } \frac{d}{dt}(\mathrm{Im}\,(\bar{z} \cdot \dot{z})) = 0$$

$$\text{и } \mathrm{Im}(\bar{z} \cdot \dot{z}) = \sigma = \mathrm{const}.$$

Вещественная константа σ называется *константой площадей*. Полагая в последнем равенстве $z = re^{i\varphi}$, найдем, что $\bar{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$, $\dot{z} = (\dot{r} + ir\dot{\varphi})e^{i\varphi}$, поэтому

$$\operatorname{Im}(r(\dot{r} + ir \cdot \dot{\varphi})) = \sigma,$$

или

$$r^2 \cdot \dot{\varphi} = \sigma. \tag{3}$$

Равенство (3) называется *интегралом площадей*. Из (2) и (3) ясно, что

$$-i\sigma\ddot{z} = i\frac{Kz}{r^3}(r^2 \cdot \dot{\varphi}) = iKe^{i\varphi} \cdot \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt}(-i\sigma \cdot \dot{z}) = \frac{d}{dt}(Ke^{i\varphi}),$$

откуда

$$-i\sigma \cdot \dot{z} - Ke^{i\varphi} = \Lambda = \text{const}. \tag{4}$$

Равенство (4) верно при *любом* направлении действительной оси. Выберем это направление таким образом, чтобы оно совпало с направлением вектора Λ. Тогда (4) приобретает вид:

$$-i\sigma \cdot \dot{z} - Ke^{i\varphi} = \lambda \quad (\lambda > 0). \tag{5}$$

Из равенств $\dot{z} = (\dot{r} + ir\dot{\varphi})e^{i\varphi}$ и $r^2 \cdot \dot{\varphi} = \sigma$ следует, что

$$\dot{z} = \left(\dot{r} + i\frac{\sigma}{r}\right)e^{i\varphi}. \tag{5$'$}$$

Отсюда и из (5) найдем:

$$-i\sigma \cdot \dot{r} + \frac{\sigma^2}{r} - K = \lambda e^{-i\varphi}.$$

Приравнивая действительные части обеих частей этого равенства, получим:

$$\frac{\sigma^2}{r} - K = \lambda \cos \varphi.$$

Отсюда при $\sigma \neq 0$ имеем:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \tag{6}$$

где

$$P=\frac{\sigma^2}{K}, \quad \varepsilon=\frac{\lambda}{K}. \tag{7}$$

Уравнение (6) и есть уравнение орбиты спутника в полярных координатах. При $\sigma \neq 0$ орбита имеет форму или эллипса (при $\varepsilon < 1$) или гиперболы (при $\varepsilon > 1$), или параболы (при $\varepsilon = 1$). Если $\sigma = 0$, тогда $r^2 \cdot \dot{\varphi} = 0$, то есть $\dot{\varphi} = 0$, $\varphi = \text{const}$. В этом случае орбита прямолинейна.

Найдем *скорость* спутника и ее *компоненты* v_r и v_n. Из (6), (3), (7) следует:

$$\dot{r}=\frac{P\varepsilon \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}=r^2\dot{\varphi}\frac{\varepsilon \sin \varphi}{P}=\frac{\sigma}{P}\varepsilon \sin \varphi=\sqrt{\frac{K}{P}}\varepsilon \sin \varphi.$$

Если еще учтем (5′), то найдем

$$\dot{z}=i\sqrt{\frac{K}{P}}(\varepsilon+e^{i\varphi}). \tag{8}$$

Так как абсолютная величина v скорости спутника равна $|\dot{z}|$, то

$$v=\sqrt{\frac{K}{P}}|e^{i\varphi}+\varepsilon|=\sqrt{\frac{K}{P}(1+\varepsilon^2+2\varepsilon \cos \varphi)}.^{1}$$

Компоненты скорости v_r и v_n найдем, если используем (8) и тождество $\dot{z}=v_r e^{i\varphi}+v_n ie^{i\varphi}$. Тогда

$$v_r+iv_n=\sqrt{\frac{K}{P}}\cdot i(\varepsilon e^{-i\varphi}+1),$$

отсюда

$$v_r=\sqrt{\frac{K}{P}}\varepsilon \sin \varphi, \quad v_n=\sqrt{\frac{K}{P}}(1+\varepsilon \cos \varphi).$$

[1] Здесь для вычисления удобно воспользоваться таким тождеством: $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}\,(z_1\cdot\bar{z}_2)$. В нашем случае $z_1=e^{i\varphi}$, $z_2=\varepsilon$.

$$\dot{z}=i\varepsilon\sqrt{\frac{K}{P}}+\sqrt{\frac{K}{P}}\,e^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)},$$

Из формулы (8) следует:

$$\sqrt{\frac{K}{P}} \qquad \sqrt{\frac{K}{P}}. \tag{9}$$

$$\left|\dot{z}-i\varepsilon\sqrt{\frac{K}{P}}\right|=\sqrt{\frac{K}{P}} \tag{10}$$

Таким образом, при любом φ точка $\dot{z}$ лежит на окружности γ с центром в точке $i\varepsilon\sqrt{\frac{K}{P}}$ и радиусом $\sqrt{\frac{K}{P}}$

Из (9) вытекает простой способ построения вектора скорости $\dot{z}$ для каждого заданного значения полярного угла φ: для этого следует (рис. 54) провести из центра $i\varepsilon\sqrt{\frac{K}{P}}$ окружности γ радиус, образующий угол $\varphi+\frac{\pi}{2}$ с действительной осью Ox. Вектор, идущий из начала координат O в конец этого радиуса, и есть искомый вектор скорости.

** § 23. Мнимые массы на мнимом расстоянии и реальная траектория спутника

Комплексные числа нашли применение при прогнозировании траекторий искусственных спутников Земли.

Если бы земной шар был действительно шаром и притом однородным, то спутник Земли двигался бы вокруг нее по эллипсу, в одном из фокусов которого находился бы центр Земли. В действительности Земля заметно приплюснута у своих полюсов, полярный радиус меньше экваториального радиуса примерно на 1/300 его длины (около 21 км), и это обстоятельство существенно влияет на траекторию спутника, форма которой имеет вид довольно сложной неплоской кривой (лишь в течение небольшого промежутка времени ее допустимо считать дугой эллипса). Вполне удовлетворительное для практики решение задачи о влиянии сплюснутости Земли на траекторию спутника удалось найти советским механикам в 1961 г. благодаря применению комплексных чисел.

Вернемся к тому случаю, когда спутник P движется в поле тяготения только одной материальной точки (гравицентра). Пусть гравицентром служит точка A с массой M. Выберем в пространстве систему координат $Axyz$ с началом в гравицентре A и осями Ax, Ay, Az, постоянно ориентированными в пространстве (относительно неподвижных «звезд») (рис. 55). Здесь и в дальнейшем будем считать, что влиянием спутника на движение гравицентра можно (ввиду небольшой массы спутника) пренебречь. Движение спутника определяется его положением и скоростью в какой-то начальный момент времени и векторным равенством $\vec{w} = -K\frac{\vec{r}}{r^3}$, которое равносильно трем скалярным равенствам (дифференциальным уравнениям):

$$\ddot{x} = -\frac{K}{r^3}x, \quad \ddot{y} = -\frac{K}{r^3}y, \quad \ddot{z} = -\frac{K}{r^3}z,$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $K = fM$, f — универсальная константа тяготения.

Три величины $-\frac{Kx}{r^3}$, $-\frac{Ky}{r^3}$, $-\frac{Kz}{r^3}$ можно рассматривать как производные соответственно по переменным x, y, z функции

$$\Phi(x, y, z) = \frac{K}{r}. \tag{1}$$

Эту функцию называют *силовой функцией*. Она определяется равенствами:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{K}{r^3}x, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{K}{r^3}y, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{K}{r^3}z.$$

В случае, когда спутник движется в другом гравитационном поле, его движение также определяется начальным положением, скоростью и системой условий (дифференциальных уравнений) вида:

$$\ddot{x}=F_1(x,\ y,\ z),\ \ddot{y}=F_2(x,\ y,\ z),\ \ddot{z}=F_3(x,\ y,\ z), \qquad (2)$$

а вид функций F_1, F_2, F_3 зависит от конкретного гравитационного поля. Вместо того чтобы искать эти три функции, часто предпочитают искать одну — силовую функцию $\Phi(x, y, z)$, то есть такую, что если от нее взять производные по переменным x, y, z, то получим F_1, F_2, F_3:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=F_1,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=F_2,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=F_3.$$

Например, если гравитационное поле создается однородным шаром с массой M, то, оказывается, силовая функция $\Phi(x,\ y,\ z)$ имеет такой же вид (1), и поэтому движение материальной точки (спутника) в этом поле происходит так же, как если бы вся масса центрального тела была сосредоточена в центре этого шара. Теоретические соображения (которые мы здесь не приводим) показывают, что сжатие Земли будет учтено, если силовую функцию взять в таком виде:

$$\Phi(x,\ y,\ z)=\frac{f\cdot M}{r}\left(1+\lambda_2\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 L_2(\sin\varphi)+\lambda_3\left(\frac{\rho}{r}\right)^3 L_3(\sin\varphi)+\right.$$

$$\left.+\ldots+\lambda_n\left(\frac{\rho}{r}\right)^n L_n(\sin\varphi)+\ldots\right), \qquad (3)$$

где M — масса Земли, ρ — экваториальный радиус Земли, r — расстояние от точки $P(x, y, z)$ до центра O Земли, φ — угол наклона радиуса-вектора $\overrightarrow{OP}$ к плоскости земного экватора (широта точки P); $L_1(t)$, $L_2(t)$, ..., $L_n(t)$,...— *многочлены Лежандра,* которые задаются формулами

$$L_1(t)=t,\quad L_2(t)=\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2},\quad \ldots,\quad L_n(t)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$$

(при $n=1, 2, \ldots$); λ_2, ..., λ_n, ...— константы (безразмерные), которые определяются из наблюдений. Известно, что

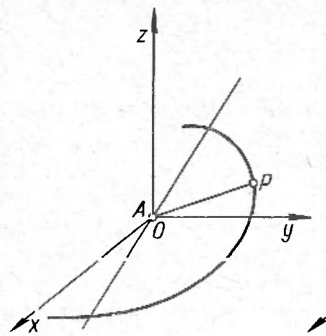


Рис. 55

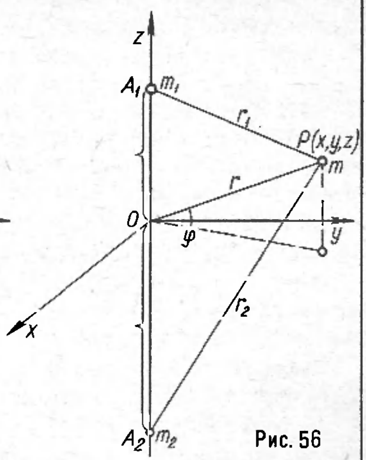


Рис. 56

$\lambda_2 = -1{,}082 \cdot 10^{-3}$, а λ_3, λ_4, ... значительно меньше по модулю ($\lambda_3 = 2{,}3 \cdot 10^{-6}$, $\lambda_4 = 2{,}1 \cdot 10^{-6}$, а λ_n при $n > 4$ известны плохо).

Если пренебречь в формуле (3) всеми членами, кроме первых двух, то получим достаточно хорошую приближенную формулу для силовой функции:

$$\Phi(x,\ y,\ z) = \frac{f \cdot M}{r}\left(1 + \lambda_2\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 L_2(\sin\varphi)\right). \qquad (4)$$

Однако наличие малого «возмущающего» слагаемого $\lambda_2\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 L_2(\sin\varphi)$ резко усложняет задачу математически, и найти (в виде достаточно обозримого аналитического выражения) траекторию из уравнений (2) уже не удается.

В механике существует другая гравитационная задача, в которой силовая функция имеет вид, аналогичный (3). Это задача о двух неподвижных притягивающих центрах, которую в 1765 г. решил Л. Эйлер. Она состоит в следующем. Вообразим себе, что имеются две притягивающие материальные точки A_1 и A_2 с массами m_1 и m_2, положение которых фиксировано в пространстве. Пусть O — их центр масс (рис. 56). Третья материальная точка (спутник) P имеет массу m, которая значительно меньше, чем m_1 и m_2 (так что ее влиянием на притягивающие центры A_1 и A_2 допустимо пренебречь). Требуется изучить движение точки P под действием тяготения к гравицентрам A_1 и A_2 (найти ее траекторию, если в какой-то начальный момент времени известны ее положение и скорость).

Выберем в пространстве систему координат следующим образом. В качестве начала координат возьмем точку O — центр масс двух материальных точек: A_1 с массой m_1 и A_2 с массой m_2. Ось аппликат Oz выберем так, чтобы она содержала вектор $\overrightarrow{OA_1}$ и была с ним сонаправлена. Пусть $OA_1=c_1$, $OA_2=c_2$. Плоскость xOy выберем так, чтобы она была перпендикулярна к A_1A_2.

В данном случае силовая функция равна сумме силовых функций гравитационных полей, создаваемых каждым из двух гравицентров A_1 и A_2. Поэтому

$$\Phi(x,\ y,\ z)=f\cdot\left(\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}\right).$$

Здесь

$$r_1=\sqrt{x^2+y^2+(z-c_1)^2}=\sqrt{r^2-2c_1z+c_1^2}=$$

$$=r\sqrt{1-2\frac{c_1}{r}\cdot\frac{z}{r}+\left(\frac{c_1}{r}\right)^2}=r\sqrt{1-2\frac{c_1}{r}\sin\varphi+\left(\frac{c_1}{r}\right)^2},$$

где φ — угол наклона вектора $\overrightarrow{OP}$ к плоскости xOy. Аналогично

$$r_2=r\sqrt{1-2\frac{c_2}{r}\cdot\frac{z}{r}+\left(\frac{c_2}{r}\right)^2}=r\sqrt{1-2\frac{c_2}{r}\sin\varphi+\left(\frac{c_2}{r}\right)^2}.$$

Усилиями Л. Эйлера, Ж. Лагранжа и К. Якоби было установлено, что задача о двух неподвижных центрах допускает вполне компактное, достаточно хорошо обозримое решение.

В течение двух столетий задача о двух неподвижных центрах служила примером чисто теоретической задачи, хорошо решаемой до конца методами математики, но не имеющей никакого применения. Ее практическое значение было обнаружено в 1961 г. Воспользуемся тем, что для многочленов Лежандра имеется такая зависимость (при $|\lambda|<1$):

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda\sin\varphi+\lambda^2}}=1+\lambda L_1(\sin\varphi)+\lambda^2 L_2(\sin\varphi)+$$
$$+\ldots+\lambda^n L_n(\sin\varphi)+\ldots .$$

Пользуясь этой формулой, мы обнаружим, что

$$\Phi(x,\ y,\ z)=\frac{f\cdot(m_1+m_2)}{r}\left(1+\frac{\gamma_1}{r}L_1(\sin\varphi)+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma_2}{r^2}L_2(\sin\varphi)+\ldots\right), \qquad (5)$$

где $(m_1+m_2)\gamma_1=m_1c_1+m_2c_2$; $(m_1+m_2)\gamma_2=m_1c_1^2+m_2c_2^2, \ldots$.

Воспользуемся теперь тем, что силовая функция (5) похожа на силовую функцию (3). Различаются они только коэффициентами.

Для интересующей нас задачи о движении спутника в гравитационном поле сплюснутого земного шара подберем вспомогательную задачу о двух неподвижных центрах, причем в последней подберем четыре параметра m_1, m_2, c_1, c_2 так, чтобы в формулах для силовых функций (3) и (5) совпали первые четыре члена. Заменяя малые коэффициенты λ_3 и λ_4 нулями, получим систему уравнений:

$$m_1+m_2=M, \qquad (6)$$

$$m_1c_1+m_2c_2=0, \qquad (7)$$

$$m_1c_1^2+m_2c_2^2=M\lambda_2\rho^2, \qquad (8)$$

$$m_1c_1^3+m_2c_2^3=0. \qquad (9)$$

Положим $c=c_2-c_1$. При таком подборе силовая функция поля, создаваемого сплюснутой Землей, будет мало отличаться от силовой функции поля, создаваемого двумя фиксированными центрами, так как различие будет лишь в малых коэффициентах λ_n, где $n\geqslant 4$. Траекторию спутника в последнем случае двух фиксированных центров можно найти в достаточно компактном виде. Эта траектория будет близка к реальной траектории спутника в гравитационном поле тяготения Земли.

Решив систему уравнений (6) — (9), мы найдем: $c_2=-c_1=\frac{1}{2}c$, $m_2=m_1=\frac{1}{2}M$. $c^2=\lambda_2\rho^2$, $c=\rho\sqrt{\lambda_2}$. Но $\lambda_2<0$. Поэтому число c — мнимое число. Итак, задачу поиска траектории спутника сплюснутой Земли можно свести к задаче поиска траектории спутника двух фиксированных притягивающих центров. При этом следует формально считать, что расстояние между этими массами выражается чисто мнимым числом.

Этот же прием применим и в более сложной задаче, когда учитывается не только сплюснутость Земли, но и неодинаковое распределение масс в ее полярных областях (масса Антарктики больше массы Арктики). Это означает, что необходимо учесть коэффициент λ_3, а не заменять его нулем. В этом случае задачу тоже удается свести к задаче о двух фиксированных центрах, но приходится считать, что не только расстояние между этими центрами, но и их массы выражаются мнимыми числами.

§ 24. Задание линий и областей с помощью комплексных переменных

Различные фигуры на координатной плоскости можно задать с помощью уравнений или неравенств, содержащих комплексное переменное

$$z = x + iy.$$

Например, окружность радиуса 1 с центром в начале координат можно задать уравнением $|z| = 1$ (см. § 15).

Примеры

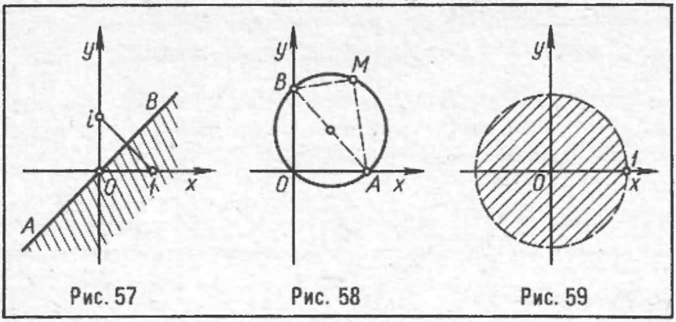
1. Какую фигуру представляет собой множество всех таких точек комплексной плоскости, чьи комплексные координаты z удовлетворяют условию (уравнению) $|z - 1| = |z - i|$?

Р е ш е н и е. $|z - 1|$ — расстояние от точки с координатной z до точки 1; $|z - i|$ — расстояние от точки z до точки i. Следовательно, условие задачи можно переформулировать так: найти на плоскости все такие точки z, которые равноудалены от точек 1 и i. В такой интерпретации решение очевидно, а именно: искомое множество точек — это серединный перпендикуляр отрезка, соединяющего точки 1 и i (рис. 57).

2. На какой линии комплексной плоскости располагаются точки, чьи комплексные координаты z удовлетворяют условию $|z - 1|^2 + |z - i|^2 = 2$?

Р е ш е н и е. Переформулируем задачу так: где на плоскости лежат точки M, для которых сумма квадратов расстояний до точек A и B с комплексными координатами 1 и i равна 2 (рис. 58)?

Так как $AB^2 = |1 - i|^2 = 2$ и $AM^2 + BM^2 = 2$, то $AB^2 = AM^2 + BM^2$. По теореме, обратной теореме Пифагора, искомые точки M должны являться вершинами прямоугольных треугольников с данной гипотенузой AB. Следовательно, искомые точки лежат на окружности



радиуса $r = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ с центром в середине отрезка AB и полностью заполняют эту окружность.

3. Выясним, какую фигуру образуют на комплексной плоскости все точки z, для которых $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| \leqslant 1$.

Р е ш е н и е. Перепишем данное неравенство в таком виде: $|z-1| \leqslant |z-i|$. Это неравенство означает, что искомые точки z либо равноудалены от точек 1 и i, либо они ближе к точке 1, чем к точке i. Следовательно, точки z, удовлетворяющие данному неравенству, заполняют полуплоскость Π (на рисунке 57 она выделена штриховкой), ограниченную прямой AB, включая и точки прямой AB.

4. Изобразим на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющих неравенству $||z|+i| < \sqrt{2}$.

Р е ш е н и е. Так как $|z|$ — действительное число, то $||z|+i| = \sqrt{|z|^2+1}$, и данное неравенство сводится к виду: $|z|^2+1 < 2$, то есть $|z| < 1$.

Следовательно, множество точек z, удовлетворяющих данному неравенству, есть «внутренность» единичного круга (рис. 59).

Упражнения

24.1. Выясните, какие линии образуют на комплексной плоскости все точки z, для которых:

1) $|z|=R$ $(R>0)$; 2) $|z-i|=1$; 3) $|z+1|=1$.

24.2. Какую линию на плоскости образуют все точки z, для которых $\left|\frac{z-1}{z-3}\right|=1$?

24.3. Каково множество точек z, чьи координаты удовлетворяют системе уравнений $|z-1|=|z+1|=|z+i|$?

24.4. Выясните, какие фигуры образуют на комплексной плоскости все точки z, для которых:

1) $|z|\leqslant 1$; 4) $\left|1+\frac{1}{z}\right|>1$;

2) $|z|>1$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}<|z-(1+i)|<\sqrt{2}$.

3) $|z-i|>2$;

24.5. Изобразите на комплексной плоскости множество точек z, для которых:

$$\begin{cases} 1<|z|<2, \\ 0<\arg z<\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

24.6. Найдите и изобразите на комплексной плоскости все точки z, для которых число $w=z^2-z+1$ — действительное и отрицательное.

§ 25. Линейная функция комплексного переменного

Из школьного курса математики известно, что функция $y=f(x)$ каждому значению действительного переменного x из некоторого множества M (M — область определения функции) ставит в соответствие единственное значение действительного переменного y.

Совокупность всех значений, которые может принимать при этом y, называется *множеством* (или *областью) значений* функции (обозначим его буквой N). Иначе говоря, функция $y=f(x)$ задает отображение некоторого множества M действительных чисел x на множество N значений действительного переменного y. Например, функция $y=x^2$, определенная на множестве M всех действительных чисел, принимает любое неотрицательное значение. Можно сказать, что функция $y=x^2$ деформирует всю числовую прямую $(-\infty;\ +\infty)$ в луч $[0;\ +\infty)$. Аналогично функция $y=\sin x$ числовую прямую $(-\infty;\ +\infty)$ деформирует в отрезок $[-1;\ 1]$, а функция $y=\lg x$ деформирует луч $(0;\ +\infty)$ (область определения этой функции) во всю числовую прямую $(-\infty;\ +\infty)$, являющуюся множеством значений логарифмической функции. Для наглядного представления о производимом функцией $y=f(x)$ отображении удобно множество M (область определения) и множество N (множество значений) изображать точками не одной, а двух различных прямых. Общепринято множество M изображать на оси Ox, а множество N — на оси Oy координатной плоскости xOy.

Попытаемся теперь по аналогии ввести понятие функции комплексного переменного.

Если каждому значению z из некоторого множества M комплексных чисел ставится в соответствие некоторое комплексное число w, то говорят, что на множестве *M определена функция комплексного переменного*. Тот факт, что w является функцией от z, записывают так:

$$w=f(z),\quad z\in M. \qquad (*)$$

Значение функции $w=f(z)$ в данной точке a обычно обозначается через $f(a)$. Множество всех чисел w, определяемых условием $(*)$, называют *множеством значений* (или областью значений) функции $w=f(z)$. Как же представить наглядно функцию комплексного переменного?

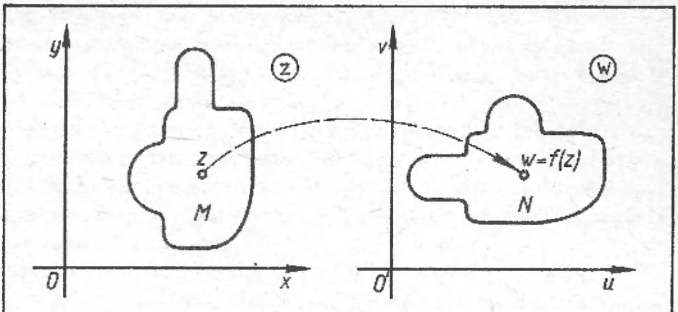


Рис. 60

Если взять две комплексные плоскости (рис. 60) и на одной изображать точки z (эта плоскость называется *z-плоскостью)*, а на другой — точки w (соответствующая плоскость называется *w-плоскостью)*, то можно сказать, что *функция $w=f(z)$ осуществляет отображение некоторого множества M точек z-плоскости на некоторое множество N точек w-плоскости* (z-плоскость и w-плоскость можно считать и совмещенными друг с другом). Функция комплексного переменного допускает наглядное толкование в виде некоторой деформации всей комплексной плоскости или ее части. Вначале имелась комплексная плоскость (z-плоскость) или ее часть, функция $w=f(z)$ ее деформировала, каждую точку z переместила в точку $w=f(z)$; то, что получилось, мы изображаем отдельно, заново, на комплексной w-плоскости. Рассмотрим один из простейших видов функций комплексного переменного — линейную функцию.

Линейной функцией называют функцию вида:

$$w=az+b,$$

где a и b — комплексные константы, $a \neq 0$. Простое геометрическое толкование допускают такие разновидности линейных функций:

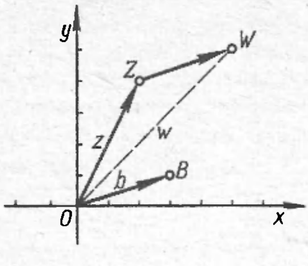


Рис. 61

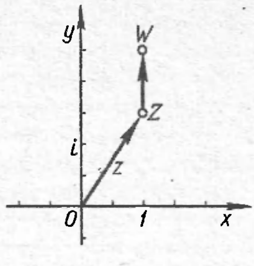


Рис. 62

$w = z + b$ (сдвиг, или параллельный перенос),
$w = e^{i\alpha} \cdot z$ (поворот на угол α вокруг нулевой точки),
$w = \rho \cdot z$ $(\rho > 0)$ (гомотетия).

Действительно, если $w = z + b$, то, как видно из рисунка 61, точка W с комплексной координатой w может быть получена из точки Z (ее комплексная координата z) параллельным переносом на вектор $\overline{ZW} = \overline{OB}$, комплексная координата которого равна b. Итак, линейная функция вида $w = z + b$ задает геометрически *сдвиг* на вектор, имеющий комплексной координатой число b. Например, если точку Z нужно сдвинуть в положительном направлении оси Oy на одну единицу, то берем $b = i$. Точка W, комплексная координата которой $w = z + i$, будет искомой (рис. 62).

Пусть теперь $w = e^{i\alpha} \cdot z$. Учитывая операторный смысл умножения на число $e^{i\alpha}$, заключаем, что точку W, комплексная координата которой равна w, получаем из точки Z, имеющей координату z, *поворотом* на угол α вокруг начала координат.

Если же $w = \rho \cdot z$, где $\rho > 0$, то $|w| = \rho \cdot |z|$ и $\arg w = \arg z$. Это означает, что точка W (с комплексной координатой w) *гомотетична* точке Z, имеющей комплексную координату z, причем центром гомотетии является начало координат, а коэффициент гомотетии равен ρ.

Рассмотрим теперь не одну, а бесконечное множество точек Z (их комплексные координаты обозначим через z), составляющих геометрическую фигуру F. Можно сказать, что функции $w=z+b$, $w=e^{i\alpha}\cdot z$, $w=\rho\cdot z$ $(\rho>0)$ преобразуют фигуру F в фигуру F' путем: 1) *сдвига* на вектор, имеющий комплексную координату b; 2) *поворота* на угол α вокруг начала координат; 3) *гомотетии* с коэффициентом ρ и центром в начале координат.

Так как $w=az+b=\rho\cdot e^{i\alpha}\cdot z+b$ (ρ — модуль числа a, α — аргумент числа a), то к рассмотренным выше трем случаям сводится и геометрическое толкование произвольной линейной функции комплексного переменного. Следовательно, каждая линейная функция задает на плоскости некоторое преобразование подобия, сохраняющее ориентацию углов.

Примеры

1. В какую фигуру преобразует функция $w=2iz$ квадрат $OABC$ (рис. 63) с вершинами в точках 0, $2-i$, $3+i$, $1+2i$?

Решение. Так как $w=2iz=2e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot z$, то точку w получаем из соответствующей точки z в результате последовательного выполнения поворота на угол $\alpha=\frac{\pi}{2}$ вокруг точки O и гомотетии с центром O и коэффициентом $\rho=2$. Поэтому квадрат $OABC$ преобразуется в квадрат $OA'B'C'$ с вершинами в точках 0, $2+4i$, $-2+6i$, $-4+2i$.

2. Два подобных треугольника на координатной плоскости одинаково ориентированы. Их вершины имеют соответственно комплексные координаты z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3. Существует ли линейная функция, которая преобразует первый из этих треугольников во второй?

Решение. Из подобия треугольников $Z_1Z_2Z_3$ и $W_1W_2W_3$ следует равенство углов $Z_2Z_1Z_3$ и $W_2W_1W_3$ и пропорциональность длин сторон: $\frac{Z_1Z_3}{Z_1Z_2}=\frac{W_1W_3}{W_1W_2}=\rho$.

Пусть $\angle Z_2Z_1Z_3=\theta$. Тогда $z_3-z_1=\rho e^{i\theta}(z_2-z_1)$, $w_3-w_1=$ $=\rho e^{i\theta}\cdot(w_2-w_1)$. Поэтому $\frac{w_3-w_1}{z_3-z_1}=\frac{w_2-w_1}{z_2-z_1}$. Обозначим общее значение дробей буквой A. Сначала будем искать линейную функцию $w=f(z)$, переводящую точку z_1 в w_1. Она должна удовлетворять условию: $w-w_1=a(z-$ $-z_1)$. Пусть эта же функция переводит точку z_2 в w_2. Тогда $w_2-w_1=a(z_2-z_1)$, $\frac{w_2-w_1}{z_2-z_1}=a$. Поэтому $a=A$. Переводит ли эта функция точку z_3 в w_3? Легко видеть, что да. При $z=z_3$ имеем: $w-w_1=A(z_3-z_1)=\frac{w_3-w_1}{z_3-z_1}(z_3-z_1)=w_3-$ $-w_1$, откуда $w=w_3$. Итак, действительно существует линейная функция, которая преобразует $\triangle Z_1Z_2Z_3$ в $\triangle W_1W_2W_3$.

Из приведенных выше рассуждений следует, что *каждое преобразование плоскости, которое является преобразованием подобия и сохраняет ориентацию плоскости, может быть задано линейной функцией комплексного переменного.*

3. Два треугольника на плоскости $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ одинаково ориентированы. Известны комплексные координаты их вершин a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Как узнать, подобны ли они?

Решение. Проверяем, выполняются ли равенства:

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\frac{A_3A_1}{B_3B_1},$$

то есть равенства:

$$\frac{|a_2-a_1|}{|b_2-b_1|}=\frac{|a_3-a_2|}{|b_3-b_2|}=\frac{|a_1-a_3|}{|b_1-b_3|}.$$

Однако есть более простой способ, требующий проверки не двух, а только одного равенства, и притом не содержащего модулей. Существует (см. пример 2) линейная функция $w=Az+B$, которая переводит точки A_1 и A_2 соответственно в точки B_1 и B_2. Поэтому имеют место равенства:

$$Aa_1-b_1+B=0, \tag{1}$$

$$Aa_2-b_2+B=0. \tag{2}$$

Так как по условию $\triangle\ A_1A_2A_3$ и $\triangle\ B_1B_2B_3$ одинаково ориентированы, то они тогда и только тогда подобны, когда та же функция переводит еще точку A_3 в B_3, то есть когда

$$Aa_3-b_3+B=0. \tag{3}$$

Итак, треугольники $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ тогда и только тогда подобны, когда существует линейная функция $w=Az+B$, чьи коэффициенты удовлетворяют условиям (1), (2), (3).

Рассмотрим вспомогательную систему уравнений:

$$a_1u+b_1v+w=0, \tag{4}$$

$$a_2u+b_2v+w=0, \tag{5}$$

$$a_3u+b_3v+w=0. \tag{6}$$

Это однородная система, которая при $u=A$, $v=-1$, $w=B$ переходит в три равенства (1) — (3). Сказать, что существует функция $w=Az+B$, удовлетворяющая условиям (1) — (3), — это то же самое, что сказать: у системы (4) — (6) имеется нетривиальное решение $(A,\ -1,\ B)$. Наличие у системы (4) — (6) хоть какого-нибудь нетривиального решения (необязательно вида $(A,\ -1,\ B)$) равносильно, как мы знаем (см. в § 16 свойство 6), равенству:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

Таким образом, *если треугольники подобны*, то *равен-*

ства (1) — (3) *выполняются,* тройка чисел вида $(A, -1, B)$, удовлетворяющая системе (4) — (6), существует, *равенство* (7) для определителя Δ *выполняется.*

И наоборот, пусть равенство (7) для определителя Δ выполняется. Покажем, что система (4) — (6) имеет решение вида $(A, -1, B)$ (второе число равно -1). Действительно, из $\Delta=0$ следует, как мы знаем (см. § 16, свойство 6), что у системы (4) — (6) должно существовать некоторое нетривиальное решение (u_0, v_0, w_0). Это значит, что справедливы равенства:

$$a_1u_0+b_1v_0+w_0=0, \tag{8}$$

$$a_2u_0+b_2v_0+w_0=0, \tag{9}$$

$$a_3u_0+b_3v_0+w_0=0, \tag{10}$$

$$(a_1-a_2)u_0+(b_1-b_2)v_0=0. \tag{11}$$

Покажем, что $v_0\neq 0$. Допустим противное: пусть $v_0=0$. Тогда (см. (11)) $u_0=0$ и (см. (8)) $w_0=0$, то есть решение (u_0, v_0, w_0) — тривиальное, и мы пришли к противоречию. Следовательно, допущение $v_0=0$ неверно. Значит, $v_0\neq 0$. Рассмотрим тройку чисел $(A, -1, B)$, где $A=-\dfrac{u_0}{v_0}$, $B=-\dfrac{w_0}{v_0}$. Непосредственной подстановкой в систему (4) — (6) легко проверить, что эта тройка на основании равенств (8) — (10) тоже является решением системы (4) — (6). Итак, если $\Delta=0$, то система (4) — (6) имеет решение вида $(A, -1, B)$. Но тогда функция $w=Az+B$ переводит $\triangle A_1A_2A_3$ в $\triangle B_1B_2B_3$, и эти треугольники подобны.

Мы пришли к выводу: *два одинаково ориентированных треугольника* $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ *подобны тогда и только тогда, когда выполняется равенство:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Упражнения

25.1. На z-плоскости даны три точки: $1+i$, $-i$, $2-i\sqrt{3}$. В какие точки преобразует их функция $w=-iz$?

25.2. В какую фигуру преобразуют функции $w=i\cdot z$ и $w=iz+2-i$ круг $|z-i|\leqslant\frac{1}{2}$?

25.3. Подберите такую линейную функцию, которая преобразовала бы точку $z=1$ в точку $w=i$, а точку $z=2$ оставила бы неподвижной (то есть преобразовала бы ее в точку $w=2$ или, как говорят, в себя).

25.4. Существует ли такое линейное преобразование (функция) $w=az+b$, которое оставляет неподвижными две различные точки z_1 и z_2? Если да, то найдите его.

25.5. В какую фигуру преобразуется отрезок, соединяющий точки $z_1=1-i$ и $z_2=-i$, с помощью линейной функции $w=(1+i)z-1$?

25.6. В какую фигуру преобразует функция $w=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot z$ треугольник с вершинами в точках 0,

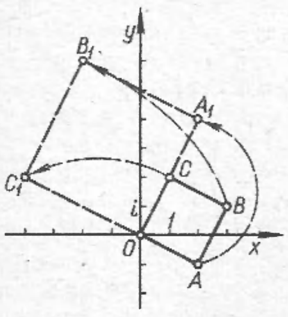


Рис. 63

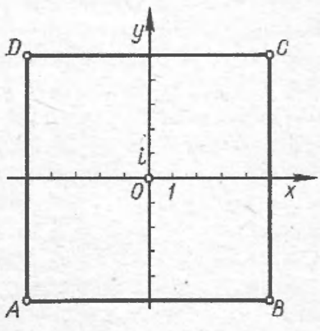


Рис. 64

$1-i$, $1+i$? Каков геометрический смысл этого преобразования?

25.7. Квадрат $ABCD$ (рис. 64), центром которого является точка O (начало координат) и у которого сторона AB (параллельная оси Ox) равна 10 единицам, поворачивают вокруг O против часовой стрелки на $90°$, сжимают к точке O с коэффициентом сжатия, равным 10, и затем перемещают на 5 единиц в направлении, задаваемом вектором $\overline{DA}$. Найдется ли хотя бы одна точка в квадрате, которая останется неподвижной?

25.8. Докажите, что правильность треугольника ABC гарантируется выполнением такого условия для комплексных координат его вершин:

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

25.9. Пусть три различных комплексных числа a, b, c удовлетворяют условию: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$. Является ли правильным треугольник, вершины которого имеют координаты a, b, c?

25.10. На классной стене висит большая географическая карта, имеющая форму прямоугольника. Точную копию этой карты, каждый линейный размер которой уменьшен в 10 раз, принес в класс ученик Саша. «Посмотрите,— сказал он,— я накладываю маленькую карту на большую так, чтобы лицевой стороной обе карты были обращены к нам. Если я теперь иголкой проколю в произвольном месте обе карты, то получу две точки — точку P на маленькой карте и точку Q на большой; этим точкам соответствуют на земном шаре, вообще говоря, два различных пункта. Но я уверен, что должно найтись такое место для прокола, что соответствующим точкам на обеих картах соответствует один и тот же пункт на местности!» Тут возразил Игорь: «Во-первых, сомневаюсь, чтобы такая точка обязательно нашлась; во-вторых, если окажется, что такая точка есть, то не вижу причин, почему бы ей оказаться единственной, и в-третьих, не имеет значения, есть такая точка или нет, ведь все равно нет способа, как ее найти на карте». Можете ли вы рассеять сомнения Игоря?

§ 26. О том, как функция $w=z^2$ деформирует плоскость

Выясним, как функция $w=z^2$ деформирует различные фигуры, расположенные на комплексной плоскости.

Примеры

1. Возьмем две комплексные плоскости: на одной будем изображать точки z (и назовем ее z-плоскостью), на другой — точки w (назовем ее w-плоскостью).

а) В какую фигуру преобразует функция $w=z^2$ положительный луч мнимой оси z-плоскости?

б) В какую фигуру преобразует функция $w=z^2$ окружность $|z|=1$?

в) В какую фигуру преобразует та же функция гиперболу $xy=1$?

Р е ш е н и е. а) Рассмотрим положительный луч OM мнимой оси Oy (рис. 65). Для каждой точки z, лежащей на этом луче, $\arg z=\frac{\pi}{2}$. Так как $w=z^2$, то $|w|=|z|^2$, а одно из значений аргумента w равно $2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$.

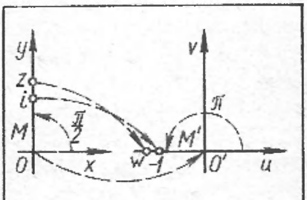


Рис. 65

Поэтому точка w должна лежать на луче $O'M'$, выходящем из начала координат (точки O') w-плоскости и составляющем с положительным лучом действительной оси угол π, то есть точка w окажется на отрицательном луче действительной оси. Если точка z опишет луч OM (будет перемещаться по этому лучу, удаляясь от его начала O), то соответствующая точка w будет перемещаться по лучу $O'M'$, начиная от точки O'. При этом расстояние от w до O' будет всегда равно квадрату расстояния от z до O, и поэтому точки w заполнят весь луч $O'M'$. Итак, положительный луч OM мнимой оси z-плоскости функция $w=z^2$ преобразует в отрицательный луч $O'M'$ действительной оси w-плоскости.

б) Рассмотрим на z-плоскости единичную окружность $|z|=1$. Так как $w=z^2$, то $|w|=|z|^2=1$. Отсюда следует, что каждая точка z единичной окружности z-плоскости преобразуется в некоторую точку единичной окружности w-плоскости. Если аргумент z изменится от 0 до 2π (точка z полностью опишет единичную окружность z-плоскости), то аргумент числа w при этом будет изменяться от 0 до 4π, и соответствующая точка w дважды полностью опишет единичную окружность w-плоскости.

в) Координату точки z, принадлежащей гиперболе $xy=1$, можно записать в виде:

$$z=x+iy=x+i\cdot\frac{1}{x}.$$

Тогда для координаты соответствующей точки w будем иметь:

$$w=z^2=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+2i.$$

Пусть теперь точка z опишет всю гиперболу, то есть x изменяется в промежутках $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$. При этом действительная часть числа w также будет изменяться. Нетрудно понять, что она будет принимать всевозможные действительные значения, а мнимая часть числа w остается неизменной. Следовательно, точка w опишет прямую, параллельную действительной оси w-плоскости и проходящую через точку $2i$ (рис. 66).

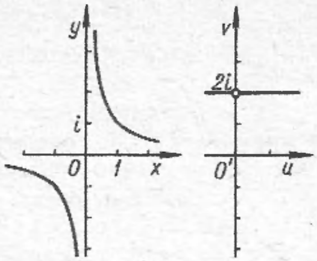


Рис. 66

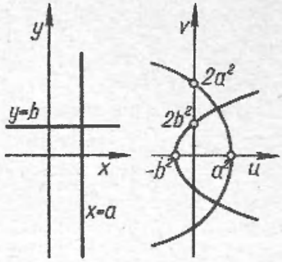


Рис. 67

2. Функция $w=z^2$ деформирует прямые, параллельные координатным осям z-плоскости, в какие-то другие линии. В какие?

Решение. Выберем в z-плоскости произвольную прямую, параллельную мнимой оси Oy. Она имеет уравнение $x=a$, где a — некоторое фиксированное число. Сначала будем полагать, что $a \neq 0$. Для точек этой прямой имеем: $z=a+yi$ $(-\infty<y<+\infty)$. Полагая $w=$ $=u+vi$, имеем для точек w-плоскости, соответствующих точкам прямой $x=a$, зависимости: $u+vi=(a+yi)^2=a^2-$ $-y^2+i\cdot 2ay$, откуда $u=a^2-y^2$, $v=2ay$ $(-\infty<y<+\infty)$. Когда y пробегает все действительные значения, точка $w=u+vi$ опишет некоторую фигуру. Чтобы записать ее уравнение в более привычной для нас форме, исключим из последних двух уравнений y (для этого достаточно выразить y из второго уравнения) и получим:

$$u=-\frac{v^2}{4a^2}+a^2.$$

Это уравнение задает в w-плоскости некоторую параболу; ее осью служит действительная ось w-плоскости, а ее ветви направлены влево (рис. 67). Для вычерчивания этой параболы удобно сначала найти точки ее пересечения с осями координат: если $v=0$, то $u=a^2$; если $u=0$, то $v^2=4a^4$, $v=\pm 2a^2$.

Итак, функция $w=z^2$ деформирует прямую $x=a$ (где $a\neq 0$), в параболу.

Наше рассуждение не проходит при $a=0$, то есть когда прямая, параллельная мнимой оси z-плоскости, заменяется самой этой осью. Но для точек мнимой оси имеем: $z=iy$ $(-\infty<y<+\infty)$, поэтому для соответствующих точек w-плоскости получаем: $w=(iy)^2$, то есть $w=-y^2$ $(-\infty<y<+\infty)$. Когда y пробегает всевозможные действительные значения, число w пробегает всевозможные действительные неположительные значения. Это означает, что функция $w=z^2$ деформирует мнимую ось z-плоскости в отрицательный луч действительной оси w-плоскости (включая точку $w=0$).

Аналогичным рассуждением можно показать, что та же функция $w=z^2$ деформирует каждую прямую $y=b$ (где b — константа, $b\neq 0$) в параболу $u=\frac{v^2}{4b^2}-b^2$. Если же $b=0$ (то есть речь идет о действительной оси Ox, имеющей уравнение $y=0$), то функция $w=z^2$ деформирует ее в положительный луч оси Ou w-плоскости (включая его начало $w=0$).

На рисунке 68 изображены параболы, в которые функция $w=z^2$ деформирует прямые, параллельные осям координат. Семейство прямых, параллельных мнимой оси (то есть прямые, задаваемые уравнениями вида $x=a$),преобразуется в семейство парабол, чьи ветви уходят (на нашем рисунке) влево; при любом $a\neq 0$ прямая с уравнением $x=a$ и прямая с уравнением $x=-a$ (они симметричны относительно мнимой оси) переходят в одну и ту же параболу. С приближением прямой $x=a$ к мнимой оси (то есть с уменьшением числа $|a|$) соответствующая парабола все ближе прилегает к отрицательному лучу действительной оси; в пределе, при $a=0$, парабола вырождается в этот луч $(v=0,\ u\leqslant 0)$.

Что касается семейства прямых, параллельных действительной оси z-плоскости (то есть прямых вида $y=b$), то функция $w=z^2$ деформирует их в семейство парабол, чьи ветви (на нашем рисунке) уходят вправо. При $b\to 0$ соответствующая парабола все ближе прилегает к положительному лучу действительной оси; при $b=0$ парабола вырождается в этот луч. Можно доказать, что каждая парабола первого семейства пересекает каждую параболу второго семейства под прямым углом.

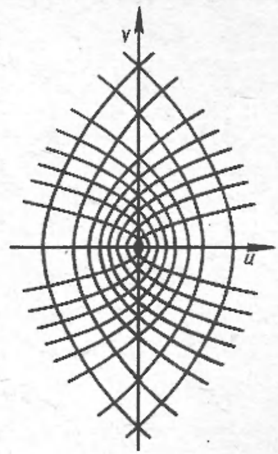


Рис. 68

3. Функция $w=z^2$ деформирует первый координатный квадрант z-плоскости в верхнюю полуплоскость w-плоскости. Семейство прямых верхней полуплоскости w-плоскости, параллельных действительной оси, соответствует каким-то линиям z-плоскости. Каким?

Решение. Пусть $z=x+yi$; $w=u+vi$. Тогда $u+iv=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xy\cdot i$, $u=x^2-y^2$, $v=2xy$.

Каждая из рассматриваемых нами прямых — это линия, задаваемая условием $v=c=\text{const}>0$. Каждая точка этой прямой соответствует такой точке $z=x+yi$, для которой $2xy=c$, $x>0$, $y>0$. А эта линия — та ветвь гиперболы $xy=\frac{1}{2}c$, которая расположена в первом координатном квадранте (рис. 69).

Итак, семейство прямых $v=c=\text{const}>0$, расположенных в верхней полуплоскости w-плоскости, соот-

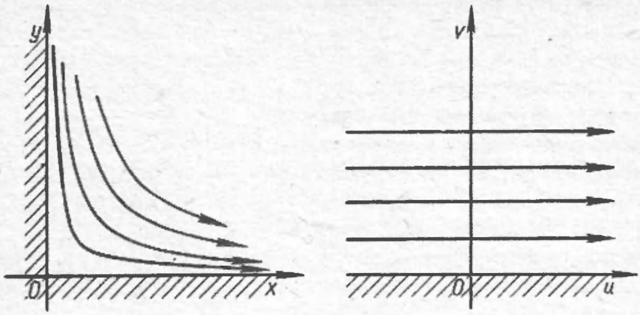


Рис. 69

ветствует — при отображении $w=z^2$ — ветвям гипербол $xy=\frac{1}{2}c$, расположенным в первом квадранте z-плоскости.

Упражнения

26.1. Какие точки w-плоскости соответствуют точкам $z=0$, $z=1$, $z=i$, $z=-2$ при отображении $w=z^2$?

26.2. В какую фигуру преобразует функция $w=z^2$ отрицательный луч действительной оси?

26.3. Во что преобразует функция $w=z^2$ окружность $|z|=2$?

26.4. В какие фигуры преобразует функция $w=z^2$ гиперболы $xy=-4$ и $x^2-y^2=1$?

26.5. 1) Луч L исходит из точки $z=0$ и наклонен к действительной оси под углом α $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$. В какую фигуру L' преобразует функция $w=z^2$ этот луч?

2) При непрерывном росте угла α от 0 до $\frac{\pi}{2}$ луч L очевидно, заметет первый квадрант координатной плоскости. Какую фигуру заметет при этом линия L'?

§ 27. Примеры дробно-линейных деформаций плоскости

Функция вида $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ (a, b, c, d — комплексные числа, $ad-bc\neq 0$) называется *дробно-линейной функцией*. Как и при изучении линейной функции, ограничимся рассмотрением нескольких примеров отображений, производимых функциями такого вида.

Примеры

1. В какую фигуру преобразует функция $w=\dfrac{1}{z}$ окружность Γ единичного радиуса с центром в точке $z=i$ (без точки $z=0$)[1]?

Решение. Уравнение данной в z-плоскости окружности можно записать в виде $|z-i|=1$. Так как $w=\dfrac{1}{z}$, то $z=\dfrac{1}{w}$ и $z-i=\dfrac{1-iw}{w}$. Переходя в последнем соотношении к модулям и учитывая, что для точек данной окружности выполняется равенство $|z-i|=1$, найдем: $|1-iw|=|w|$. Так как $|1-iw|=|i(w+i)|=|w+i|$, то получим: $|w+i|=|w|$. Это соотношение означает, что искомые точки w равноудалены от точек $-i$ и 0, находятся на прямой l, проходящей через точку $-\dfrac{i}{2}$ и параллельной действительной оси w-плоскости (рис. 70).

---

[1] Начертив окружность Γ, видим, что на ней расположена одна такая точка z, для которой формула $w=\dfrac{1}{z}$ теряет смысл. Это точка $z=0$. В связи с этим в данной задаче условимся понимать под Γ не всю окружность, а то, что от нее остается после исключения точки $z=0$.

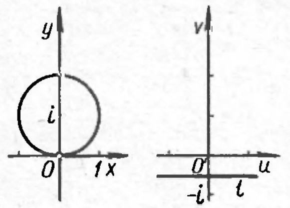


Рис. 70

Покажем, что точки w, соответствующие точкам данной окружности, полностью заполняют прямую l. Пусть $w_0 = u_0 - \frac{i}{2}$ — произвольная точка прямой l. Точка z_0, которой может соответствовать выбранная точка w_0, должна удовлетворять по условию соотношению $z_0 = \frac{1}{w_0}$. Поэтому $z_0 - i = \frac{1}{w_0} - i = \frac{1}{u_0 - \frac{1}{2}i} - i = \frac{\frac{1}{2} - iu_0}{u_0 - \frac{i}{2}}$. Отсюда найдем, что

$$|z_0 - i| = \frac{\left|-\frac{1}{2} - iu_0\right|}{\left|u_0 - \frac{i}{2}\right|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + u_0^2}}{\sqrt{u_0^2 + \frac{1}{4}}} = 1.$$

Итак, *каждая* точка w_0 прямой l соответствует некоторой точке z_0, принадлежащей данной окружности. Следовательно, функция $w = \frac{1}{z}$ окружность единичного радиуса с центром в точке $z = i$ деформирует в прямую.

2. В какую фигуру w-плоскости преобразуется мнимая ось z-плоскости при отображении $w = \frac{z+1}{z-1}$?

Решение. Для точек мнимой оси z-плоскости имеем: $z = 0 + iy$ $(-\infty < y < +\infty)$. Поэтому соответствующие точки находим из условия $w = \frac{iy+1}{iy-1}$. Переходя к модулям, получим: $|w|=\dfrac{|iy+1|}{|iy-1|}=1$. Следовательно, мнимая ось z-плоскости преобразуется в некоторое множество точек единичной окружности w-плоскости.

Выясним, заполнят ли точки w, соответствующие всем точкам мнимой оси z-плоскости, единичную окружность w-плоскости. Для этого возьмем точку w_0, принадлежащую единичной окружности. Число w_0 можно записать в виде $w_0=e^{i\alpha}$. Число z_0, которому при отображении $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ соответствует точка $w_0=e^{i\alpha}$, можно найти из условия $e^{i\alpha}=\dfrac{z_0+1}{z_0-1}$ (где $\alpha\neq 0$). Выразим из этого равенства z_0 и преобразуем полученное выражение:

$$z_0=\frac{e^{i\alpha}+1}{e^{i\alpha}-1}=\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)}{e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{2i\sin\frac{\alpha}{2}}=-i\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда видно, что z_0 является чисто мнимым числом, то есть точка z_0 принадлежит мнимой оси z-плоскости. Наше рассуждение неверно при $w=1$, так как в этом случае $\alpha=0$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ не имеет смысла. Рассматриваемая функция не сопоставляет точку $w=1$ ни одной точке мнимой оси. Легко проверить, что ни при каком значении числа z невозможно равенство $1=\dfrac{z+1}{z-1}$ (это уравнение не имеет никаких комплексных корней). Итак, мнимая ось z-плоскости преобразуется в единичную окружность w-плоскости, из которой предварительно удалена точка $w=1$.

Отметим без доказательства одно общее свойство дробно-линейной функции (его называют *круговым свой-*

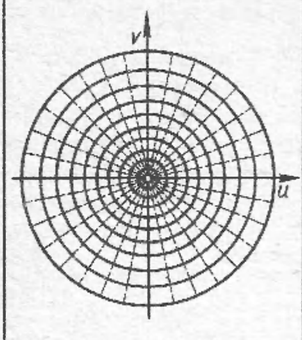


Рис. 71

ством): каждая дробно-линейная функция $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$, отличная от константы, деформирует каждую линию l, являющуюся окружностью или прямой, в некоторую линию l', которая тоже является окружностью или прямой [1]. Это правило верно с точностью до одной лишней точки: не исключено, что либо на линии l окажется одна точка (но не больше), которой не соответствует ни одна из точек линии l', либо на l' обнаружится одна точка, которая не соответствует ни одной из точек линии l, либо и то, и другое.

3. Рассмотрим на w-плоскости семейство F' окружностей с центром в нулевой точке (рис. 71). Оно получено путем деформации, производимой функцией $w=\dfrac{z+1}{z-1}$, из какого-то семейства F линий, расположенных на комплексной z-плоскости. Из какого?

Р е ш е н и е. Каждую окружность Γ' из семейства F' возможно задать уравнением вида $|w|=R=\text{const}>0$; когда R пробегает все положительные значения, мы получим все семейство окружностей F'. Но окружность Γ' получена из некоторой линии Γ с помощью деформации, задаваемой функцией

$$w=\frac{z+1}{z-1}. \qquad (1)$$

[1] Не исключено, что окружность деформируется в прямую (см. пример 1), а прямая — в окружность (см. пример 2).

Соответствие, задаваемое формулой (1), является взаимно однозначным (если не обращать внимания на точку $z=1$ в z-плоскости и на точку $w=1$ в w-плоскости); если точка w соответствует точке z, то z можно найти из формулы (1):

$$z=\frac{w+1}{w-1}. \tag{2}$$

Функция (1) отображает какую-то линию Г на окружность Г′, а функция (2) является обратной по отношению к функции (1) и отображает окружность Г′ на линию Г. Но функция (2) — тоже дробно-линейная, и поэтому линия Г, на которую она отображает окружность Г′, тоже обязана оказаться окружностью (или прямой).

Нетрудно найти уравнение линии Г. В самом деле, пусть $R\neq 1$ (случай $R=1$ рассмотрен в примере 2). Тогда для точек w, лежащих на Г′, имеем: $|w|=R$. Поэтому для точек z, расположенных на Г, получаем:

$$\frac{|z+1|}{|z-1|}=R,$$

$$|z+1|^2=R^2|z-1|^2. \tag{3}$$

После упрощений найдем:

$$(1-R^2)z\bar{z}+(1+R^2)z+(1+R^2)\bar{z}+(1-R^2)=0.$$

А это, как мы уже знаем (см. § 14), есть уравнение окружности.

Итак, при отображении $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ семейство F' концентрических окружностей $|w|=R\neq 1$ соответствует некоторому семейству F окружностей z-плоскости; единичная окружность $(|w|=1)$ составляет исключение: она соответствует некоторой прямой. Семейство F изображено сплошными линиями на рисунке 72.

Полученное семейство имеет интересный физический смысл. Представим себе два одинаковых прямолинейных длинных тонких провода, расположенных пер-

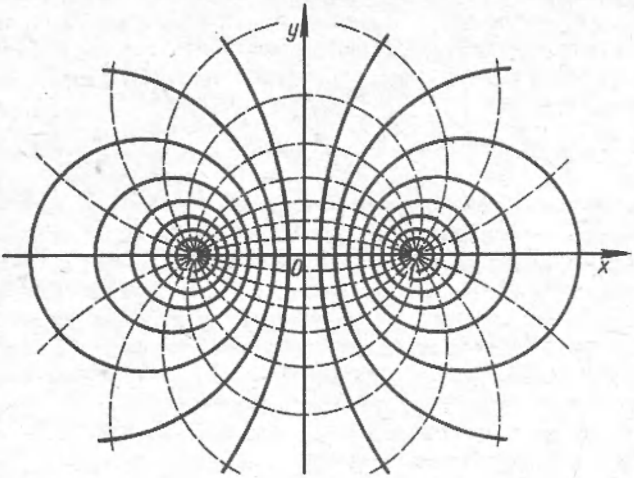


Рис. 72

пендикулярно плоскости чертежа (рис. 72) на расстоянии $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ от начала координат. Пусть эти провода имеют одинаковые по абсолютной величине и противоположные по знаку заряды (соответственно $+q$ и $-q$). В результате возникает электростатическое поле. В плоскости чертежа линиями равного потенциала (эквипотенциальными линиями) как раз и окажутся окружности, изображенные на рисунке 72.

На обосновании этого утверждения мы здесь останавливаться не будем.

Упражнения

27.1. В какие точки w-плоскости преобразуются точки $z=1$, $z=i$, $z=1-i$ при помощи функции $w=\frac{1}{z}$?

27.2. В какую фигуру w-плоскости преобразуется действительная ось z-плоскости при отображении $w=\frac{z-i}{z+i}$?

27.3. На z-плоскости дана фигура, состоящая из верхней половины единичной окружности $|z|=1$ и ее диаметра, соединяющего точки -1 и 1. Во что эта фигура преобразуется при отображении $w=\frac{z-1}{z+1}$?

§ 28. О функциях аналитических и неаналитических и о производимых ими деформациях

Рассмотренные в предыдущих параграфах функции $w=az+b$, $w=z^2$, $w=\frac{az+b}{cz+d}$ относятся к важному классу функций, получивших название *аналитических*. Они могут быть введены так.

Сначала определим для функции $f(z)$ комплексного переменного z понятие производной. Это делается так же, как в действительной области: производная $f'(z)$ функции $f(z)$ в точке z определяется формулой:

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$

Если $f(z)$ имеет производную не только в точке z, но и в каждой точке из некоторой окрестности точки z (некоторого круга с центром z), то функция называется *аналитической в точке* z.

Функция $f(z)$ называется *аналитической на множестве* E, если она является аналитической в каждой точке этого множества. Так, например, функция $f(z)=z^2$ имеет производную в каждой точке z комплексной z-плоскости:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^2-z^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2z+h)=2z,$$

то есть $f'(z)=2z$. Но тогда она имеет производную и в окрестности каждой точки z, то есть функция z^2 — аналитическая на всей комплексной плоскости. Функция $f(z) = |z|^2$ имеет, как это можно доказать, производную лишь в одной точке $z=0$. Следовательно, $|z|^2$ в этой точке не аналитическая.

Правила дифференцирования постоянной, суммы, разности, произведения, степени, частного для функций комплексного переменного такие же, как и для функций действительного переменного.

К аналитическим функциям относятся, в частности, любой *многочлен* от переменного z (функция вида $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$), любая *рациональная функция* переменного z (отношение двух многочленов $P(z)/Q(z)$), любая функция, которую можно представить в некотором круге в виде *суммы степенного ряда* (в виде $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ или $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \times (z-a)^k$). В то же время многие простые функции не являются аналитическими, например: $\bar{z}$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$.

Вернемся теперь к рассмотренному ранее (§ 25) частному случаю аналитических

Первые примеры аналитических функций рассматривали еще в XVIII в. Л. Эйлер, Ж. Д'Аламбер и Ж. Лагранж. Как самостоятельная дисциплина теория аналитических функций сложилась к середине XIX в. главным образом благодаря трудам трех выдающихся математиков того времени: О. Коши, К. Вейерштрасса и Г. Римана. К классу аналитических функций относится большинство элементарных функций, например $\sqrt{z}$, $z \neq 0$; e^z, $\sin z$ и много неэлементарных.

функций — к линейной функции $w = az + b$. Выберем в z-плоскости произвольную точку z_0 и проведем из нее два луча l_1 и l_2. Так как линейная функция геометрически сводится к переносу, повороту и гомотетии, то она преобразует лучи l_1 и l_2 в какие-то лучи l'_1 и l'_2, исходящие из точки $w_0 = az_0 + b$. При этом ясно, что угол между лучами l_1 и l_2 (наименьший угол, на который следует повернуть луч l_1, чтобы он совместился с лучом l_2) равен по величине и направлению углу между образами этих лучей l'_1 и l'_2. Можно сказать так: функция $w = az + b$ сохраняет угол между двумя лучами, исходящими из какой-либо точки. Аналогично обстоит дело с любыми кривыми линиями γ_1 и γ_2, исходящими из точки z_0: угол между ними равен (по величине и направлению) углу между образами этих линий γ'_1, γ'_2 при отображении $w = az + b$:

$$\widehat{(\gamma_1, \gamma_2)} = \widehat{(\gamma'_1, \gamma'_2)}.$$

Аналогичная картина имеет место для отображения, производимого произвольной аналитической функцией. Говоря точнее, если функция $w = f(z)$

Огюстен Луи КОШИ (1789—1857) внес значительный вклад почти во все области математики, особенно в математический анализ. Из опубликованных им 830 научных работ более половины посвящены анализу. Его «Курс анализа» (составленный по лекциям, которые он читал в Политехнической школе в Париже в 1819—1821 гг.) надолго стал образцом строгого изложения математической дисциплины. Коши в 27 лет стал членом Парижской академии наук, а позднее был избран почетным членом Петербургской Академии наук и многих других академий. Одна из важнейших заслуг Коши — создание систематических основ общей теории функций комплексного переменного. Вопросам комплексного анализа он посвятил более 70 научных статей, среди которых особо упомянем работы «Об одном исчислении, аналогичном исчислению бесконечно малых» и «Мемуар о функциях мнимых переменных» (Коши не употреблял термина «комплексный», а пользовался термином «мнимый»). Коши принадлежат также важные результаты в оптике, теории упругости, астрономии.

деформирует две линии γ_1 и γ_2, исходящие из точки z_0, в линии γ_1' и γ_2', исходящие из точки $w_0 = f(z_0)$, и если $f'(z_0) \neq 0$, то $(\widehat{\gamma_1, \gamma_2}) = (\widehat{\gamma_1', \gamma_2'})$ (углы равны по величине и направлению). Говорят, что отображение, производимое аналитической функцией, обладает свойством *сохранения углов* (по величине и направлению) во всех точках, где производная функции отлична от нуля.

Отображение, обладающее этим свойством, называют *конформным* (сохраняющим форму). Итак, *отображение, производимое аналитической функцией* $w = f(z)$, *является конформным всюду, где* $f'(z) \neq 0$. Конформные отображения находят важные приложения в гидродинамике, электростатике, теории упругости, картографии.

Рассмотрим пример функции, нашедшей содержательные приложения в теории крыла самолета.

Примеры.

1. *Функцией Жуковского* называется функция $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Выясним, осу-

Карл Теодор Вильгельм ВЕЙЕРШТРАСС (1815—1897) в молодости изучал юридические науки в Боннском университете, но, увлекшись математикой, оставил юридический факультет. Сдав экзамен на право преподавания математики в школе, он в 1841—1856 учительствовал в гимназиях небольших городов в Пруссии. Выполнил ряд фундаментальных исследований по математике, и в 1856 г. был избран членом академии наук в Берлине и приглашен в Берлинский университет на должность профессора. Вейерштрасс большое внимание уделял строгости изложения математических курсов. Ряд важных теорем, входящих теперь в вузовские учебники математики, названы его именем. Вейерштрасс был почетным членом Петербургской и Парижской академий наук.

ществляет ли эта функция конформное отображение. В какую фигуру деформирует функция Жуковского единичную окружность $|z|=1$ (рис. 73)?

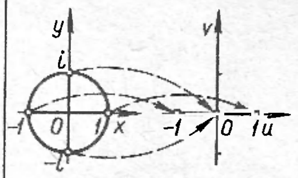


Рис. 73

Решение. Функция Жуковского является аналитической при $z \neq 0$, так как $f'(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$.

Имеем: $f'(z) \neq 0$, если $z \neq \pm 1$. Следовательно, отображение $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ является конформным во всех точках z, кроме точек 0, 1, -1.

Окружность $|z|=1$ можно задать уравнением $z=e^{it}$ $(-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$. Поэтому $w=\frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)=\cos t$ $(-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$. Когда t изменяется от $-\pi$ до 0, величина $\cos t$ изменяется от -1 до 1, а при изменении t от 0 до π величина $\cos t$ изменяется от 1 до -1. Таким образом, точка $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ дважды опишет (в w-плоскости) отрезок $[-1;\ 1]$ действительной оси. Итак, окружность $|z|=1$ деформируется (сплющивается) в отрезок $[-1;\ 1]$ (пройденный дважды). ▲

Из многочисленных свойств аналитических функций отметим здесь следующее: *аналитическая функция, отличная от постоянной, деформирует каждую область обязательно в область* [1].

---

[1] *Областью* называется такое множество, которое содержит каждую точку вместе с некоторой своей окрестностью и любые две точки которого можно соединить ломаной, состоящей из точек этого же множества.

Георг Фридрих Бернгард РИМАН (1826—1866) еще в школе увлекся математическими трудами Эйлера и Лагранжа. В Гёттингенском и Берлинском университетах слушал лекции К. Гаусса, П. Дирихле и др. Для развития комплексного анализа большое значение имела его диссертация «Основы общей теории функций одной комплексной переменной» (1851 г). В истории геометрии важной вехой была пробная лекция Римана «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии», в которой изложены основы созданной им разновидности неевклидовой геометрии («риманова геометрия»). С 1857 г. был профессором Гёттингенского университета. Большинство научных работ Римана были изданы уже после его смерти.

Далеко не каждая функция комплексного переменного обладает этим свойством. Существуют неаналитические функции, которые деформируют области комплексной плоскости не в области, а в какие-то линии (отрезки, прямые, окружности и т. п.).

Рассмотрим пример.

2. В какую фигуру деформирует функция $w=\frac{1}{2}\times(z+\bar{z})$ круг $|z-5|\leqslant 3$?

Р е ш е н и е. Если $z=x+iy$, то $w=x$. Таким образом, данная функция каждой точке z ставит в соответствие ее проекцию на действительную ось. При этом она деформирует (сплющивает) круг $|z-5|\leqslant 3$ в его диаметр (в отрезок [2; 8] действительной оси).

Упражнение

28.1. Какие преобразования комплексной плоскости задаются функциями:

1) $w=\bar{z}$; 2) $w=-\bar{z}$; 3) $w=az+b$?

28.2. В какую фигуру преобразуется первый квадрант комплексной плоскости с помощью функции $w=\frac{1}{2}(z-\bar{z})$? В какую фигуру при этом отображении преобразуется вся комплексная z-плоскость?

28.3. В какую фигуру деформируется круг единичного радиуса с центром в точке $z=0$ с помощью функции $w=|z|^2$?

28.4. Какие деформации комплексной плоскости задаются функциями:

1) $w=\operatorname{Re} z$; 2) $w=\operatorname{Im} z$; 3) $w=\operatorname{Re} z+i\cdot|\operatorname{Im} z|$?

28.5. Комплексная плоскость с удаленной нулевой точкой подвергается деформации, задаваемой функцией $w=z/\bar{z}$. В какую фигуру деформируется эта плоскость?

28.6. В какую фигуру преобразуется круг радиуса 2 с центром в точке $2i$ с помощью функции $w=|z|+1$?

28.7. В какую фигуру преобразует комплексную z-плоскость функция $w=e^{i|z|}$?

*§ 29. Чему равен логарифм неположительного числа?

Попытки математиков XVIII в. вычислить логарифмы отрицательных чисел приводили к таким парадоксам и противоречиям, которые ставили под серьезное сомнение надежность комплексных чисел как аппарата для математики.

Возьмем, к примеру, число -1. Чему следует считать равным его логарифм [1]? По этому поводу в начале XVIII в. существовали различные мнения. И. Бернулли считал, что $\ln(-1)$ равен нулю. В самом деле, доказывал он, очевидно, что $\ln((-1)^2)=\ln 1=0$. С другой стороны, $\ln((-1)^2)=2\ln(-1)$. Значит, $2\ln(-1)=0$, $\ln(-1)=$ $=0$ (?!). С этим связано и другое утверждение Бернулли: «При любом $a>0$ имеем $\ln(-a)=\ln a$». Действительно, $\ln(-a)=\ln((-1)\cdot a)=\ln a+\ln(-1)=\ln a$, если верно,

[1] Будем иметь здесь в виду *натуральный* логарифм (то есть при основании, равном e).

что $\ln(-1)=0$. Ему возражал Лейбниц. Он высказывал мнение, что логарифмом отрицательного числа должно быть некоторое мнимое число. В самом деле, e^x при любом действительном x является положительным числом. Если же при каком-то x число e^x оказалось отрицательным, то x должно быть мнимым.

Через полвека после этого спора французский математик Ж. Д'Аламбер (1717—1783) убеждал на страницах знаменитой «Энциклопедии», что при $a>0$ число $(-a)$ и число a имеют один и тот же логарифм. Полностью разобраться в загадке о логарифмах неположительных чисел сумел Л. Эйлер.

Вернемся к формуле Эйлера (см. § 7) $e^{ix}=\cos x+ i\sin x$, которую мы приняли в качестве определения мнимой экспоненты (именно такой подход и подразумевается в работе Эйлера 1743 года). Однако такая запись все же давала Эйлеру основания для сомнений: почему мы обозначаем $\cos x+i\sin x$ через e^{ix}, а не через π^{ix} или $(-5)^{ix}$. По этой причине Эйлер решил исходить из *других*, более естественных, определений и на их основании уже получить для формулы Эйлера доказательство. Это Эйлер и предложил в 1748 г. в своей книге «Введение в анализ бесконечно малых». Эйлер обращает внимание на то, что при любом *действительном* x можно функции e^x, $\cos x$ и $\sin x$ представить в виде сумм бесконечных рядов:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots, \tag{1}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\ldots, \tag{2}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\ldots \tag{3}$$

Эти формулы доказываются сейчас в любом курсе математического анализа. При мнимых же значениях x

мы не знаем, что такое e^x, $\cos x$ и $\sin x$. Эйлер предлагает распространить формулы (1) — (3) и на случай мнимых значений аргумента x. А именно, ввести такие определения: *при любых комплексных значениях числа z под выражениями e^z, $\cos z$ и $\sin z$ следует понимать выражения:*

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots , \tag{4}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \dots , \tag{5}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \dots . \tag{6}$$

Строго говоря, надо еще доказать, что выражения в правых частях формул (4) — (6) *имеют смысл* при любых комплексных значениях буквы z, но это математики умеют делать, и не очень сложно.

Таким образом, что такое e^i или $\sin i$? Это по определению суммы рядов:

$$e^i = 1 + i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{6} + \dots, \quad \sin i = i - \frac{i^3}{6} + \frac{i^5}{120} - \dots .$$

Можно затем убедиться, что при любых (уже не обязательно действительных) значениях чисел z и t справедливо равенство: $e^z \cdot e^t = e^{z+t}$.

Теперь обратимся к выражению e^{iz}. Имеем на основании формул (4) — (6):

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) =$$

$$= \cos z + i \sin z,$$

то есть $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

Определения (4) — (6) приводят к формуле Эйлера *при любом комплексном z.*

Например:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

Если мы определили экспоненту e^z при любом комплексном z по формуле (4), то можно теперь легко определить понятие «логарифм» (так же, как мы это делаем в области действительных чисел): число w называется *логарифмом* числа z, если имеет место равенство

$$e^w = z.$$

Имея такое четкое определение, мы можем ответить на вопрос, поставленный в заглавии данного параграфа. И здесь Эйлер обнаружил, что оба математика — и Бернулли, и Лейбниц — не правы.

Начнем с числа $z = 0$. Имеет ли число нуль *комплексный* логарифм? Число 0 не имеет действительного логарифма: ни при каком действительном u равенство $e^u = 0$ невозможно. Если же допустить, что число $z = 0$ имеет комплексный логарифм (обозначим его буквой w), то

$$e^w = 0. \tag{7}$$

Полагая $w = u + iv$, получим:

$$e^u \cdot e^{iv} = 0.$$

Беря от обеих частей модули, получим:

$$e^u = 0, \tag{8}$$

то есть из нашего допущения (7) следовал бы вывод, что должно существовать *действительное* число u, удовлетворяющее равенству (8), а это невозможно. Итак, *число* 0 *и в комплексной области логарифмов не имеет.*

А как обстоит дело в случае комплексного числа z, отличного от нуля?

Обозначим через r и φ модуль и главное значение аргумента числа z. Мы знаем из курса алгебры, что положительное число r имеет действительный логарифм, который обозначается через $\ln r$. Рассмотрим число

$$w = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \tag{9}$$

где k — любое целое число ($k \in \mathbf{Z}$). Вычислим, чему равно e^w: $e^w = e^{\ln r + i(\varphi + 2k\pi)} = e^{\ln r} \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i \cdot 2k\pi} = re^{i\varphi}(\cos 2k\pi + i \times$ $\times \sin 2k\pi) = z$.

Значит, *любое число вида* (9) *является логарифмом числа* z. Каждое число z, отличное от 0, имеет *бесконечно много* логарифмов, которые могут быть найдены по формуле (9) при всевозможных целых значениях буквы k. Можно показать, что других логарифмов, помимо даваемых формулой (9), число z не имеет. Логарифмы комплексного числа z принято обозначать так: $\mathrm{Ln}\, z$. Значит,

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Примеры.

1. $z = 1$, $\mathrm{Ln}\, 1 = \ln |1| + i(\arg 1 + 2k\pi)$, т. е. $\mathrm{Ln}\, 1 = 2k\pi i$ ($k \in \mathbf{Z}$). Итак, число 1 имеет бесконечно много логарифмов, и среди них только один действительный — это число 0 (при $k = 0$). С этим логарифмом мы познакомились в школьном курсе математики. Остальные логарифмы числа 1 не являются действительными числами: $2\pi i$, $-2\pi i$, $4\pi i$, $-4\pi i$ и т. д.

2. $z = -1$. Так как $|-1| = 1$, $\arg(-1) = \pi$, то $\mathrm{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i$. У числа -1 тоже бесконечно много логарифмов: πi, $-\pi i$, $3\pi i$, $-3\pi i$, $5\pi i$, $-5\pi i$, ... Но среди них нет ни одного действительного.

Таким образом, предположение Бернулли и Д'Аламбера о том, что $\ln(-1) = 0$, было ошибочным. Но ошибку допустил и Лейбниц, полагавший, что у числа -1 имеется лишь один логарифм. В действительности их бесконечно много.

§ 30. Между формулой Эйлера и квадратурой круга

Задача о *квадратуре круга* формулируется так: *построить квадрат (циркулем и линейкой), имеющий такую же площадь, как данный круг.*

В течение двух с половиной тысячелетий задача о квадратуре круга была, наверное, самой знаменитой задачей геометрии. Число «квадратурщиков» было настолько велико, и их «решения» с таким неизменным постоянством оказывались ошибочными, что в 1775 г. Парижская академия наук (а за ней и другие) постановила не рассматривать представляемых ей решений этой задачи.

Остановимся на связи между квадратурой круга и свойствами числа π.

Площадь круга радиуса r равна $\pi r^2 = \left(\sqrt{2\pi r \cdot \frac{r}{2}}\right)^2$, то есть равна площади квадрата со стороной $\sqrt{2\pi r \cdot \frac{r}{2}}$, которая строится как средний пропорциональный отрезок между отрезками $2\pi r$ и $\frac{r}{2}$. И если бы можно было, зная радиус круга r, построить отрезок длиной $2\pi r$, то легко можно было бы построить такой квадрат. И наоборот, если бы при данном r можно было построить квадрат, равновеликий кругу, то можно было бы построить отрезок, равный по длине окружности. В самом деле, если a — сторона квадрата, то $\pi r^2 = a^2$, так что $2\pi r = \frac{2a^2}{r}$ и искомый отрезок строится как четвертый пропорциональный отрезок к отрезкам $2a$, a и r.

Итак, *задача о квадратуре круга равносильна задаче о спрямлении окружности,* то есть о построении отрезка длиной $2\pi r$. При $r = 1$ длина окружности равна 2π. Поэтому задача о спрямлении окружности привела к изучению свойств числа π.

В геометрии известно, что циркулем и линейкой можно при одном лишь заданном отрезке, длина которого принята равной 1, построить отрезок длины x только в том случае, когда число x выражается через 1 с помощью конечного числа таких основных действий: сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение квадратного корня. Алгебраисты умеют доказать, что такое число x всегда является корнем алгебраического уравнения вида:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (1)$$

с целыми коэффициентами, причем это уравнение специального типа, коэффициенты которого должны быть по-особому связаны между собой. А если бы вдруг оказалось, что число π не удовлетворяет никакому уравнению вида (1) с целочисленными коэффициентами? Это, очевидно, означало бы, что задачу о квадратуре круга невозможно решить с помощью циркуля и линейки!

Около 1840 г. математики стали изучать свойства таких чисел, которые представляют собой корни алгебраических уравнений с целочисленными коэффициентами, точнее говоря, уравнений вида (1), где n — какое-либо натуральное число, а a_0, a_1, ..., a_n — какие-либо целые комплексные числа. Эти корни получили название *алгебраических чисел*. Например, числа $\frac{3}{7}$, i, $\sqrt{3}+i$ — алгебраические, потому что являются корнями уравнений $7x-3=0$, $x^2+1=0$, $(x-i)^2-3=0$.

Считали, что помимо алгебраических чисел, никаких других комплексных чисел не бывает. Однако в 1849 г. французский математик Ж. Лиувилль (1809—1882) привел пример числа, которое не является алгебраическим. Числа, которые не являются алгебраическими, получили название *трансцендентных чисел*. То, что число e является трансцендентным, означает, что при любых целых комплексных числах a_0, a_1, ..., a_n невозможно равенство: $a_0e^n+a_1e^{n-1}+a_2e^{n-2}+\ldots+a_{n-1}e+a_n=0$.

К 1873 г. было известно, что трансцендентных чисел много, что множество всех трансцендентных чисел в определенном смысле более массивное, более богатое элементами, «более мощное», чем множество алгебраических чисел. Но математиков того времени волновал вопрос о трансцендентности (или алгебраичности) лишь одного числа — числа π. Поэтому неудивительно, что Эрмит закончил доказательство трансцендентности числа e замечанием, что выяснение того, является ли число π алгебраическим или трансцендентным, окажется существенно более трудной задачей и вряд ли ее удастся решить в скором будущем. Однако он ошибся: через несколько лет (1882 г.) немецкий математик К. Линдеман (1852—1939), обобщая рассуждение Эрмита, доказал такую теорему: *равенство вида*

$$a_0e^{\lambda_0} + a_1e^{\lambda_1} + a_2e^{\lambda_2} + \ldots + a_ne^{\lambda_n} = 0,$$

где $a_0, \ldots, a_n$ — алгебраические числа, не равные нулю, а $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — попарно различные алгебраические числа, невозможно.

Затем Линдеман предложил рассмотреть такой частный случай: $n=1$, $a_0=1$, $a_1=1$, $\lambda_0=0$, $\lambda_1=\lambda$. Тогда в силу общей теоремы Линдемана имеем: если λ — алгебраическое число, то невозможно равенство

$$1+e^{\lambda}=0.$$

Но мы знаем (см. § 29), что при $\lambda=\pi i$ верно равенство

$$1+e^{i\pi}=0.$$

Следовательно, число $i\pi$ не может быть алгебраическим, а вместе с ним не может оказаться алгебраическим и число π.

Таким образом, построить циркулем и линейкой квадрат, равновеликий данному кругу, невозможно, т. е. задача о квадратуре круга циркулем и линейкой неразрешима!

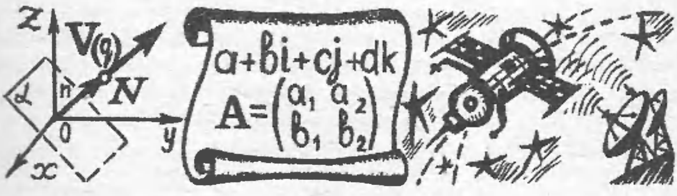
IV

ОБОБЩЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Не только выдающийся математик и физик, но и лингвист, и оратор. Мировую известность принесло Гамильтону разработанное им исчисление кватернионов. Идею комплексных чисел распространил на пространство.

Изобретение кватернионов – шаг вперед к пониманию величин, связанных с пространством; оно сравнимо по своему значению с изобретенной Декартом системой координат.

Дж. МАКСВЕЛЛ.



Числа натуральные..., целые... рациональные... действительные... комплексные... Что дальше? Ведь если комплексные числа оказались такими полезными и нашли так много применений, то открытие других, более общих видов чисел тоже представляется перспективным делом. В этой главе мы расскажем о том, как математики, разобравшись в комплексных числах, сразу же обратились к поискам их дальнейших обобщений, к поискам приложений этих обобщений. Всего лишь в течение четырех десятилетий после того, как У. Гамильтон раскрыл математикам точный реальный смысл комплексных чисел, были найдены наиболее важные из этих обобщений. О них — о кватернионах, о гиперкомплексных системах, о матрицах — и пойдет речь в заключительной главе.

§ 31. Кватернионы — что это такое?

Как только У. Гамильтону (в 1833 г.) удалось снять покров таинственности с мнимых величин, и он понял, что мнимые числа — это всего лишь упорядоченные *пары* действительных чисел, для которых определенным образом введены арифметические операции, он задумался над тем, как построить систему новых чисел, которые представляли бы собой упорядоченные *тройки* действительных чисел. Каким образом лучше всего ввести для них арифметические действия? Подобно тому, как для комплексных чисел удобна запись вида $a+bi$, где i — мнимая единица, для новых чисел,— размышлял Гамильтон,— подойдет, пожалуй, запись $a+bi+cj$, где i и j — *две различные мнимые единицы.* И даже выразительное название для таких чисел само собой напросилось: *триплёты* («триплет» в переводе с латинского означает «тройка»). В том, что теорию триплетов будет нетрудно построить, Гамильтон не сомневался, и поэтому статью, посвященную обоснованию комплексных чисел (1837 г.), без колебаний закончил анонсом, что вскоре опубликует теорию триплетов. И действительно, начать эту теорию было ему легко. Без труда ввел он понятия равенства двух триплетов, их суммы и разности. Все здесь заключалось в слове *покомпонентно*...

Но что назвать *произведением* двух триплетов? Гамильтон искал для новой системы чисел такое правило умножения, чтобы сохранились закономерности арифметики — те самые, которые хорошо известны для рациональных чисел, для действительных чисел и даже для комплексных чисел. Конечно, хотелось, чтобы для новых чисел сохранились ассоциативный (сочетательный) закон — не только для сложения, но и для умножения: $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$, дистрибутивный (распределительный) закон умножения относительно сложения $a(b+c)=ab+ac$ и коммутативный (переместительный) закон как для сложения $a+b=b+a$, так и для умножения $a\cdot b=b\cdot a$. На первое место Гамильтон ста-

Уильям Роуан ГАМИЛЬТОН (1805—1865) был не только выдающимся математиком и физиком, но и талантливым лингвистом и оратором. Его исключительная любознательность и способности к математике и языкам проявились еще в детстве. К 13 годам он знал 13 языков. В 22 года был избран профессором астрономии Дублинского университета и директором университетской обсерватории, в 32 года — президентом Ирландской академии наук. Гамильтон был членом-корреспондентом Петербургской Академии наук и многих других академий и научных обществ. Свою теорию комплексных чисел Гамильтон изложил в докладе, зачитанном в 1835 г. на заседании Ирландской академии наук. Доклад был опубликован в развернутом виде под названием «Теория сопряженных функций или алгебраических пар, с предварительным очерком об алгебре как науке о чистом времени» (1837).

вил такое свойство: «Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ должно иметь, и притом — единственное, решение». В частности, если произведение двух чисел a и x равно нулю ($a \cdot x = 0$), причем $a \neq 0$, то число x должно оказаться нулем.

Вот здесь и возникло у Гамильтона непредвиденное затруднение: какой бы способ умножения триплетов он не подбирал, всегда обнаруживались такие пары ненулевых триплетов, которые в произведении давали нуль: $a \neq 0$, $x \neq 0$, но $a \cdot x = 0$. Гамильтон перебрал десятки вариантов умножения триплетов, но подобрать способ умножения, не имеющий указанного недостатка, ему так и не удалось (много позднее было доказано, что такого способа умножения триплетов не существует). Годы шли, а сдвига не было.

И все же выход был найден. Осенью 1843 г. Гамильтона осенила мысль: следует рассматривать числовую систему не с тремя, а с *четырьмя* (!) единицами (одна действительная и *три* мнимых)!

Речь идет о выражениях вида: $a + bi + cj + dk$, (1)

Заметим, что в 1837 г. Лейпцигское ученое общество объявило конкурс на тему «Усовершенствование теории комплексных чисел». На этот конкурс поступила работа венгерского математика Яноша Больяи (1802—1860). Независимо от Гамильтона Больяи строит в своей работе теорию комплексных чисел, сходную с теорией Гамильтона.

Особенно известны теоретические исследования Гамильтона по механике и оптике. На основании чисто теоретических рассуждений он предсказал оптическое явление — двойную дифракцию в кристаллах, которая вскоре была экспериментально обнаружена физиками. Мировую известность принесло Гамильтону разработанное им исчисление кватернионов.

где i, j, k — мнимые единицы. Задать такое выражение — это то же самое, что задать четверку действительных чисел a, b, c, d, расположенных в указанном порядке. Числа вида (1) Гамильтон назвал *кватернионами* (от латинского слова quaterni, что означает «по четыре»). Гамильтон тогда же предложил следующее правило умножения мнимых единиц:

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = i \cdot j \cdot k = -1.$$

Суть своего открытия Гамильтон изложил в 1844 г. в небольшой (на четырех страницах) статье «О кватернионах или о новой системе мнимых в алгебре» (о том же он рассказал еще раньше, в ноябре 1843 г., в докладе на заседании Ирландской академии наук).

После открытия кватернионов Гамильтон занялся систематическим изучением их свойств и приложений. В 1845 г. он отказался от должности президента Ирландской академии наук, чтобы целиком посвятить себя изучению кватернионов. В течение двух десятилетий он публикует 109 научных работ, посвященных кватернионам, в том числе две фундаментальные монографии «Лекции о кватернионах» и «Элементы теории кватернионов».

Открытие кватернионов произвело сильное впечатление на математиков прошлого века. Известный французский физик и математик А. Пуанкаре (1854—1912) писал: «Это была революция в арифметике, подобная той, которую совершил Лобачевский в геометрии».

Теория кватернионов увлекла многих математиков. Только в XIX в. было издано почти 600 научных работ, посвященных кватернионам. В этих работах кватернионы успешно применяются к решению различных задач по физике, геометрии, теории чисел. В ряде университетов преподавание кватернионов стало обязательным, с ними знакомили учащихся во многих средних школах.

Уже после смерти Гамильтона было обнаружено, что идея предложенного им исчисления кватернионов волновала (еще до опубликования его работ) и других математиков. В черновиках Гаусса был найден набросок «Мутация пространства трех измерений» (1819 г.), в которой он вводит кватернионы как упорядоченные четверки действительных чисел (Гаусс называет такую четверку «шкалой мутации»), причем для таких объектов вводятся правила действий, не отличающиеся по существу от гамильтоновых. Немецкий геометр В. Бляшке (1885—1962), анализируя некоторые работы Эйлера, пришел к выводу, что Эйлер еще в 1748 г. владел аппаратом теории кватернионов и (неявно) использовал его в задачах механики твердого тела и в теории чисел.

В 1895 г. была организована Международная ассоциация содействия изучению кватернионов и родственных систем.

Большое применение находит сейчас векторное исчисление, которое возникло на базе исчисления кватернионов. Векторы были введены Гамильтоном как кватернионы специального вида (мы еще скажем об этом ниже). Изобретение исчисления кватернионов послужило импульсом для создания ряда важных разделов современной математики, в частности теории матриц, многомерной геометрии и др. Кватернионы и предложенные позднее сходные с ними числовые системы успешно используются в теории чисел, в геометрии, в механике и теоретической физике.

Именно в кватернионах дал английский физик Дж. К. Максвелл (1831—1879) компактную запись своих знаменитых уравнений, ставших основой теории электромагнетизма. Уже в последние десятилетия стало ясным, что исчисление кватернионов представляет собой особо удобный математический аппарат для специальной теории относительности.

§ 32. Арифметика кватернионов

Расскажем о простейших понятиях и фактах исчисления кватернионов. Рассмотрим выражения вида:

$$q_0 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k\,, \tag{1}$$

где q_0, q_1, q_2, q_3 — действительные числа, а i, j, k — знаки, которые называют *мнимыми единицами* (соответственно первая, вторая, третья). Знак «$+$» используется здесь лишь для объединения в одно целое упорядоченной четверки действительных чисел q_0, q_1, q_2, q_3. О сложении выражений вида (1) речь пойдет ниже. Чтобы эти выражения можно было назвать числами, мы должны знать, когда их следует считать равными, должны указать правила, которые позволяют эти выражения складывать, вычитать, умножать, делить. Если эти правила задаются так, как указано ниже, то выражения вида (1) и будем называть *кватернионами*. Кватернион, как и комплексное число, можно обозначить одной буквой:

$$q = q_0 + q_1 \cdot i + q_2 j + q_3 \cdot k. \tag{2}$$

Входящие в эту формулу действительные числа q_0, q_1, q_2, q_3 называют *компонентами* кватерниона q. По аналогии с комплексными числами (а Гамильтон стремился соблюдать такую аналогию, насколько это было возможно) можно легко дать определения равенства двух кватернионов, суммы и разности двух кватернионов q и q'. А именно, естественно считать два кватерниона $q = q_0 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k$ и $q' = q'_0 + q'_1 \cdot i + q'_2 \cdot j + q'_3 \cdot k$ *равными*, если равны их соответствующие компоненты, а сложение и вычитание производить покомпонентно:

$$q + q' = (q_0 + q'_0) + (q_1 + q'_1) \cdot i + (q_2 + q'_2) \cdot j + (q_3 + q'_3) \cdot k,$$
$$q - q' = (q_0 - q'_0) + (q_1 - q'_1) \cdot i + (q_2 - q'_2) \cdot j + (q_3 - q'_3) \cdot k.$$

Предложенное Гамильтоном правило умножения кватернионов сводится к следующему: два кватерниона умножают так, как будто это обычные многочлены; при

Второй множитель

Первый множитель	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Рис. 74

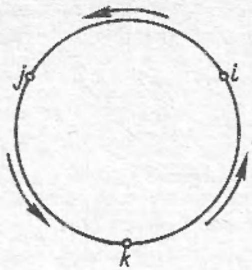


Рис. 75

этом произведения вида $i\cdot j$, $j\cdot k$, $k\cdot j$ и т. п. следует заменить, используя для этого таблицу (рис. 74).

Для запоминания таблицы удобно пользоваться круговой схемой, изображенной на рис. 75. При движении по окружности против часовой стрелки встречаются буквы i, j, k. Произведение двух соседних букв (например, $k\cdot i$) следует заменить третьей буквой (в нашем примере j), взятой со знаком «+», если переход по окружности от первой буквы ко второй происходит против часовой стрелки, и со знаком «—»,— если этот переход совершается по часовой стрелке. Так, в нашем примере имеем: $k\cdot i=j$. Аналогично можно, например, получить $i\cdot k=-j$. Кроме того, по таблице 74 квадрат каждой из трех мнимых единиц равен -1 (то есть $i^2=j^2=k^2=-1$), и значение мнимой единицы не изменяется, если ее умножить (слева или справа) на 1.

В системе чисел, введенной Гамильтоном (ее сейчас называют алгеброй кватернионов), сохраняются многие важные свойства обычных комплексных чисел. В частности, в ней всегда выполнима операция деления на любой кватернион (кроме нулевого кватерниона, то есть такого, у которого все четыре компонента равны нулю).

В исчислении кватернионов имеют место ассоциативный и коммутативный законы для сложения, ассоциативный закон для умножения, дистрибутивный закон для умножения относительно сложения. Правда, *в исчислении кватернионов не выполняется коммутативный закон для умножения.*

Примеры.

1. Имеем два кватерниона: $q=1+j$ и $q'=i+k$. Вычислим их сумму, разность и произведения $q\cdot q'$ и $q'\cdot q$.

Решение. $q+q'=1+i+j+k$, $q-q'=1-i+j-k$, $q\cdot q'=(1+j)(i+k)=2i$, $q'\cdot q=(i+k)(1+j)=2k$.

2. Пусть имеются два кватерниона: $q=i+j+k$, $q'=3+5i$. Вычислим $q\cdot q'$ и $q'\cdot q$.

Решение. $q\cdot q'=5+3i+2j+8k$, $q'\cdot q=5+3i+8j-2k$. ▲

Если у кватерниона (2) компоненты q_1, q_2, q_3 равны нулю, то он называется *скаляром*. Скаляры — это обычные действительные числа.

Если $q_0=0$ и кватернион (2) имеет вид: $q=q_1\cdot i+q_2\cdot j+q_3\cdot k$, то Гамильтон называет его *вектором*. Например, кватернион $2i+3j+5k$ — вектор, кватернион 7 (то есть $7+0i+0j+0k$) — скаляр, а кватернион $1+i+j$ — ни вектор, ни скаляр. Каждый вектор $Q=q_1\cdot i+q_2\cdot j+q_3\cdot k$ можно наглядно истолковать в трехмерном пространстве геометрически как направленный отрезок, у которого проекции на координатные оси Ox, Oy, Oz равны соответственно q_1, q_2, q_3. На рисунке 76 изображен вектор $Q=2i+3j+5k$.

Кватернионы i, j, k изобразятся в виде направленных отрезков длины 1, лежащих соответственно на осях Ox, Oy, Oz. Вектор (любой ориентации), длина которого равна одной единице, называют *ортом*.

(Слово «орт» возникло как сокращение слова «ориентация»).

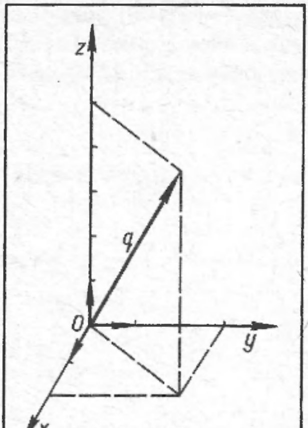


Рис. 76

Каждый кватернион $Q = q_0 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k$ можно записать в виде суммы двух кватернионов: скаляра (q_0) и вектора $(q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k)$. Иначе говоря,

$$Q = S(Q) + V(Q),$$

где $S(Q) = q_0$ — *скалярная часть* кватерниона Q, $V(Q) = q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k$ — его *векторная часть*. Например, у кватерниона $3 - 5 \cdot i + 4 \cdot k$ скалярная часть равна 3, а векторная часть равна $-5 \cdot i + 4 \cdot k$.

Для вычислений с кватернионами полезно иметь формулу для произведения двух кватернионов общего вида: $a = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$, $q = q_0 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k$. Умножая a на q как многочлен на многочлен и пользуясь таблицей (рис. 74), получаем:

$$a \cdot q = (a_0q_0 - a_1q_1 - a_2q_2 - a_3q_3) + (a_0q_1 + a_1q_0 + a_2q_3 - a_3q_2)i + (a_0q_2 + a_2q_0 + a_3q_1 - a_1q_3)j + (a_0q_3 + a_3q_0 + a_1q_2 - a_2q_1)k. \quad (3)$$

По аналогии с теорией комплексных чисел можно для каждого кватерниона $q = q_0 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k$ ввести понятие *модуля* $|q|$ и *сопряженного кватерниона* $\bar{q}$; по определению:

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2},$$
$$\bar{q} = q_0 - q_1 \cdot i - q_2 \cdot j - q_3 \cdot k.$$

Например, для кватерниона $q = 2 - i + k$ имеем:

$$|q| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{6},$$
$$\bar{q} = 2 + i - k.$$

Известно, что для каждого комплексного числа z верно тождество $z\cdot\bar{z}=|z|^2$. Проверим, сохраняется ли аналогичное свойство для какого-нибудь кватерниона, например для кватерниона $q=2-i+k$. Имеем:

$$q\cdot\bar{q}=(2-i+k)(2+i-k)=6=|q|^2.$$

Сохраняется ли такое же свойство для каждого кватерниона? Оказывается, да: при любом выборе кватерниона q справедливы равенства:

$$q\cdot\bar{q}=\bar{q}\cdot q=|q|^2. \tag{4}$$

Это нетрудно доказать, если воспользоваться тождеством (3).

Запишем еще два тождества, которые полезны при вычислениях с кватернионами:

$$\overline{a\cdot q}=\bar{q}\cdot\bar{a}, \tag{5}$$

$$|a\cdot q|=|a|\cdot|q|. \tag{6}$$

Равенство (5) следует из (3): если для кватернионов q и a образовать кватернионы $\bar{q}$ и $\bar{a}$ и затем, пользуясь формулой (3), составить произведение $\bar{q}\cdot\bar{a}$, то можно убедиться, что получается кватернион, сопряженный с кватернионом $a\cdot q$. Заметим: так как в исчислении кватернионов не выполняется коммутативный закон для умножения, то порядок множителей в формуле (5) существенен!

Равенство (6) следует из (5) и (4):

$$|a\cdot q|^2=(a\cdot q)\cdot(\overline{a\cdot q})=a\cdot q\cdot\bar{q}\cdot\bar{a}=a\cdot(q\cdot\bar{q})\cdot\bar{a}=$$
$$=a\cdot|q|^2\cdot\bar{a}=|q|^2\cdot a\cdot\bar{a}=|q|^2\cdot|a|^2,$$

то есть

$$|a\cdot q|^2=|a|^2\cdot|q|^2. \tag{7}$$

Так как $|a\cdot q|$ и $|a|\cdot|q|$ — действительные неотрицательные числа, то из (7) следует (6).

Приведенные простейшие факты позволяют найти одно полезное приложение кватернионов.

3. Каждое из чисел 17 и 47 можно представить в виде суммы четырех точных квадратов (квадратов целых чисел): $17=4^2+1^2+0^2+0^2$, $47=6^2+3^2+1^2+1^2$. Докажем, что их произведение 799 можно представить в виде суммы четырех точных квадратов.

Решение. Применяя кватернионы, можно написать: $17=|4+i|^2$, $47=|6+3i+j+k|^2$. Поэтому (в силу формулы (6)): $799=17\cdot 47=|4+i|^2\cdot|6+3i+j+k|^2=|(4+i)(6+3i+j+k)|^2=|21+18i+3j+5k|^2$. Из определения модуля кватерниона следует, что $799=21^2+18^2+3^2+5^2$.

4. Имеется несколько целых чисел $N_1, N_2, \ldots, N_m$, причем известно, что каждое из них можно представить в виде суммы четырех точных квадратов. Можно ли гарантировать, что и их произведение $N=N_1\cdot N_2\cdot\ldots\cdot N_m$ тоже можно представить в виде суммы четырех точных квадратов?

Решение. Пусть $N_1=a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2$, $N_2=a_2+b_2+c^2+d_2^2$, ..., $N_m=a_m^2+b_m^2+c^2+d_m^2$, (все числа a_k, b_k, c_k, d_k при $k=1, 2, \ldots, m$ — целые).

Каждое из чисел $N_1, N_2, \ldots, N_m$ можно рассматривать как квадрат модуля некоторого кватерниона:

$$N_1=|Q_1|^2,\quad \text{где } Q_1=a_1+b_1\cdot i+c_1\cdot j+d_1\cdot k;$$
$$N_2=|Q_2|^2,\quad \text{где } Q_2=a_2+b_2\cdot i+c_2\cdot j+d_2\cdot k;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$N_m=|Q_m|^2,\quad \text{где } Q_m=a_m+b_m\cdot i+c_m\cdot j+d_m\cdot k.$$

Тогда

$$N=N_1\cdot N_2\cdot\ldots\cdot N_m=|Q_1\cdot Q_2\cdot\ldots\cdot Q_m|^2=|Q|^2,$$

где $Q=Q_1\cdot Q_2\cdot\ldots\cdot Q_m$.

При умножении нескольких кватернионов над их компонентами не совершаются никакие другие операции, кроме сложения, вычитания и умножения. Поэтому кватернион Q можно представить в виде:

$$Q=A+B\cdot i+C\cdot j+D\cdot k,$$

где A, B, C, D — целые числа. Но тогда $N = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$. Итак, произведение $N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_k$ можно представить в виде суммы четырех точных квадратов. ▲

Ж. Л. Лагранж (см. о нем в § 12) установил, что *каждое простое число можно представить в виде суммы четырех точных квадратов.* Если вспомним, что каждое натуральное число является произведением простых чисел, и учтем содержание примера 4, то получим теорему Лагранжа: *каждое натуральное число n (простое или составное) можно представить в виде суммы четырех точных квадратов: $n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, где x, y, z, t — целые числа.*

Исчисление кватернионов позволяет подсчитать, сколько всего существует таких представлений для каждого заданного числа n.

Для выявления свойств натуральных чисел оказалось полезным построить теорию *целых* кватернионов, сходную с теорией Гаусса целых комплексных чисел. Такая теория была разработана усилиями немецкого математика А. Гурвица, советских математиков Б. А. Венкова, Ю. В. Линника и др.

Казалось бы естественным назвать целым кватернионом такой кватернион $q = n_0 + n_1 i + n_2 j + n_3 k$, у которого все компоненты — целые действительные числа. Выяснилось, что для приложений это определение следует расширить и причислять к целым кватернионам еще все такие, которые можно представить в виде $\frac{1}{2} n_0 + \frac{1}{2} n_1 i + \frac{1}{2} n_2 j + \frac{1}{2} n_3 k$, где n_0, n_1, n_2, n_3 — нечетные целые числа. После этого можно развить для кватернионов теорию делимости (при этом придется иметь дело с «делимостью слева» и «делимостью справа»). Можно затем ввести понятия простого кватерниона, наибольшего общего делителя нескольких кватернионов, взаимно

Юрий Владимирович Линник (1915—1972) — советский математик, Герой Социалистического Труда. Создал новые эффективные методы, с помощью которых решил ряд классических проблем теории чисел, доказал теорему о том, что каждое, достаточно большое число можно представить в виде суммы двух простых чисел и нескольких степеней двоек, причем число двоек ограничено абсолютной постоянной. Важные результаты получил в теории вероятностей и математической статистике. С помощью новых аналитических средств добился существенных результатов в изучении вероятностей больших отклонений. Дал теоретико - информационное доказательство центральной предельной теоремы.

простых кватернионов, установить теорему о единственности разложения целого кватерниона на простые множители. С помощью этой теории были доказаны различные теоремы о натуральных числах. Например, Б. А. Венков (1900—1962) таким путем определил, сколькими способами натуральное число может быть представлено в виде суммы трех точных квадратов.

Отметим одну особенность, которую несет исчисление кватернионов. Может ли квадратное уравнение иметь больше двух корней? Известно, что уравнение n-й степени, то есть уравнение вида:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0, \qquad (8)$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — данные комплексные числа, а z — искомый корень, имеет в области комплексных чисел ровно n корней (с учетом их кратности). Иначе обстоит дело в исчислении кватернионов: там уравнение вида (8) (считаем, что $a_1, \ldots, a_n$ — данные кватернионы, z — искомый кватернион) может иметь более чем n корней и даже бесконечно много корней.

5. Докажем, что уравнение $z^2+1=0$ имеет в исчислении кватернионов бесконечно много корней. Каждый кватернион, который является вектором единичного модуля, является корнем этого уравнения.

Решение. Действительно, пусть $z=q_1\cdot i+q_2\cdot j+$ $+q_3\cdot k$, причем $q_1^2+q_2^2+q_3^2=1$. Тогда $z^2=(q_1\cdot i+q_2\cdot j+$ $+q_3\cdot k)\cdot(q_1\cdot i+q_2\cdot j+q_3\cdot k)=-q_1^2-q_2^2-q_3^2=-1$.

6. Докажем, что в исчислении кватернионов уравнение $X^2=1$ имеет только два корня, а уравнение $X^3=1$ имеет бесконечно много корней.

Решение. Непосредственной проверкой убеждаемся, что рассматриваемые уравнения можно привести к виду:

$$(X-1)(X+1)=0 \text{ и } (X-1)(X^2+X+1)=0.$$

Отсюда видно, что в исчислении кватернионов уравнение $X^2-1=0$ имеет только два корня: 1 и -1. Число 1 является также корнем уравнения $X^3-1=0$. Остальными его корнями служат кватернионы (X), удовлетворяющие уравнению $X^2+X+1=0$, то есть

$$\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0 \text{ или } Y^2+1=0, \text{ где } Y=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(X+\frac{1}{2}\right).$$

Но мы уже знаем (см. пример 5), что последнее уравнение имеет бесконечно много корней. Отсюда следует, что и уравнение $X^3-1=0$ имеет в исчислении кватернионов бесконечно много корней.

Деление кватернионов. Что значит разделить один кватернион Q на другой q? Это значит, найти такой кватернион X, который при умножении на q дает Q. Но умножить кватернион X на кватернион q можно двояко: слева $(X\cdot q)$ и справа $(q\cdot X)$. Эти произведения, вообще говоря, различны. Поэтому различают *два* частных от деления кватерниона Q на q. Кватернион X называется *левым частным* от деления кватерниона Q на кватернион q, если

$$X\cdot q=Q. \tag{9}$$

Кватернион Y называют *правым частным* от деления кватерниона Q на q, если

$$q \cdot Y = Q. \tag{10}$$

Так, например, левым частным от деления вектора $2i + 2j$ на вектор $j+k$ является кватернион $X = 1 - i + j - k$, потому что

$$X \cdot (j+k) = (1-i+j-k)(j+k) = 2i + 2j.$$

Правым частным от деления вектора $2i+2j$ на вектор $j+k$ является кватернион $Y = 1 - i - j + k$, потому что

$$(j+k)Y = (j+k)(1-i-j+k) = 2i + 2j.$$

Как же вычислить частные — левое и правое — от деления одного кватерниона на другой? Для этой цели можно применить тот же прием, что и при делении комплексных чисел. Умножим обе части уравнения (9) справа сначала на $\bar{q}$ (кватернион, сопряженный с q), а затем — на $\frac{1}{|\bar{q}|^2}$. Учитывая, что $q \cdot \bar{q} = |q|^2$, получим:

$$X = \frac{Q\bar{q}}{|q|^2}. \tag{11}$$

Упражнения

32.1. Применяя кватернионы, проверьте справедливость следующего тождества для любых действительных чисел: $(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = (a_0q_0 - a_1q_1 - a_2q_2 - a_3q_3)^2 + (a_0q_1 + a_1q_0 + a_2q_3 - a_3q_2)^2 + (a_0q_2 + a_2q_0 + a_3q_1 - a_1q_3)^2 + (a_0q_3 + a_3q_0 + a_1q_2 - a_2q_1)^2$.

32.2. Возьмите два каких-либо целых кватерниона p и q, например, $p = 1 - i + j + k$ и $q = 3 + i - 2j + k$. Затем вычислите такие четыре произведения:

$Q_1 = p \cdot q = A_1 + B_1 i + C_1 j + D_1 k,$
$Q_2 = piq = A_2 + B_2 i + C_2 j + D_2 k,$
$Q_3 = pjq = A_3 + B_3 i + C_3 j + D_3 k,$
$Q_4 = pkq = A_4 + B_4 i + C_4 j + D_4 k.$

Составьте таблицу (рис. 77). Сопоставьте суммы чисел, записанных в каждой строке, и суммы чисел, записанных в каждом столбце. Как вы объясните такое совпадение? Имеет ли оно место в случае произвольных целых кватернионов p и q?

A_1^2	B_1^2	C_1^2	D_1^2
A_2^2	B_2^2	C_2^2	D_2^2
A_3^2	B_3^2	C_3^2	D_3^2
A_4^2	B_4^2	C_4^2	D_4^2

Рис. 77

32.3. Выведите самостоятельно формулу для нахождения правого частного от деления Q на кватернион q.

32.4. Разделите вектор $Q=k+i$ на вектор $q=i-j$ (найдите левое частное X и правое частное Y).

32.5. Докажите, что при делении кватерниона $Q=1$ $(Q=1+0\cdot i+0\cdot j+0\cdot k)$ на любой ненулевой кватернион $q=q_0+q_1i+q_2j+q_3k$ левое частное равно правому частному (частное в этом случае обозначается так: q^{-1}).

32.6. Напишите частное от деления скаляра 1 на вектор $i-j$.

§ 33. Геометрия кватернионов

Мы знаем, что каждое комплексное число можно записать в тригонометрической форме. Возможна ли сходная запись для кватернионов? Пусть q — какой-нибудь кватернион. Тогда

$$q=q_0+q_1i+q_2j+q_3k=S(q)+V(q). \qquad (1)$$

Здесь $S(q)$ и $V(q)$ — скалярная часть и векторная часть кватерниона q. Рассмотрим в трехмерном пространстве вектор (рис. 78)

$$V(q)=q_1i+q_2j+q_3k. \qquad (2)$$

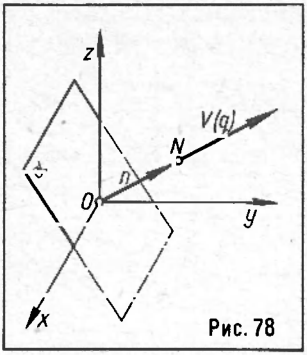


Рис. 78

Он имеет длину

$$|V(q)| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}\,.$$

Орт этого вектора обозначим буквой n (на рисунке $n = \overrightarrow{ON}$). Имеем:

$$V(q) = |V(q)| \cdot n. \qquad (3)$$

Перпендикулярную к нему плоскость, проходящую через начало координат, обозначим через α. Очевидно, мы можем всегда подобрать такой угол φ, что

$$\cos\varphi = \frac{S(q)}{\sqrt{(S(q))^2 + (|V(q)|)^2}} = \frac{q_0}{|q|}, \qquad (4)$$

$$\sin\varphi = \frac{|V(q)|}{\sqrt{(S(q))^2 + (|V(q)|)^2}} = \frac{|V(q)|}{|q|}. \qquad (5)$$

Тогда из (1) — (5) видно, что

$$q = |q| \cdot (\cos\varphi + n\sin\varphi). \qquad (6)$$

Угол φ называется *аргументом кватерниона* (1), ось l, определяемая вектором n,— *осью кватерниона* q, правая часть формулы (6) — *тригонометрической формой кватерниона* q.

Примеры

1. Найдем ось кватерниона $q = 1 + i + j + k$ и его аргумент. Запишем этот кватернион в тригонометрической форме.

Решение. Ясно, что $|q| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2$, $S(q) = 1$, $V(q) = i + j + k$, $|V(q)| = \sqrt{3}$. Орт n вектора $V(q)$ определяем поэтому так: $V(q) = \sqrt{3} \cdot n$, $n = \frac{1}{\sqrt{3}} \times$ $\times (i + j + k)$.

По формулам (4) — (5) имеем: $\cos\varphi=\frac{1}{2}$, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$. В пределах от 0° до 360° этому условию удовлетворяет угол $\varphi=60^\circ$. Таким образом, ось кватерниона q изображается в виде прямой OP. Орт этой оси — вектор $\overrightarrow{ON}$, длина которого равна единице (рис. 79). Аргумент кватерниона q равен 60°. Тригонометрическая форма данного кватерниона такова:

$$1+i+j+k=2\left(\cos 60^\circ+\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)\cdot\sin 60^\circ\right). \quad \blacktriangle$$

Можно показать, что для кватернионов имеет место (при любом целом k) формула, аналогичная известной в теории комплексных чисел формуле Муавра:

$$(\cos\varphi+n\cdot\sin\varphi)^k=\cos k\varphi+n\cdot\sin k\varphi.$$

Понятия модуля и аргумента кватерниона находят полезные геометрические приложения при рассмотрении, например, задач такого типа: дана ось OP и вектор $\overrightarrow{OA}$, требуется найти тот вектор, который образуется, если повернуть вектор $\overrightarrow{OA}$ вокруг оси OP на заданный угол φ.

Приведем без доказательства два часто применяемых в подобных случаях предложения.

Теорема 1. *Пусть вектор $\overrightarrow{OA}$ поворачивается вокруг оси, задаваемой ортом $\overrightarrow{ON}$, на угол φ, причем известно,* что $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{ON}$[1]. *Если векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{ON}$ задаются ква-*

---

[1] Имеется в виду, что с точки зрения наблюдателя, смотрящего на вектор $\overrightarrow{OA}$ из точки N, вращение происходит против часовой стрелки, если $\varphi>0$, и по часовой стрелке, если $\varphi<0$.

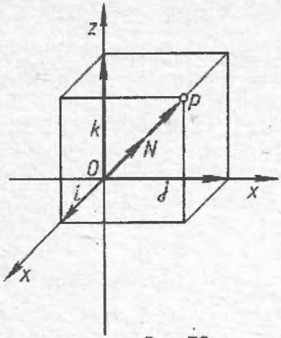


Рис. 79

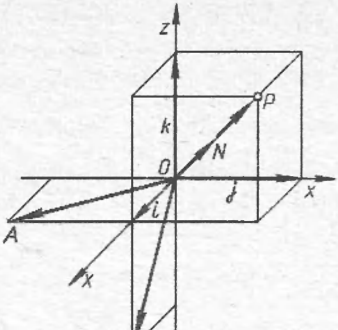


Рис. 80

терннонами a и n, то в результате поворота образуется вектор $\overrightarrow{OB}$, определяемый кватернионом

$$b = (\cos\varphi + n\cdot\sin\varphi)\cdot a. \qquad (7)$$

2. Пусть вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 80) задается кватернионом $a = i - j$, а вектор $\overrightarrow{OP}$ задается кватернионом $i + j + k$. Требуется найти вектор $\overrightarrow{OB}$, который образуется, если повернуть вектор $\overrightarrow{OA}$ вокруг оси OP на $60°$.

Решение. Сначала найдем орт n вектора $\overrightarrow{OP}$: $n = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$. Найдем кватернион b, соответствующий вектору $\overrightarrow{OB}$. Так как $OP \perp OA$, то по формуле (7) имеем: $b = (\cos 60° + \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)\cdot\sin 60°)\cdot(i - j)$. После выкладок найдем: $b = i - k$.

Отсюда видно, что проекции вектора $\overrightarrow{OB}$ на оси

Ox, Oy, Oz равны соответственно 1, 0, -1. Вектор $\overrightarrow{OB}$ изображен на рисунке 80. ▲

Гамильтон рассматривал и тот случай, когда вектор $\overrightarrow{OA}$ не перпендикулярен к оси вращения OP.

Теорема 2. *Пусть вектор $\overrightarrow{OA}$ изображается кватернионом a. Пусть вектор поворачивается вокруг оси OP, определяемой ортом n, на угол φ. Тогда в результате получится вектор $\overrightarrow{OB}$, который может быть задан кватернионом*

$$b=\tau^{\frac{1}{2}}\cdot a\cdot\tau^{-\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

где $\tau^{\frac{1}{2}}=\cos\frac{\varphi}{2}+n\cdot\sin\frac{\varphi}{2}$, $\tau^{-\frac{1}{2}}=\cos\frac{\varphi}{2}-n\cdot\sin\frac{\varphi}{2}$.

Не доказывая эту теорему, проиллюстрируем ее.

3. Пусть вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 81) поворачивается вокруг оси $\overrightarrow{OP}$ (диагональ куба) на угол $\varphi=60^\circ$. Какой вектор получим в результате такого поворота?

Решение. Воспользуемся равенством (8), положив $a=i$, $n=\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)$, $\cos\frac{\varphi}{2}=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}$. Получим: $b=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot i\times$ $\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}(2i+2j-k)$.

Исчисление кватернионов и исчисление векторов. Как мы уже отмечали, кватернионы в прошлом веке нашли многочисленные применения в геометрии, механике и теоретической физике. Однако со временем оказалось, что в большинстве этих случаев достаточно

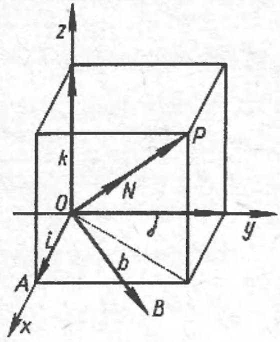


Рис. 81

ограничиться лишь частным видом кватернионов — векторами (кватернионами вида $q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k$). Векторное исчисление по инициативе американского физика Дж. Гиббса (1839—1903) и английского физика О. Хевисайда (1850—1925) стали рассматривать без всякой ссылки на кватернионы (80-е годы XIX в.).

Правила сложения и вычитания векторов такие же, как в исчислении кватернионов. Что касается понятия произведения двух векторов, то оно тоже заимствовано из теории кватернионов: взятую со знаком «минус» скалярную часть того кватерниона, который получается при умножении двух векторов $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ (рассматриваемых как кватернионы), стали называть *скалярным произведением* этих двух векторов (обозначается так: (a, b) или $a \cdot b$); а векторную часть того же кватерниона-произведения стали называть *векторным произведением* данных двух векторов a и b (обозначается так: $[a, b]$ или $a \times b$).

Применяя формулу (3) из § 32 в случае, когда два кватерниона a и b являются векторами ($a_0 = 0$ и $b_0 = 0$), получим:

$$(a,\ b) = -S(a \cdot b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$
$$[a,\ b] = V(a \cdot b) = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k.$$

Эти формулы были приняты в качестве *определений* скалярного и векторного произведений двух векторов без какого-либо упоминания о кватернионах.

Однако и теперь, после введения векторного исчисления, бывает еще немало случаев, когда в математике или ее приложениях оказываются полезными кватернионы общего вида или их разновидности.

Так, в 60—70-х годах нашего века советскими и американскими механиками были разработаны методы расчета системы управления ориентацией искусственного спутника Земли, опирающиеся на исчисление кватернионов. В течение последнего десятилетия появился ряд работ, в которых одна из разновидностей кватернионов успешно применяется в теории относительности. Можно ожидать, что кватернионы найдут еще много новых полезных приложений.

§ 34. О гиперкомплексных числах

Кроме кватернионов, еще в середине прошлого века стали рассматривать и другие «сверхкомплексные» числовые системы, то есть множества выражений вида:

$$a = a_0 i_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n, \qquad (1)$$

где a_0, a_1, ..., a_n — действительные (или даже комплексные) числа, $i_0 = 1$, а i_1, i_2, ..., i_n — мнимые единицы. Правила сравнения, сложения и вычитания такие же, как и для обычных комплексных чисел (покомпонентно). Правило умножения задается каждый раз таблицей умножения единиц. Число $n+1$ называется *рангом гиперкомплексной системы чисел* (1).

Вскоре после изобретения кватернионов Гамильтон стал читать специальный курс о кватернионах и их приложениях (на основании этого курса им была издана в 1853 г. книга «Лекции о кватернионах»). Лекции слушали не только студенты, но и известные математики. Одним из них был А. Кэли. В 1845 г. Кэли предпринял попытку построить новую систему чисел, похожую на кватернионы, но содержащую более четырех

Второй множитель (столбцы); **Первый множитель** (строки)

	1	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
1	1	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
i_1	i_1	-1	i_3	$-i_2$	i_5	$-i_4$	$-i_7$	i_6
i_2	i_2	$-i_3$	-1	i_1	i_6	i_7	$-i_4$	i_5
i_3	i_3	i_2	$-i_1$	-1	i_7	$-i_6$	i_5	$-i_4$
i_4	i_4	$-i_5$	$-i_6$	$-i_7$	-1	i_1	i_2	i_3
i_5	i_5	i_4	$-i_7$	i_6	$-i_1$	-1	$-i_3$	i_2
i_6	i_6	i_7	i_4	$-i_5$	$-i_2$	i_3	-1	$-i_1$
i_7	i_7	$-i_6$	i_5	i_4	$-i_3$	$-i_2$	i_1	-1

Рис. 82

единиц. При этом он (как и Гамильтон при построении теории кватернионов) ставил на первое место требование выполнимости деления на любое число, отличное от нуля. После нескольких попыток Кэли разработал систему чисел, которая содержала восемь «единиц» (из них семь мнимых). Кэли назвал эти числа *октавами* (от латинского octo — восемь). Они известны также как *числа Кэли*. Правило умножения единиц задается в исчислении Кэли специально подобранной таблицей умножения (рис. 82). В случае октав не выполняется для умножения не только коммутативный закон, но и ассоциативный. Зато всегда выполнимо деление на любую октаву, кроме нулевой (то есть кроме той, у которой все компоненты равны нулю). Точнее говоря, при любом выборе октавы b и октавы a, отличной от нуля, найдется только одна такая октава x, что $ax=b$, а также найдется единственная такая октава y, что $ya=b$. Аналогично тому, как это делается для комплексных чисел и кватернионов, для каждой октавы Z определяются понятия сопряженной октавы $\bar{Z}$ и модуля $|Z|$: если $Z=a_0+a_1i_1+\ldots+a_7i_7$, то по определению

$$\bar{Z}=a_0-a_1i_1-\ldots-a_7i_7, \quad |Z|=\sqrt{a_0^2+a_1^2+\ldots+a_7^2}\ .$$

При этом оказывается, что справедливо тождество

$$Z\cdot\bar{Z}=\bar{Z}\cdot Z=|Z|^2, \quad |Z_1\cdot Z_2|=|Z_1|\cdot|Z_2|.$$

* * *

Обычные комплексные числа можно рассматривать как гиперкомплексную систему ранга 2. У этих чисел (имеющих вид $a+bi$) правило умножения мнимых единиц, как мы знаем, такое: $i\cdot i=-1$. Но почему именно -1? А если принять другое правило умножения мнимых единиц, например $i\cdot i=0$? Приведет ли оно к логическому противоречию? Что при этом «испортится»?

Именно на этот вопрос и решил ответить английский математик У. Клиффорд. Рассматривая в качестве чисел упорядоченные пары действительных чисел и записывая их в виде $a+b\omega$, он оставил для них те же правила равенства, сложения и вычитания, что и для обычных комплексных чисел, а для умножения мнимых единиц пользовался таким правилом:

$$\omega\cdot\omega=0. \qquad (2)$$

(«Если в выкладках с такими числами встретится произведение $\omega\cdot\omega$, то разрешается заменить его на 0»). Такие числа получили название *дуальных*. У. Клиффорд, а затем А. П. Котельников, Э. Штуди и другие нашли содержательные применения дуальным числам в геометрии и в механике твердого тела.

Уильям Кингдом КЛИФФОРД (1845—1879) — английский математик, профессор Лондонского университета. Основные работы относятся к алгебре и геометрии. Клиффорд развил геометрию движения, для изучения которой применил кватернионы. Ввел определение параллельных прямых, которое имеет смысл в эллиптическом пространстве, то есть в геометрии Римана. Известен он также как популяризатор физико-математических наук.

Клиффорд обратил внимание и на числа вида $a+b\varepsilon$, где a и b — действительные числа, а $\varepsilon\cdot\varepsilon=1$. («Если встретится в выкладках произведение $\varepsilon\cdot\varepsilon$, то разрешается заменить его на 1»). Эти упорядоченные пары действительных чисел образуют систему *двойных* чисел. Они также находят некоторые применения в геометрии. Для двойных и дуальных чисел сохраняются ассоциативный и коммутативный законы как для сложения, так и для умножения. Верен для них и дистрибутивный закон. Но операция деления на число, отличное от нуля, не всегда выполнима. Например, можно легко убедиться, что двойное число 1 $(1+0\cdot\varepsilon)$ нельзя разделить на число $1+\varepsilon$. Допустим, что нашлось такое двойное число $x+y\varepsilon$, которое является частным от деления числа 1 на число $1+\varepsilon$. Это означало бы, что $(x+y\varepsilon)(1+\varepsilon)=1$. Раскрывая скобки по обычным законам арифметики и учитывая, что $\varepsilon\cdot\varepsilon=1$, получим: $x+y+(x+y)\varepsilon=1+0\cdot\varepsilon$. Отсюда $x+y=1$ и $x+y=0$, что невозможно.

Вводя в рассмотрение различные системы чисел, определяя действия над ними, мы заинтересованы в сохранении для них хотя бы некоторых из основных законов арифметики, известных для действительных чисел. Напомним эти законы.

I. $a+b=b+a$ (коммутативность сложения).

II. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (ассоциативность сложения).

III. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

IV. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ (ассоциативность умножения).

V. $a\cdot b=b\cdot a$ (коммутативность умножения).

VI. Уравнение $a\cdot x=b$ (и уравнение $y\cdot a=b$) при $a\neq 0$ и любом b всегда однозначно разрешимо (иначе можно сказать, что в данной системе чисел выполнимо деление на любое число, отличное от нуля).

Известно, что всем требованиям I — VI удовлетворяют комплексные числа. В прошлом веке немецкий математик К. Вейерштрасс доказал, что среди гиперкомплексных систем, ранг которых не меньше двух, только комплексные числа обладают всеми шестью приведенными выше свойствами.

А если отказаться от требования коммутативности умножения (от условия V)? Известно, что остальным требованиям удовлетворяет, кроме системы комплексных чисел, система кватернионов. Но только ли они?

В 1878 г. немецкий математик Ф. Г. Фробениус установил теорему, смысл которой состоит в следующем: среди систем гиперкомплексных чисел, удовлетворяющих условиям I, II, III, IV, условие выполнимости деления на каждое число, отличное от нуля (условие VI), выполняется лишь для трех систем чисел: для действительных чисел, для обычных комплексных чисел и для кватернионов.

А если ограничиться лишь требованиями I, II, III? В 1960 г. было доказано, что деление (см. свойство VI) возможно лишь в такой гиперкомплексной системе (необязательно ассоциативной или коммутативной относительно умножения), ранг которой равен одному из чисел 1, 2, 4, 8.

До сих пор мы говорили о таких гиперкомплексных системах, компонентами которых являются действительные числа. Но еще Гамильтон обратил внимание на то, что это необязательно. В частности, он рассматривал такие кватернионы, у которых в качестве компонент берутся комплексные числа вида $a+bI$, где $I^2=-1$ (обозначаем здесь мнимую единицу буквой I, так как буква i «уже занята» для обозначения мнимой единицы в записи кватерниона). Такие числа кватернионного типа получили название *бикватернионов Гамильтона*. Если в качестве компонент кватернионов брать дуальные числа Клиффорда $a+b\omega$, то возникает новая система чисел, называемых *бикватернионами Клиффорда*. Можно рассматривать числа вида $a+bI$, где $I^2=-1$, а a и b — *комплексные* числа: $a=a_1+a_2i$, $b=b_1+b_2i$. Возникающая при этом система чисел получила название системы *бикомплексных чисел*.

Со временем количество введенных в математику гиперкомплексных систем сильно разрослось, причем свойства этих систем оказались очень далекими от свойств системы обычных комплексных чисел. Стали рассматривать системы выражений вида (1), где i_0 необязательно есть число 1; a_0, a_1, ..., a_n — необязательно действительные числа (а может быть, и вообще не числа). В связи с этим стали употреблять для указанных систем (в том числе и для систем гиперкомплексных чисел) другое название — *линейные алгебры* (или короче: *алгебры*). Так, теперь принято говорить, например, об *алгебре кватернионов* или об *алгебре дуальных* чисел.

Числа Клиффорда. Ознакомимся еще с одной алгеброй, которую можно рассматривать как обобщение системы кватернионов.

Пусть k — какое-нибудь натуральное число, например $k=3$. Следуя Клиффорду, построим систему чисел, в которой будет 2^k (в нашем случае восемь) единиц. Сначала выберем четыре единицы — одну действительную и три мнимых: 1, e_1, e_2, e_3. Введем правило умножения для мнимых единиц: при любых номерах p и q $(p \neq q)$ $e_p \cdot e_q = -e_q \cdot e_p$ и $e_p^2 = -1$ при $p=1$, 2, 3. Введем еще четыре мнимые единицы: $e_{12}=e_1 \cdot e_2$, $e_{13}=e_1 \cdot e_3$, $e_{23}=e_2 \cdot e_3$, $e_{123}=(e_1 \times e_2)e_3$. После этого мы можем рассматривать всевозможные выражения вида: $A=a_0 \cdot 1 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{23}e_{23} + a_{123}e_{123}$, где a_0, a_1, ..., a_{123} — произвольные действительные числа. Эти выражения (речь идет об упорядоченных восьмерках действительных чисел) и представляют собой *числа Клиффорда* — элементы клиффордовой алгебры. Для этой алгебры имеет место ассоциативный закон (не только для сложения, но

Герман ГРАСМАН (1809—1877) — немецкий математик, физик и филолог. Грасман изучал в Берлинском университете философию и богословие. В возрасте 23 лет увлекся математикой, занялся ее самостоятельным изучением. В 1840 г. сдал экзамен на звание учителя математики, написав экзаменационную работу по теории приливов и отливов, в которой впервые изложил основные положения своей теории протяженности. Много лет Грасман преподавал в гимназии в Штеттине. В эти же годы занимается исследовательской работой. Грасману принадлежит математическая теория цветов, теория образования согласных звуков, а также ряд других исследований в различных отраслях знаний.

и для умножения) и дистрибутивный закон (для умножения относительно сложения). Мы ограничились случаем $k=3$. Аналогично можно поступить при любом натуральном k (тогда единиц будет 2^k). При $k=2$ алгебра Клиффорда совпадает с алгеброй кватернионов: положив $i=e_1$, $j=e_2$, $k=e_1e_2$, видим, что $i^2=j^2=$ $=k^2=ijk=-1$. Клиффорд создал свою алгебру не только под влиянием идей Гамильтона, но и идей другого известного математика, работавшего в том же направлении одновременно с Гамильтоном и независимо от него,— Г. Грасмана. В 1844 г. Грасман построил некоторую линейную алгебру (гиперкомплексную систему чисел), которая включает векторное исчисление наших дней. Мы не будем здесь подробно останавливаться на особенностях этой алгебры, заметим только, что она сходна с клиффордовой алгеброй, о которой мы говорили выше, с той лишь существенной разницей, что в ней вместо правила $e_p^2=-1$ (для каждого номера p от 1 до n) принято правило: $e_p^2=0$. Алгебра Грасмана широко применяется в ряде разделов современной математики.

§ 35. Первая встреча с матрицами

После того как были изобретены кватернионы и октавы и стала очевидной возможность создания систем гиперкомплексных чисел (мыслимых в виде упорядоченных *строчек* по n действительных чисел в каждой), был сделан следующий — и, как оказалось, особенно плодотворный для приложений — шаг по обобщению понятия числа. В 1858 г. А. Кэли занялся систематическим построением чисел новой природы — не строчек, а *таблиц* (прямоугольных, в частности квадратных), составленных из действительных чисел (или даже из комплексных чисел). Они получили название *матриц*. Если в матрице m строк и n столбцов, то говорят, что она имеет размеры $m \times n$. В частном случае, когда матрица квадратная ($m = n$), число ее строк (или столбцов) называют *порядком матрицы*. Например, таблица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$$

представляет собой матрицу размеров 3×4. Она имеет 3 строки и 4 столбца. При записи матрицу обычно заключают в круглые скобки и обозначают одной буквой (например, A, M).

Числа, из которых составлена матрица, называют ее элементами (значительно реже — компонентами). Диагональ квадратной матрицы, идущая от левого верхнего элемента к правому нижнему элементу, называется *главной* диагональю. Например, в квадратной матрице четвертого порядка

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}$$

главная диагональ состоит из элементов 1, 4, 27, 256.

Для каждого элемента матрицы можно указать строку и столбец, в которых он находится. Так, в матрице A элемент 9 находится во второй строке и в третьем столбце. В связи с этим при записи произвольной матрицы ее элементы часто обозначают буквой с двумя индексами, например a_{pq} (здесь p означает номер строки, а q — номер столбца).

Пусть имеются две матрицы одних и тех же размеров. Элементы двух матриц, у которых совпадают номера строк и номера столбцов, определяющих эти элементы, условимся называть *соответственными*. Например, в матрицах

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

элементы $a_{12}=3$ и $b_{12}=8$ — соответственные.

Матрица часто возникает как некоторая информационная сводка. (Матрица, состоящая из одного столбца, называется *матрица-столбец*).

Матрицы используют для компактной записи итогов какого-нибудь турнира, результатов поставки (в каких-либо единицах) товаров из нескольких пунктов отправления в несколько пунктов назначения, стоимостей перевозок этих товаров.

По аналогии с комплексными числами и кватернионами Кэли ввел для матриц одних и тех же размеров определение равенства, правила сложения, вычитания, умножения на число (действительное или комплексное). Как и в случае комплексных чисел или кватернионов, это делается *покомпонентно*. Две матрицы одних и тех же размеров считаются равными, если у них равны соответственные элементы.

Суммой (разностью) двух матриц A и B одних и тех же размеров $m\times n$ называется такая третья матрица (размеров $m\times n$), у которой каждый элемент равен сумме (разности) соответственных элементов данных матриц.

Умножить матрицу на число λ означает, по определению, умножить на него каждый элемент матрицы.

Нулевой матрицей называется такая матрица, у которой все элементы равны нулю.

Сложнее определить *произведение матриц*. Сначала ограничимся умножением квадратной матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

на матрицу-столбец $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Это делается по правилу «умножения строки на столбец»:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x + a_2 y \\ b_1 x + b_2 y \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(в результате получаем матрицу-столбец).

Иначе говоря, следует умножить первый элемент первой строки матрицы A на первый элемент столбца X и второй элемент той же строки на второй элемент столбца X, после чего полученные числа сложить. Эта сумма и будет элементом первой строки и первого (единственного в данном случае) столбца матрицы-произведения. Умножая вторую строку матрицы A на элементы матрицы X по тому же правилу «строка на столбец», получим второй элемент матрицы-произведения. В результате такого умножения получаем:

$$A \cdot X = C,$$

где C — матрица, записанная в правой части формулы (2).

С помощью умножения матриц можно компактно записывать системы уравнений. Так, систему

$$\begin{cases} 2x + 6y = 17, \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$$

можно записать в виде: $A \cdot X = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 17 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Именно возможность такой компактной записи системы уравнений и диктовала выбор правила умножения матриц. Аналогично можно определить умножение матрицы A, у которой 3 строки и 3 столбца, на матрицу-столбец X, у которой 3 элемента. Тогда, например, систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y + 7z = 5, \\ 7x - 6y = 0, \\ 2y + 13z = 1 \end{cases}$$

можно записать компактнее так:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Идя по линии обобщения и применения аналогий, можно правило умножения «строка на столбец» перенести и на случай двух квадратных матриц. А именно, произведением матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \quad \text{на} \quad P = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$$

называется матрица

$$U = \begin{pmatrix} a_1p_1 + a_2p_2 & a_1q_1 + a_2q_2 \\ b_1p_1 + b_2p_2 & b_1q_1 + b_2q_2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

При изучении комплексных чисел мы видели, что целесообразно толковать комплексный множитель a в произведении $w = a \cdot z$ как оператор, действующий на вектор с комплексной координатой z и преобразующий его в некоторый другой вектор (с комплексной координатой w). Аналогичный операторный подход и операторная терминология уместны и при рассмотрении матриц. Так, в записи $U = A \cdot X$, где X и U — матрицы-столбцы, а A — какая-либо матрица, целесообразно последнюю толковать как некоторый оператор, действующий на матрицу-столбец X и преобразующий ее в матрицу-столбец U. Та же терминология уместна и в том случае, когда матрица X — не обязательно матрица-столбец.

Примеры

1. Даны квадратные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицы-произведения $U_1 = A \cdot B$ и $U_2 = B \cdot A$.

Решение. Пользуясь правилом «строка на столбец» для умножения квадратных матриц (см. формулу 3), найдем:

$$U_1 = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot(-4)+2\cdot 2 & 1\cdot 1+2\cdot(-2) \\ -1\cdot(-4)+3\cdot 2 & -1\cdot 1+3\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}.$$

Аналогично получим:

$$U_2 = B \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4\cdot 1+1\cdot(-1) & -4\cdot 2+1\cdot 3 \\ 2\cdot 1+(-2)\cdot(-1) & 2\cdot 2+(-2)\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая полученные результаты, можно заключить, что умножение двух квадратных матриц может и не обладать переместительным свойством, т. е. в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$. Не исключена возможность, что при каком-то подборе матриц A и B равенство $A \cdot B = B \cdot A$ выполнится.

2. Даны две матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем произведение $E \cdot A$.

Решение. Пользуясь правилом умножения квадратных матриц (см. формулу 3), находим:

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot a+0\cdot c & 1\cdot b+0\cdot d \\ 0\cdot a+1\cdot c & 0\cdot b+1\cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A.$$

Как следует из примера 2, матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

действуя на любую квадратную матрицу порядка 2, оставляет ее без изменения подобно тому, как при умножении любого действительного числа на единицу, это число остается неизменным. Учитывая эту аналогию, назовем матрицу E *единичной* матрицей.

Обратим теперь внимание на тот случай, когда произведением двух матриц A и B оказывается единичная матрица E. Такие матрицы называются *взаимно обратными* (матрица B называется *обратной к* A, и наоборот).

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. две перемноженные матрицы взаимно обратные. Легко проверить, что

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Отсюда видно, что при $ad-bc=1$ эти матрицы взаимно обратные. Формулу (4) можно использовать для составления двух взаимно обратных матриц.

3. Дана квадратная матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad-bc \neq 0$. Напишем формулы для вычисления элементов матрицы $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, обратной матрице A.

Решение. Имеем:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1+by_1 & ax_2+by_2 \\ cx_1+dy_1 & cx_2+dy_2 \end{pmatrix}.$$

Так как матрицы A и X — взаимно обратные, т. е.

$A \cdot X = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то из условия равенства двух матриц получим:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 = 1, \\ cx_1 + dy_1 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} ax_2 + by_2 = 0, \\ cx_2 + dy_2 = 1. \end{cases}$$

Решая эти системы уравнений, находим:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{d}{ad - bc}, \quad x_2 = \frac{-b}{ad - bc}, \\ y_1 &= \frac{-c}{ad - bc}, \quad y_2 = \frac{a}{ad - bc}. \end{aligned} \tag{5}$$

Остановимся (без доказательства) на одном свойстве взаимно обратных матриц: если матрица A, действуя на какую-либо матрицу P, переводит ее в какую-то матрицу Q, то обратная к A матрица B, действуя на матрицу Q, переведет ее обратно в матрицу P.

Последнее обстоятельство может быть использовано для решения занимательных задач на кодирование и декодирование какого-либо текста. Простой способ шифрования состоит в том, чтобы пронумеровать буквы алфавита:

а,	б,	в,	г,	д,	е,	ё,	ж,	з,	и,	й,	к,	л,	м,	н,	о,
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,

п,	р,	с,	т,	у,	ф,	х,	ц,	ч,	ш,	щ,	ъ,	ы,
17,	18,	19,	20,	21,	22,	23,	24,	25,	26,	27,	28,	29,
ь,	э,	ю,	я									
30,	31,	32,	33									

и каждую букву заменить ее номером. Однако такой код легко разгадать. Покажем на примере, как можно, используя матрицы, усложнить этот код. Возьмем какое-нибудь слово, например «Киев». Его код (12, 10, 6, 3). Запишем эти числа в виде квадратной матрицы $P = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. Подействуем на нее произвольной кодирующей матрицей A:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Получим:

$$A\cdot P=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12 & 10\\ 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30 & 23\\ 18 & 13\end{pmatrix}=Q.$$

В этой матрице записан новый код слова «Киев» (30, 23, 18, 13). Обратной матрицей по отношению к матрице A является матрица

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

(см. формулу (4)). Получаем:

$$B\cdot Q=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}30 & 23\\ 18 & 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 10\\ 6 & 3\end{pmatrix}=P,$$

т. е. мы получили исходную матрицу, по которой легко восстановить зашифрованное слово.

Аналогично можно шифровать текст, содержащий бо́льшее число букв (предварительно его следует разбить на грани по 4 буквы в каждой грани и отдельно шифровать каждую грань. Если в одной грани окажется меньше букв, чем 4, то можно приписать, например, несколько твердых знаков).

Совокупность всех матриц нельзя рассматривать как алгебру, так как не любые две матрицы можно сложить или перемножить. Однако *квадратные матрицы одного и того же порядка n* (с действительными или комплексными элементами) *образуют алгебру.*

В течение первых 50 лет после изобретения матриц предпринимались попытки изучить квадратные матрицы заданного порядка n, у которых все элементы — целые числа. Такие матрицы рассматривали как целые гиперкомплексные числа (ранга n^2). На такие числа (их называли *тетарионами)* были перенесены некоторые понятия и факты теории целых комплексных чисел и целых кватернионов.

В качестве нормы тетариона (целочисленной квадратной матрицы) предлагалось взять модуль определителя, элементами которого являются соответствующие элементы матрицы. Однако к содержательным приложениям эта попытка не привела. Приложения матриц оказались связанными с другими проблемами математики и физики.

* * *

Связь между матрицами, комплексными числами, кватернионами. А. Кэли обратил внимание на то, что среди квадратных матриц есть такие матрицы (их элементами являются действительные числа), которые ведут себя в арифметических действиях так же, как комплексные числа. В самом деле, давайте рассматривать всевозможные такие квадратные матрицы порядка 2, которые имеют вид:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Каждому комплексному числу $a+bi$ поставим в соответствие матрицу вида (6). Оказывается, что при этом сумме, разности, произведению двух комплексных чисел будет соответствовать сумма, разность, произведение соответствующих матриц. Поэтому операции сложения, вычитания и умножения, производимые над какими-либо комплексными числами, можно заменить действиями над матрицами вида (6). Эту мысль принято выражать в математике так: *совокупность всех матриц вида* (6) *изоморфна совокупности всех комплексных чисел*. Вычислим определитель матрицы (6), т. е. определитель, задаваемый формулой:

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}.$$

Видим, что он равен норме (квадрату модуля) комплексного числа $a+bi$. Аналогичная картина имеет место и для кватернионов: если каждому кватерниону

$$a+bi+cj+dk \tag{7}$$

поставить в соответствие квадратную матрицу (с комплексными элементами)

$$\begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix}, \tag{8}$$

то соответствие тоже окажется изоморфным (в том смысле, как мы это видели в случае матриц, сопоставляемых комплексным числам). Что касается определителя матрицы (8), то он, очевидно, равен

$$\begin{vmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2,$$

то есть норме (квадрату модуля) кватерниона (7).

Можно подобрать систему матриц с *действительными* элементами, которая изоморфна системе кватернионов. Для этой цели достаточно каждому кватерниону $a+bi+cj+dk$ поставить в соответствие матрицу четвертого порядка:

$$M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & -c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Нетрудно убедиться, что матрицы вида (9) ведут себя по отношению к арифметическим действиям так же, как кватернионы: сумма, разность, произведение двух матриц вида (9) соответствуют сумме, разности, произведению соответствующих кватернионов. Короче говоря, *алгебра матриц вида* (9) *изоморфна алгебре кватернионов*. Для проверки этого факта удобно предварительно представить матрицу вида (9) в виде суммы:

$$M = aE+bI+cJ+dK, \tag{10}$$

где E, I, J, K — матрицы вида:

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$J=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Затем можно проверить, что $I^2=J^2=K^2=-E$, $IJ=K$, $KI=J$, $JK=I$.

Применение матриц. Свойства матриц дают возможность применять их для разнообразных вычислений. Широкие приложения находят матрицы в экономических и статистических расчетах (в хозяйственных расчетах, в производственной статистике, в демографии). В 40-х годах матрицы стали широко внедряться в расчеты электрических цепей, в строительную механику и в другие области науки, где решение прикладных задач связано с решением систем линейных уравнений с большим числом неизвестных. Важное место заняли матрицы в квантовой механике после появления в 1925 г. классических работ физика В. Гейзенберга (1901—1976), в которых матричный аппарат играет решающую роль. Содержательные приложения нашли матрицы в космонавтике и астрономии (в частности, при пересчете данных, полученных в одной системе отсчета, в другую систему отсчета), а также во многих вопросах самой математики.

Упражнения

35.1. Имеются 5 пунктов A, B, C, D, E, координаты которых на плоской карте (0; 4), (1; 2), (1; 0), (4; 1), (3; 3). Некоторые из этих пунктов соединены прямолинейными автобусными линиями. Сведения об этих линиях приведены в таблице (цифра 1 поставлена в том случае, если существует автобусная линия, которая соединяет один пункт с другим, а 0 — если такой линии нет):

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

По этим данным изобразите сеть линий, соединяющих данные пункты. Для удобства пользования таблицей проставлены обозначения пунктов.

35.2. Имелась система из трех линейных уравнений с тремя неизвестными. В матрице A собраны коэффициенты при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

а в матрице D — свободные члены:

$$D = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Восстановите систему уравнений.

35.3. Можно ли сложить матрицы A и B, если

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}?$$

35.4. Даны две матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Запишите матрицы: $C_1=A+B$, $C_2=B+A$, $C_3=A-B$, $C_4=B-A$, $C_5=3A$, $C_6=\frac{1}{2}B$.

35.5. Назовите две такие матрицы A и B, чтобы их сумма оказалась нулевой матрицей.

35.6. Найдите произведение квадратной матрицы

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

на матрицу-столбец $X=\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

35.7. Составьте произвольную квадратную матрицу второго порядка и умножьте ее на нулевую квадратную матрицу того же порядка.

35.8. Составьте две различные квадратные матрицы A и B порядка 2 и запишите матрицы-произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

35.9. Найдите матрицы-произведения $U_1=A\cdot B$ и $U_2=B\cdot A$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

35.10. Может ли произведение двух квадратных (порядка 2) ненулевых матриц оказаться нулевой матрицей?

35.11. Проверьте, что для любой квадратной матрицы A порядка 2 выполняется равенство:

$$A\cdot E=E\cdot A=A.$$

35.12. Используя матрицы, зашифруйте свое имя и фамилию.

35.13. Назовите две такие квадратные матрицы, чтобы их сумма оказалась единичной матрицей.

35.14. Дважды приходили на почту три товарища: Андрей, Валерий и Саша. Каждый раз они покупали открытки (О), конверты (К) и марки (М). Данные об их покупках заданы в таких матрицах:

Покупки в первый раз

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{ccc} \text{О} & \text{К} & \text{М} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Андрей} \\ \text{Валерий} \\ \text{Саша} \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 15 & 7 \\ 15 & 12 & 4 \\ 14 & 6 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Покупки во второй раз

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{ccc} \text{О} & \text{К} & \text{М} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Андрей} \\ \text{Валерий} \\ \text{Саша} \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \\ 5 & 10 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Сколько открыток, конвертов и марок купил каждый из трех товарищей? На сколько больше открыток, конвертов и марок купил каждый из товарищей в первый раз, чем во второй? Получите ответ, выполнив действия над указанными матрицами.

35.15. Мастерская по бытовому обслуживанию населения получила заказ на строительство трех гаражей, семи сараев и шести дачных домиков. Известно, что для сооружения указанных объектов потребуется кирпич, стекло, железо, шифер, доски. Количество требуемых материалов (в определенных единицах) указано в приведенной ниже матрице M.

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{ccccc} \text{кирпич} & \text{стекло} & \text{железо} & \text{шифер} & \text{доски} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Гараж} \\ \text{Сарай} \\ \text{Дачный домик} \end{array} & \begin{pmatrix} 90 & 2 & 7 & 31 & 3 \\ 10 & 1 & 0 & 20 & 43 \\ 22 & 44 & 3 & 53 & 125 \end{pmatrix} = M. \end{array}$$

Сколько единиц материалов каждого вида должен заказать бригадир на сооружение всех гаражей, сараев и дачных домиков?

35.16. Две пионервожатые для своих школ купили искусственные цветы трех видов: розы, пионы, гвоздики. Первая пионервожатая купила 30 наборов роз, 45 наборов пионов и 35 наборов гвоздик. Вторая — 40 наборов роз, 50 наборов пионов, 25 наборов гвоздик. В каждом наборе было два цветка. Один цветок был изготовлен из бумаги, покрытой воском, другой — из материи. Бумажный цветок стоил: роза — 70 к., пион — 60 к., гвоздика — 40 к. Матерчатый стоил: роза — 1 руб. 20 к., пион — 1 руб., гвоздика — 65 к.

Представьте эти данные компактно в виде матриц. Выполнив арифметические операции над матрицами, узнайте, сколько денег уплатила каждая пионервожатая за бумажные цветы и сколько за матерчатые.

35.17. *Спиновыми матрицами Паули* называются следующие матрицы второго порядка:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Введем еще такие матрицы (отличающиеся от σ_1, σ_2, σ_3 только постоянным множителем):

$$I=-i\sigma_1,\ J=-i\sigma_2,\ K=-i\sigma_3.$$

Пусть E — единичная матрица второго порядка. Докажите, что четыре матрицы E, I, J, K ведут себя как единицы алгебры кватернионов: $I^2=J^2=K^2=-E$, $IJ=K$, $KI=J$, $JK=I$. Покажите, что любую матрицу второго порядка с комплексными элементами можно представить в виде «кватерниона с комплексными компонентами»:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(a+d)E+\frac{1}{2}(b+c)\sigma_1+$$
$$+\frac{1}{2}i(b-c)\sigma_2+\frac{1}{2}(a-d)\sigma_3.$$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

§ 2

2.1. 7) i; 1; -1; 8) $2i$; $-2i$; 9) $-43+81i$; 10) 25; 11) 0; 12) $2+11i$; 13) 0; 14) 0; 15) 1. **2.2.** -1. **2.5.** Да, например, $1+(2i)^2=-3$. **2.6.** Нет, например, $1^2+i^2=0$.

§ 3

3.1. $\sqrt{2}-3i$; $2+i$; $-i-3$; $-i$. **3.2.** $2\sin\frac{\alpha}{2}$. **3.3.** 1) i; 2) $\frac{110}{53}+i\frac{34}{53}$; 3) $-\sqrt{3}$; 4) $-1-15i$; 5) 0; 6) $-\frac{1}{2}-i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+32\right)$. **3.4.** $x=\pm1$, $y=0$. **3.5.** $x=6$, $y=-1$ или $x=-1$, $y=6$. **3.6.** $x=-2$. **3.7.** 1) $(a+bi)(a-bi)$; 2) $(3x+4iy)(3x-4iy)$; 3) $(x+3+i)(x+3-i)$. **3.8.** $-1\pm\sqrt{3}$; $1\pm i$. **3.9.** Нет. **3.10.** Да, например, если $z_1=3$, $z_2=-5$. **3.12.** $z=0$, $z=i$, $z=-i$.

§ 4

4.1. 0; $2+3i$; $2+i$; $-4+4i$. **4.3.** $z_1=3-2i$; $z_2=-3+2i$; $z_3=-3-2i$; $z_4=2+3i$; $z_5=-2-3i$. **4.4.** $z_1=\bar{z}$; $z_2=-\bar{z}$; $z_3=-z$; $z_4=i\bar{z}$; $z_5=-i\bar{z}$. **4.5.** $5+5i$; $5-5i$; $-5+5i$; $-5-5i$. **4.6.** $3+i$; 3; $-2i$; $-1-3i$. **4.8.** $-2\sqrt{3}+4i$; i. **4.10.** Не более чем через 6 отражений получится точка, совпадающая с точкой C. Выразите последовательно комплексные координаты c_1, c_2, ... через комплексные координаты c, a_1, a_2, a_3. **4.11.** Да, будут. Учтите равенства $\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{A_4A_3}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{B_4B_3}$, выразив координаты точек C_1, C_2, C_3, C_4, через координаты вершин данных параллелограммов. Докажите, что $\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{C_4C_3}$. **4.12.** $a+b-c$. Воспользуйтесь примером 3. **4.13.** Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 — координаты последовательных вершин. Тогда $\overrightarrow{Z_1Z_4}=\overrightarrow{Z_2Z_3}$ и, значит, $z_4-z_1=z_3-z_2$. **4.14.** Да. Пусть точки P_1, P_2, P_3, P_4 симметричны точке P относительно середин сторон четырехугольника. Достаточно доказать, что $p_2-p_1=p_3-p_4$. **4.15.** 1) Нет; 2) например, $a=-1$, $b=1$, $c=i\sqrt{3}$ (равносторонний треугольник).

§ 5

5.1. i; $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, 5. **5.2.** $\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$; $\cos(\pi+2k\pi)+i\sin(\pi+2k\pi)$; $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$; $\cos\left(\frac{2}{3}\pi+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi+2k\pi\right)$; $\cos\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$ (k — любое целое число). **5.3.** 1) $\sin\frac{23}{24}\pi$, $\frac{\pi}{2}$; 2) 5, $-\frac{\pi}{10}$; 3) 1, $\frac{3\pi}{10}$; 4) 5, $\frac{9\pi}{10}$; 5) 5, $\frac{\pi}{10}$; 6) 5, $\frac{6\pi}{10}$. **5.4.** $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}+2k\pi\right)\right)$ (k — целое число). Полагая $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$, имеем $1+\sin\alpha+i\cos\alpha=1+\cos\varphi+i\sin\varphi=$ $=2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$. Это и есть ответ, так как по условию задачи $\cos\frac{\varphi}{2}>0$. **5.5.** Нет, неверно. Равенство справедливо, если действительная часть числа z положительна. **5.6.** 1, -1, i, $-i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, бесконечно много, а именно: все числа вида $\cos\alpha+i\sin\alpha$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi)$.

§ 6

6.1. Да; например, $|3i+(-i)|=|3i|-|-i|$. **6.2.** Да. **6.3.** $\left|\frac{a+b-2c}{2}\right|$, $\left|\frac{b+c-2a}{2}\right|$, $\left|\frac{a+c-2b}{2}\right|$. **6.4.** Приняв центр окружности за нулевую точку комплексной плоскости и выбрав произвольный диаметр A_1A_2, покажите, что MA_1^2+ $+MA_2^2=(m-a_1)(\bar{m}-\bar{a}_1)+(m-a_2)(\bar{m}-\bar{a}_2)=2(|m|^2+R^2)$, где R — радиус окружности, $a_2=-a_1$, $|a_1|=R$. **6.5.** Примите общий центр окружности и квадрата за нулевую точку комплексной плоскости и вычислите данное выражение (см. указание к задаче 6.4.), учитывая, что $c=-a$, $b=ai$, $d=-ai$. **6.6**. Выберите в качестве нулевой точки середину отрезка AB. Тогда $b=-a$, $f=\frac{1}{3}c$. Вычислите затем отдельно левую и правую части доказываемого равенства.

§ 7

7.1. Да; знаменатель $q=\cos 10°+i\sin 10°$. **7.2**. Да. Учтите, что $\sin\varphi-i\cos\varphi=-i(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. **7.3**. i. **7.4**. $\cos 20°+$ $+i\sin 20°$.

§ 8

8.1. $\frac{23}{27}$. Воспользуйтесь формулой Муавра при $n=3$. **8.2**. $A=\frac{\cos 20\alpha\cdot\cos 21\alpha}{\cos\alpha}$. $A=\operatorname{Re} S$, где $S=1-\exp(i2\alpha)+$ $+\exp(i4\alpha)-\ldots+\exp(i40\alpha)$. **8.3**. $A=\frac{\cos n\alpha\cdot\cos\frac{2n-1}{2}\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, $B=\frac{\sin n\alpha\cdot\cos\frac{2n-1}{2}\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Составьте сумму $A+Bi$ и воспользуйтесь формулой Муавра и формулой для суммы геометрической прогрессии. **8.4**. Да, справедливо. Положите $\alpha=\frac{\pi}{19}$ и наряду с суммой $A=\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\ldots+\cos 17\alpha$ рассмотрите сумму. $B=\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\ldots+\sin 17\alpha$, а также $A+Bi$. Воспользуйтесь формулой для суммы геометрической прогрессии. **8.5**. Рассмотрите аналогичную сумму косинусов.

§ 9

9.1. 1) e^{i0}; 2) $e^{-i\frac{\pi}{2}}$; 3) $\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$; 4) $e^{i\frac{\pi}{3}}$; 5) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$. **9.3**. 1) i; 2) -1; 3) 0. **9.4**. $p=|a+i|^2|b+i|^2|c+i|^2=|(a+i)(b+i)(c+i)|^2$.

§ 10

10.1. $z_3=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. **10.2**. Пусть z и w — комплексные координаты векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Вычислите отношение $\frac{w}{z}$ и запишите его в показательной форме. **10.3.** Решается аналогично примеру 5. **10.4.** Выразите комплексные координаты вершин B_1, B_2, B_3, B_4 через комплексные координаты вершин A_1, A_2, A_3, A_4. **10.5.** Пусть параллелограмм расположен на комплексной плоскости. Убедитесь, что $a_2-z_1=i(z_1-a_1)$. Отсюда выразите z_1. Аналогично вычислите z_2, z_3, z_4. Затем покажите, что $z_3-z_2=i(z_2-z_1)$, $z_3-z_2=$ $=z_4-z_1$. **10.6.** Пусть $ABCD$ лежит на комплексной плоскости. Выразите комплексные координаты a_1, b_1, c_1, d_1, p, q, r, s через комплексные координаты a, b, c, d. Вычислите отношение $(s-q):(r-p)$. **10.7.** Выберите декартову систему координат так, чтобы точка O была началом координат, а точки A и B имели комплексные координаты $a=1$, $b=i$. Тогда $c=-1$, $d=-i$. Вычислите комплексные координаты точек M и K, отношение $(k-m):(m-1)$. **10.8.** Выберите комплексную плоскость с началом координат в точке B. Выразите комплексные координаты p, q, m через a и c. Вычислите отношение $(q-m):(p-m)$. **10.9.** Выберите комплексную плоскость с началом координат в точке A. Выразите комплексные координаты p и q через координаты b и c. Вычислите отношение $(p-b):(c-q)$. **10.10.** Расположите параллелограмм $ABCD$ на комплексной плоскости так, чтобы вершина A была началом координат. На сторонах AB и AD постройте правильные треугольники ABP и ADQ. Выразите комплексные координаты p и q через b и d. Вычислите отношение $(p-c)/$ $/(q-c)$. **10.11.** Можем считать, что шестиугольник расположен на комплексной плоскости, причем его центр симметрии служит началом координат, а вершины A, B, C, D, E, F следуют в указанном порядке при обходе шестиугольника по часовой стрелке. Через комплексные координаты вершин A, B, C выразите комплексные координаты точек D, E, F, P, Q, R (например, $p=a+(b-a)\lambda$, где $\lambda=\exp(i\pi/3)$), а также координаты векторов $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{PR}$. Покажите, что одна из них получится из другой умножением на λ. Воспользуйтесь тем, что $\lambda^3+1=0$ и, следовательно, $\lambda^2-\lambda+1=0$. **10.12.** Пусть данный четырехугольник расположен на комплексной плоскости. Можно считать, что вершины A_1, A_2, A_3, A_4 следуют в указанном порядке при обходе четырехугольника по часовой стрелке. Через комплексные координаты этих вершин выразите последовательно комплексные координаты точек B_1, B_2, B_3, B_4 (например, $b_1=a_1+\lambda(a_2-a_1)$, где $\lambda=\exp(i\pi/3)$); точек

M, N, P, Q; векторов $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{QN}$, $\overrightarrow{MQ}$. Убедитесь, что $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{QN}$ и, следовательно, $MPNQ$ — параллелограмм (быть может, вырождающийся в точку, если $A_1A_2A_3A_4$ — параллелограмм). Составив соотношение комплексных координат векторов $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MQ}$, убедитесь, что $MPNQ$ — ромб с острым углом в 60°. В ходе выкладок учтите, что $\lambda^3+1=0$ и, следовательно, $\lambda^2-\lambda+1=0$.

§ 11

11.1. Пусть Z_1, ..., Z_5 — вершины пятиугольника, B_1, ..., B_5 — середины его последовательных сторон (начиная с Z_1Z_2). Покажите, что $z_1+z_2=2b$. Получите еще четыре аналогичных равенства. Решая полученную систему пяти линейных уравнений (относительно z_1, .., z_5), вычислите z_1. Для этого удобно предварительно сложить все эти пять уравнений почленно. По полученной формуле для координаты точки Z_1, постройте саму эту точку. **11.2.** Покажите, что $a+2b=3p$. Получите еще два аналогичных уравнения. Из полученной системы найдите a. Для этой цели предварительно сложите три уравнения почленно. Покажите, что $\overrightarrow{RA}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QR})$.

§ 12

12.1. $3R^2-\frac{4}{9}(m_a^2+m_b^2+m_c^2)$. **12.2.** $PA^2+PB^2+PC^2=6R^2$. Центр окружности O служит центром масс трех материальных точек $1A$, $1B$, $1C$. По теореме Лагранжа $J_P=J_0+3R^2$. **12.3.** $l_c^2=ab\left(1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right)$. Пусть C_1 — основание биссектрисы CC_1. Тогда $AC_1:C_1B=b:a$, то есть C_1 — центр масс двух материальных точек aA и bB. По теореме Лагранжа $J_C-J_{C_1}=$ $=(a+b)CC_1^2$. **12.4.** Рассмотрите систему трех точек: $1A$, $1B$, $1C$. По теореме Лагранжа $J_M=J_F+3MF^2$.

§ 14

14.1. $2(z-\bar{z})-iz\bar{z}-i(z+\bar{z})=0$.

§ 15

15.1. $S=-\frac{i}{4}\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$. $h=a+b+c$, $\qquad k=$

$=\dfrac{a|b-c|+b|c-a|+c|a-b|}{|b-c|+|c-a|+|a-b|}$, $m=\dfrac{1}{3}(a+b+c)$. Воспользуйтесь формулой для площади: $S=AB\cdot BC\cdot CA/(4R)$ и формулой (4). M — центр масс двух материальных точек: $1A$ и $2A_1$ (где A_1 — середина стороны BC). Поэтому (см. § 12) $3m=a+2a_1=a+b+c$. **15.2.** Выберите систему координат так, чтобы описанная окружность оказалась единичной окружностью, а вершина C имела координату 1. Обозначим координаты точек A и B через $e^{i2\alpha}$ и $e^{i(2\alpha+2\beta)}$. Вычислите затем координаты точек C_1, A_1 и B_1. Задача сводится к проверке условия перпендикулярности хорд C_1C и A_1B_1 (см. § 15, пример 3). **15.3.** $\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$. Примите данную окружность за единичную; выберите оси координат так, чтобы точки A и B имели координаты 1 и i. Тогда $a_1=2$. Пусть $b_1=\lambda i$. Так как точка M лежит на прямой, проходящей через точки i и 2, то (см. формулу (3′) в § 13): $(2+i)m-(2-i)\bar{m}=4i$. А так как точка M лежит на прямой B_1A, то $(1+\lambda i)m-(1-\lambda i)\bar{m}=2\lambda i$. Учитывая, что точка M лежит на единичной окружности, имеем: $m\cdot\bar{m}=1$. Из полученной системы уравнений исключаем m и решаем уравнение относительно λ. **15.4.** Да, верно. Выразите координаты c_1, c_2, c_3 через z_1, z_2, z_3, z, пользуясь решением примера 4 из § 15. Чтобы выяснить, лежат ли точки C_1, C_2, C_3 на одной прямой, выясните, является ли отношение $\dfrac{c_2-c_1}{c_3-c_1}$ действительным числом. Для этои цели выразите это отношение через z_1, z_2, z_3, z и воспользуйтесь тем, что эти четыре точки на одной окружности (см. (7) в § 14).

§ 17

17.1. 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$; i; $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$; 2) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$; $-1+i$; $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{17}{12}\pi+i\sin\dfrac{17}{12}\pi\right)$; 3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}\right)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **17.3.** Оба числа являются значениями произведения $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$.

§ 18

18.1. Выберите осью Ox прямую OA_0, где $A_0=A_{15}$. Можно принять $OA_0=1$. Пусть z — координата точки A_1. Так как $|A_1A_7|=|A_0A_6|$ и векторы A_0A_6 и A_1A_5 сонаправлены, то $|A_1A_7|-|A_1A_5|=|A_0A_6|-|A_1A_5|=|\overrightarrow{A_0A_6}-\overrightarrow{A_1A_5}|=|(z^6-1)-(z^5-z)|=|z-1||z^5+1|$. Далее учтите, что $z^{15}-1=0$ (15-угольник правильный) и поэтому $z^{10}+z^5+1=0$, $|z^5+1|=|-z^{10}|=1$. **18.2.** Пусть $Z_0Z_1...Z_4$ — вписанный правильный пятиугольник, $z_0=1$, z_1 — координата точки Z_1. Воспользуйтесь тем, что комплексная координата точки M_1 выражается через координаты точек Z_0, Z_1 и M по формуле $2m_1=z_0+z_1+m-z_0z_1\bar{m}$. Записав аналогичную формулу для n_1, покажите, что координата v_1 вектора M_1N_1 определяется формулой: $2v_1=(n-m)-z_0z_1(n^{-1}-m^{-1})$. Запишите аналогичные равенства для координат v_2, v_3, v_4, v_5 остальных рассматриваемых пяти векторов и сложите их почленно. При этом учтите, что $z^5=1$, $z^4+z^3+z^2+z+1=0$. Покажите, что $2(v_1+v_2+...+v_5)=5(n-m)$.

§ 19

19.1. $\pm10+11i$, $\pm11\pm10i$, $\pm5\pm14i$, $\pm14+5i$. Окружность имеет уравнение: $|z|^2=221$ $(z=x+yi)$. Но $221=17\cdot13=(4^2+1^2)(3^2+2^2)=|(4+i)(3+2i)|^2=|10+11i|^2$, то есть $x^2+y^2=10^2+11^2$. Отсюда видно, что на рассматриваемой окружности лежит точка $z=10+11i$, а также точки $\pm10\pm11i$ (4 точки). Но 221 можно и другими способами представить в виде квадрата модуля комплексного числа. Например, $221=|(4-i)(3+2i)|^2$. Это позволит найти на окружности еще 12 целочисленных узлов. **19.2.** 1) Да. 2) Не обязательно. Контрпример: $8-i$ и $2-i$. Если $h=\lambda g$ (где λ — гауссово число), то $N(h)=|\lambda|^2N(g)$, отсюда видно, что $N(h)$ делится на $N(g)$. Обратно, пусть $N(h)=kN(g)$; пусть c — какой-либо простой делитель числа g, то есть $g=d\cdot c$, где d — тоже гауссово число. Тогда имеем, очевидно: $h\cdot\bar{h}=k\cdot|d|^2\cdot c\cdot\bar{c}$. Отсюда следует, что либо h, либо $\bar{h}$ делится на c, однако может случиться, что h на c не делится (на c делится $\bar{h}$). Но если h не делится на делитель c числа g, то h подавно не делится на g. **19.3.** Да. Допустите противное: g — составное, $g=c\cdot d$. Выведите отсюда, что число $N(g)$ должно оказаться составным. **19.4.** $2+i$ и $3-2i$ — простые числа, $8-i=(2+i)(3-2i)$ — составное. Так как $|8-i|^2=65=(2-i)(2+i)(3-2i)(3+2i)$, то делители числа $8-i$ следует искать среди чисел $2-i$, $2+i$, $3-2i$, $3+2i$. **19.5.** 1) Допустите, что 7 — составное число в кольце гауссовых чисел, то есть $7=c\cdot d$, где $c=a+bi$, $d=p+qi$ (a, b, p, q — целые числа), причем $|c|\neq1$, $|d|\neq1$. Тогда $|7^2|=$

$=|c|^2\cdot|d|^2$, $7^2=(a^2+b^2)(p^2+q^2)$. Числа a и b не могут оказаться оба одной и той же четности, ибо тогда a^2+b^2 — четное число, что невозможно, так как 7^2 — нечетно. Если же a и b — разной четности (одно четно, другое нечетно), то натуральное число a^2+b^2 имеет вид $4k+1$ (где k — натуральное число). Из равенства $7^2=(a^2+b^2)(p^2+q^2)$ и соотношений $a^2+b^2>1$, $p^2+q^2>1$ следует, что $7=a^2+b^2$ (так как число 49 единственным образом представимо в виде произведения двух натуральных множителей, отличных от 1). Но тогда 7 имеет вид $4k+1$, что, очевидно, неверно. Итак, допущение неверно, и число 7 — простое и в кольце комплексных чисел. 2) Рассуждение такое же, как для числа 7. **19.6.** Неверно. Например, $N(7)=49$ (составное число), а 7 — простое гауссово число. Гаусс доказал: если число $N(g)$ — составное, а число g является смешанным гауссовым числом (оно не действительное и не чисто мнимое), то g — составное гауссово число. **19.8.** 1) Верно. Для доказательства воспользуйтесь тем, что n_1 и n_2 можно представить в виде: $n_1=|a_1+b_1i|^2$, $n_2=|a_2+b_2i|^2$, где a_1, b_1, a_2, b_2 — целые числа (причем такое представление — не единственное). 2, 3) Верно. 4) Верно. Обратимся к общему случаю. Воспользуйтесь возможностью представить x^2+pxy+ $+qy^2$ в виде $(x+\alpha y)(x+\beta y)$, где α и β — комплексные. Затем покажите: если $n_1=x_1^2+px_1y_1+qy_1^2$ и $n_2=x_2^2+px_2y_2+$ $+qy_2^2$, то $n_1\cdot n_2=x^2+pxy+qy^2$, где $x=x_1x_2-qy_1y_2$, $y=$ $=x_1y_2+x_2y_1+py_1y_2$. **19.9.** Нет. **19.10.** Нет. **19.11.** Да.

§ 21

21.1. $I_m=6e^{i\frac{\pi}{6}}=3\sqrt{3}+3i$. **21.2.** $15\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{9}\right)$. **21.3.** $\approx 40{,}5$ Ом. **21.4.** ≈ 51 Ом. **21.5.** $Z=1{,}79+0{,}57i$; $|Z|\approx 1{,}88$ Ом. **21.6.** $Z=55e^{-i\frac{7\pi}{20}}\approx 25-49i$; $I=4\sin\left(314t+\frac{7\pi}{20}\right)$.

§ 24

24.1. 1) Окружность с центром в начале координат и радиусом R; 2) окружность с центром в точке i и радиусом 1; 3) окружность с центром в точке -1 и радиусом 1. **24.2.** Серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки *1* и *3*. **24.3.** Точка $z=0$. **24.4.** 1) Замкнутый единичный круг; 2) «внешность» единичного круга; 3) «внешность» круга с центром в точке i и радиусом 2; 4) полуплоскость; 5) кольцо между двумя окружностями с центром в точке $1+i$ и радиусами $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sqrt{2}$. **24.5.** Четверть кольца, ограниченного окружностями с центром в начале координат и радиусами 1 и $\sqrt{2}$. **24.6.** Все точки прямой $x=-\frac{1}{2}$, для которых $|y|>\frac{\sqrt{3}}{2}$ (получаются два луча). Полагая, что $z=x+iy$, решите систему $\operatorname{Re} w<0$, $\operatorname{Im} w=0$.

§ 25

25.1. $1-i$; -1; $-\sqrt{3}-2i$. **25.2.** В круг $|w+1|\leqslant\frac{1}{2}$; в круг $|w-(1-i)|\leqslant\frac{1}{2}$. **25.3.** $w=(2-i)z-2+2i$. Так как $w=az+b$, то достаточно найти a и b из системы уравнений $\begin{cases} i=a\cdot 1+b, \\ 2=a\cdot 2+b. \end{cases}$ **25.4.** $w-z$. **25.5.** В отрезок, соединяющий точки $-i$ и 1. **25.6.** В треугольник с вершинами в точках 0, $\sqrt{2}$, $i\sqrt{2}$. **25.7.** Да, $z=\frac{50(1-10i)}{101}$. Сначала составьте линеиную функцию $w=az+b$, соответствующую описанным в задаче преобразованиям и затем решите уравнение $z=az+b$. **25.8.** $\triangle ABC$ правильный, если он подобен $\triangle BCA$ (здесь вершинам A, B, C ставим в соответствие вершины B, C, A). Далее воспользуйтесь задачей 25.7. **25.9.** Да. Составьте и вычислите определитель $\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix}$ (см. упражнение 25.8), убедитесь, что он равен 0. **25.10.** Пусть $ABCD$ (рис. 83) — прямоугольник, изображающий большую (настенную) карту (вершины A, B, C, D следуют, ради определенности, против движения часовой стрелки); пусть $A'B'C'D'$ — маленькая карта. Маленькая карта может быть получена из большой с помощью некоторого преобразования подобия, сохраняющего ориентацию. Выберем в плоскости большой карты систему координат, например, такую, в которой осями координат служат прямые AB и AD. Пусть какой-либо пункт земной поверхности изображается на карте $ABCD$ в виде точки с комплексной координатой z. На карте $A'B'C'D'$ тот же пункт будет иметь (в той же системе координат) комплексную координату w; мы знаем, что имеет место зависимость вида $w=pz+q$, где p и q — какие-то комплексные константы, причем $|p|=0{,}1$. Нас интересует такая точка z, для которой $w=z$ (неподвижная точка). Но ее легко найти из уравнения $z=pz+q$. Получаем: $z=$ $=q/(1-p)$. Итак, интересующая нас точка действительно существует, и притом только одна. Чтобы ее на самом деле найти, надо знать числа p и q. Это тоже несложно сделать. Пусть при выбранном нами расположении маленькой карты на большой карте — вершины A' и B' маленькой карты имеют комплексные координаты a' и b'. Тогда имеем: $\dfrac{w-a'}{b'-a'}=\dfrac{z-a}{b-a}$, $w=\dfrac{b'-a'}{b-a}z+\dfrac{a'b-b'a}{b-a}$, откуда ясно, чему равны в нашем случае p и q. Таким образом, положение искомой точки определяется однозначно из полученных здесь формул.

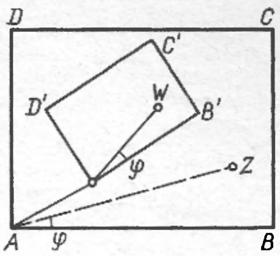


Рис. 83

§ 26

26.1. 0; 1; -1; 4. **26.2.** В положительный луч действительной оси. **26.3.** В окружность $|w|=4$. **26.4.** В прямую, параллельную действительной оси и проходящую через точку $w=-8i$; в прямую, параллельную мнимой оси и проходящую через точку $w=1$. **26.5.** 1) В луч, наклоненный под углом 2α к действительной оси; 2) в верхнюю полуплоскость.

§ 27

27.1. 1, $-i$, $\dfrac{1+i}{2}$. **27.2.** В единичную окружность. Пусть $z=a$ — точка действительной оси, тогда $|w|=\dfrac{|a-i|}{|a+i|}=1$. **27.3.** В фигуру, являющуюся объединением положительного луча мнимой оси и отрицательного луча действительной оси (иначе: в границу второго квадранта).

§ 28

28.1. 1) Симметрия относительно действительной оси; 2) симметрия относительно мнимой оси; 3) подобие с изменением ориентации. **28.2.** Первый квадрант преобразуется в положительный луч мнимой оси, вся плоскость — в мнимую ось. **28.3.** В отрезок [0; 1] действительной оси. **28.4.** 1—2) плоскость «сплющивается» в действительную ось; 3) плоскость деформируется в верхнюю полуплоскость. **28.5.** В единичную окружность. **28.6.** В отрезок [1; 5] действительной оси. **28.7.** В единичную окружность.

§ 32

32.3. $Y=\frac{qQ}{|q|^2}$. **32.4.** $X=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}k$: $Y=\frac{1}{2}+$ $+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$. **32.6.** $-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j$.

§ 35

35.2. $\begin{cases} 3x+z=3, \\ 5y+z=0, \\ 2x+2y=-1. \end{cases}$ **35.3.** Нет.

35.4. $C_1=C_2=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 7 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $C_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$C_4=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **35.6.** $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}$.

35.9. $U_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **35.10.** Да. Рассмотрите, например, матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Приведите другие примеры.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балк М. Б., Виленкин Н. Я., Петров В. А. Математический анализ. Теория аналитических функций.— М.: Просвещение, 1985.— 160 с.

2. Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках.— М.: Наука, 1985.— 191 с.

3. Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. Джироламо Кардано.— М.: Знание, 1980.— 192 с.

4. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа.— М.: Наука, 1973.— 144 с.

5. Кострикин А. И. Введение в алгебру.— М.: Наука, 1977.— 495 с.

6. Маркушевич А. И. Комплексные числа и конформные отображения.— М.: Наука, 1979.— 56 с.

7. Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А. Введение в теорию аналитических функций.— М.: Просвещение, 1977.— 320 с.

8. Понтрягин Л. С. Обобщения чисел.— М.: Наука, 1986.— 117 с.

9. Яглом И. М. Комплексные числа и их применения в геометрии.— М.: Физматгиз, 1963.— 192 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Марк Беневич Балк,
Галина Давидовна Балк,
Александр Александрович Полухин

РЕАЛЬНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ МНИМЫХ ЧИСЕЛ

Заведующая редакцией математики *О. П. Бондаренко*
Редактор *В. Н. Кириченко*
Литературный редактор *Н. Н. Василенко*
Художественный редактор *В. А. Пузанкевич*
Технический редактор *М. С. Губарь*
Корректоры *Л. С. Командир, Т. А. Соколова*

ИБ № 6312

Сдано в набор 25.06.87. Подписано в печать 02.02.88. БФ 05523. Формат 70×100/32. Бумага офсетная № 2. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,4+0,16 форзац. Усл. кр.-отт. 10,56. Уч.-изд. л. 10,04+0,23 форзац. Тираж 23 000 экз. Изд. № 30631. Заказ № 7—231. Цена 55 к.

Издательство «Радянська школа»,
252053, Киев, Ю. Коцюбинского, 5

Отпечатано с текстовых диапозитивов Головного предприятия РПО «Поліграфкнига» на книжной фабрике «Жовтень». 252053, Киев-53, Артема, 25.