Содержание

1. Основные определения и теоремы. Непосредственное вычисление вероятностей.

1.1. Теория вероятностей, вероятностная модель эксперимента

Исходным для теории вероятностей является понятие случайного (стохастического) эксперимента (опыта, испытания) и его исхода – *события*.

Эксперимент, *исход* которого (*случайное событие*) невозможно предсказать, называют *случайным экспериментом* G (СЭ G).

Существенным здесь является выполнение определённого набора условий S, при которых проводится СЭ G. Любое их изменение позволяет говорить о другом *случайном эксперименте* (СЭ).

Из определения *случайного события* следует, что *нет закономерности* в наступлении или не наступлении *события* в отдельном опыте.

Например, при «одинаковом» бросании монеты исход любого опыта может быть либо герб, либо цифра. Это зависит от *случайных обстоятельств*, учесть которые в отдельном эксперименте *не возможно*.

При повторении эксперимента надо повторить и условия S. С его повторениями связаны массовые однородные случайныё события.

<u>*Предметом теории вероятностей*</u> (ТВ) является изучение закономерностей, присущих массовым однородным случайным событиям (МОСС).

Оказывается, что достаточно *большое число однородных* (при тех же условиях S) *случайных событий*, независимо от их конкретной природы, подчиняется определённым, а именно *вероятностным закономерностям*.

Например, при повторении опыта с бросанием монеты до $n_1 = 4040$ раз герб появился $2048 = n_{г1}$ раз, при $n_2 = 12000$ получили $n_{г2} = 6019$, а увеличение числа опытов до $n_3 = 24000$ дало $n_{г3} = 12012$. Замечена закономерность:

$$\nu_1 = \frac{n_{г1}}{n_1} = \frac{2048}{4040} = 0{,}5069,\ \nu_2 = \frac{n_{г2}}{n_2} = 0{,}5016,\ \nu_3 = \frac{n_{г3}}{n_3} = 0{,}5005, \ldots \to \lim_{k\to\infty} \nu_k = 0{,}5.$$

Основная задача ТВ состоит в предсказании результатов для МОСС.

<u>Теория вероятностей</u> является разделом математики с конца 19 века.

Возможные исходы $\omega_i, i = 1,2,\ldots,n,$ эксперимента G при фиксированном наборе условий S называются *элементарными исходами* (ЭИ), если они являются взаимно исключающими (наступление одного исключает появление другого), но в испытании G один из них обязательно происходит.

Множество Ω всех возможных ЭИ, ω_i при выполнении условий S полностью описывает СЭ G. Множество Ω принято называть *пространством элементарных исходов* (ПЭИ), $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Выбор ПЭИ для описания данного СЭ неоднозначен и зависит от решаемой задачи.

Пример 1. Случайный эксперимент состоит в бросании игральной кости и наблюдении числа выпавших очков. Описать ПЭИ.

Решение.

При бросании игральной кости может выпасть одна из шести написанных на гранях цифр, от 1 до 6. За элементарное событие ω_i примем количество очков i, выпавшее на верхней грани кости, то есть $\omega_i = i$, где $i = 1,2,3,4,5,6$. Тогда ПЭИ имеет вид: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Ответ: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Пример 2. Случайный эксперимент состоит в подбрасывании монеты до первого появления «герба». Описать ПЭИ.

Решение.

В данном эксперименте ограничением количества подбрасываний монеты является выпадение герба, значит, в качестве элементарных событий возьмём:

ω_1 - при 1-м подбрасывании выпал «герб» (обозначим – *г*);

ω_2 - 1-й раз выпала «решка», а 2-й – «герб» (обозначим – *рг*);

ω_3 - 1-й и 2-й раз выпали «решка», а 3-й – «герб» (обозначим – *ррг*)

…

ω_n - $(n-1)$ раз выпали «решка», а n-й раз - «герб» (обозначим – $\underbrace{pp\ldots p}_{n-1}г$) и т.д.

Очевидно, что $n = \overline{1,\infty}$, а ПЭИ состоит из бесконечного количества элементов:

Ответ: $\Omega = \{г, pг, ppг, ..., \underbrace{pp\ldots p}_{n-1}г, ...\}$.

Случайным событием A называется событие, которое может наступить, а может и не наступить в случайном (стохастическом) эксперименте.

Всякое событие есть некоторая комбинация, некоторый набор из ЭИ. Поэтому с ним естественно связать подмножество таких m ЭИ из ПЭИ, $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\} \subseteq \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, что наступление одного, любого, из этих m элементарных исходов подмножества A равносильно наступлению события A. Поэтому математически верно отождествить случайное событие A и подмножество исходов $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$, влекущих его появление. Случайные события будем обозначать большими латинскими буквами (с индексами или без индексов): A, B, C … или $A_1, A_2, A_3, \ldots$.

Пример 3. Подбрасывается игральная кость. Описать событие A – число выпавших очков делится на 3 и/или 2.

Решение:

Событие A – это $A=\{2,3,4,6\}$, ЭИ делятся на 2 и/или 3, и является собственным подмножеством пространства $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, то есть, $A\subset\Omega$.

Ответ: $A=\{2,3,4,6\}$

Событие называется *достоверным*, если при повторении опыта (испытания) G (при одинаковых условиях S) оно (событие) происходит всегда.

Ему соответствует пространство всех элементарных исходов Ω.

Событие называется *невозможным*, если в опыте (испытании) СЭ G оно никогда не происходит при повторении опыта при тех же условиях S .

Ему соответствует пустое подмножество, обозначают его $\varnothing$, $\varnothing\in\Omega$.

1.2 Элементы комбинаторики

В теории вероятностей часто приходится иметь дело с задачами, в которых необходимо подсчитывать число возможных способов совершения каких-либо действий. Задачи такого типа называются комбинатóрными, а раздел математики, занимающийся их решением, – комбинатóрикой.

Сформулируем два основных (универсальных) правила, применяемых при решении задач комбинаторики, лежащих в основе всех её формул.

1) *Правило произведения*. Пусть требуется выполнить *одно за другим* каких-либо m последовательных независимых действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие – n_2 способами и так до m-го действия, которое можно выполнить n_m способами, то все m независимых действий могут быть выполнены $n_1\cdot n_2\cdots n_m$ способами.

Здесь важно, что каждая из n_1 реализаций первого действия совместима с каждой из n_2 возможных реализаций второго действия и т. д.

2) *Правило суммы*. Пусть требуется выполнить *одно* из каких-либо m действий, *взаимно исключающих друг друга*. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие – n_2 способами и так до m-го действия, которое можно выполнить n_m различными способами, то выполнить *одно* из этих m действий можно $n_1+n_2+\ldots+n_m$ способами.

Здесь важно, что может быть выполнено только *одно* из m действий: либо 1-ое n_1 способами, либо 2-ое n_2 способами, либо 3-е … и т. д.

Факториалом натурального числа n называется число

$$n!=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1. \qquad (1.1)$$

По определению, факториалом нуля является единица:

$$0! = 1. \tag{1.2}$$

Рассмотрим некоторое множество S, состоящее из *n различных элементов* и число k, ограничив его значениями: $1 \le k \le n$. Назовём подмножество, состоящее из k элементов множества S, *упорядоченным*, если каждому элементу подмножества поставлено в соответствие его порядковый номер в подмножестве, от 1 до k.

Размещениями из n элементов по k называются упорядоченные подмножества множества S, состоящие из k различных упорядоченных его элементов и отличающиеся друг от друга составом элементов и/или порядком (их следования в подмножестве).

Число размещений из n элементов по k равно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1). \tag{1.3}$$

Формула (1.3) следует из 1-ого правила комбинаторики: на 1-ое место в подмножестве претендует любой из n элементов множества S, с ним совместим на втором месте любой элемент, отличный от 1-го, их ровно (n-1), и т. д., на k -ое место претендует любой из оставшихся n–k+1 элементов. По правилу произведений получаем формулу (1.3).

Пример 4. Сколько существует различных вариантов выбора 4-х кандидатур из 9-ти специалистов для поездки в 4-ре различные страны?

Решение:

$$A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{5!} = 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 3024.$$

Ответ: 3024 варианта.

Перестановками из n элементов называются размещения из n элементов по n, то есть *упорядоченные* подмножества из всех элементов множества S, отличающиеся только порядком элементов.

Число перестановок из n элементов равно

$$P_n = A_n^n = n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \tag{1.4}$$

Пример 5. Сколькими различными способами можно разместить на книжной полке 5 томов одного словаря?

Решение:

$$P_5 = 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120.$$

Ответ: 120-ю способами.

Сочетаниями из n элементов по k называются подмножества множества S, состоящие из k различных элементов и отличающиеся друг от друга только составом элементов. Порядок их следования *не существенный*.

Число сочетаний из n элементов по k равно

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = C_n^{n-k}. \qquad (1.5)$$

Деление на $P_k = k!$ связано с тем, что порядок элементов *не существенный*.

Пример 6. Из группы, включающей 12 студентов, профоргом выбирается 5 человек, которые поедут на экскурсию первыми. Сколько различных таких групп может быть образовано профоргом?

Решение.

$$C_{12}^5 = \frac{A_{12}^5}{P_5} = \frac{12!}{5!\cdot 7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{5!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 792.$$

Ответ: 792 группы.

Размещениями с повторениями из n элементов множества S *по* k элементов, *различимых порядком следования*, – называются упорядоченные наборы, состоящие из k элементов, среди которых могут оказаться одинаковые. Поэтому k может быть и больше n. Они отличаются друг от друга составом элементов и/или *порядком* их следования (расположения).

Элементы *в принципе различимы*, если их можно пронумеровать.

Число размещений с повторениями из n элементов по k равно

$$\tilde{A}_n^k = n^k. \qquad (1.6)$$

Следующий пример поясняет это определение.

Пример 7. Семь разноцветных шариков случайно рассыпаются по 4-м лункам. В лунку может поместиться любое число шариков. Сколько существует различных способов распределения 7-ми шариков по 4-м лункам?

Решение.

Здесь множество S - это 4-ре лунки, пусть пронумерованные. Каждый из 7-ми шариков, попадая случайно в любую из них, включает её номер в упорядоченный набор из 7-ми элементов. Попадание шарика в уже занятую лунку ведёт к повторению её номера в наборе из $k = 7$ номеров лунок. Шарики в одной лунке неотличимы по очерёдности попадания в неё. Если бы все шарики были не отличимыми, то не существенным был бы и порядок номеров занятых лунок. Но цвет (или номер) каждого различимого шарика фиксируют порядок номеров всех заполненных лунок в их наборах. Поэтому применима формула *размещений с повторениями* из 4-х по 7:

$\tilde{A}_4^7 = 4^7 = 16384$.

Ясно, что $\tilde{A}_4^7$ – это число слагаемых в $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^7$ из семи упорядоченных множителей x_i с повторением, $i = \overline{1,4}$, после раскрытия скобок.

Ответ: 16384 способа.

Что изменится в решении задачи, если k *неразличимых* шариков случайно рассыпать по n лункам? Сколько будет способов их заполнения?

Смоделируем решение задачи. Представим пронумерованную слева направо последовательность из n “ящичков”, разделённых ровно n–1 “границей”, и расположим над ними ряд из k неразличимых, *одинаковых*, шариков. Число шариков может быть как меньше, так и больше числа ящичков. Помещая границы в определённых местах между шариками, получим определённое размещение неразличимых шариков по ящичкам. Так, если все границы, n–1, разместить правее последнего шарика, то все шарики окажутся в первом ящичке. После смещения всех границ левее первого шарика все шарики будут в последнем ящичке. Итак, решение задачи даёт подсчёт всех различных положений границ. Пронумеруем места, занимаемые неразличимыми шариками и границами, от 1 до $(n–1)+k$. *Число различных наборов по* n–1 *номеров мест для границ ящичков из* $(n–1)+k$ пронумерованных мест равно числу всех возможных распределений k *шариков по* n *ящичкам*. Оно равно числу сочетаний из $(n–1)+k$ по n–1 (см. (1.5))

$$C_{n-1+k}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n-1+k}^{k}. \tag{1.7}$$

Число распределений k неразличимых шариков по n ящичкам равно числу разных наборов по k номеров ящичков из n с *повторением* (столько раз, сколько шариков в ящичке). Порядок номеров здесь *не существенный*.

Сочетаниями с повторениями из n *элементов множества* S (“номеров ящичков”) *по* k *элементов* называют наборы элементов, по k из S, среди которых могут оказаться одинаковые, отличающиеся друг от друга только составом элементов. Из-за повторения элементов возможно $k > n$.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по k равно (1.7)

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots n}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}. \tag{1.7'}$$

Пример 8. Сколько имеется костей в обычной игре "домино"?

Решение.

Кости домино можно рассматривать, как *сочетания с повторениями* из 7-ми элементов по 2, выбираемых из множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 2=k<n. Здесь стоит отметить, что две половинки кости домино неразличимы.

Число всех таких сочетаний равно

$$\tilde{C}_7^2 = C_{7+2-1}^2 = C_{7+2-1}^{7-1} = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = 28.$$

Ответ: 28 штук.

Замечание 1.1. Отметим, что формулы (1.1) – (1.7) сохраняют смысл, то есть остаются справедливыми, и при $k = 0$.

Если в «множестве S_n из n элементов *с повторениями*» различны только m, обозначим их S_m, $m < n$, то *перестановками с повторениями из* n *элементов* называются различные упорядоченные n-мерные множества $S_n^{(i)}$ из элементов множества S_m. При этом в каждое множество $S_n^{(i)}$ первый элемент множества S_m входит n_1 раз, второй элемент – n_2 раз и так до m-го элемента S_m, который входит в $S_n^{(i)}$ n_m раз, $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$.

Число *перестановок с повторениями* из n элементов, в которые первый из различный элементов входит n_1 раз, второй элемент – n_2 раз и так до m-го элемента, входящего n_m раз, где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$, равняется

$$\tilde{P}_n(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}. \tag{1.8}$$

Знаменатель в (1.8) исключает из $P_n = n!$ все повторения, $n_1!\cdot n_2!\cdots n_m!$ раз, неразличимых подмножеств с перестановками одинаковых элементов.

Пример 9. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова "математика"?

Решение.

Искомые слова представляют собой перестановки с повторением из n = 10 букв слова "математика". Для множества $S_m = S_6 = \{а, е, и, к, м, т\}$ различных элементов-букв имеем частоты их повторений в $S_n = S_{10}$, т.е. в слове "математика", $k(а) = 3$, $k(е) = k(и) = k(к) = 1$, $k(м) = k(т) = 2$.

Следовательно, число различных слов, получаемых перестановками букв слова "математика", множества S_{10} *с повторениями*, равно

$$\tilde{P}_{10}(3,1,1,1,2,2) = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 151200.$$

Ответ: 151200 слов.

Формулу (1.8) можно также интерпретировать, как число *сочетаний из* n различимых *элементов множества* S *по* m упорядоченным *совокупно-*

стям из n_1, n_2, ..., n_m *элементов*, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$, различающихся только набором элементов в каждой из этих совокупностей.

При подсчёте числа таких сочетаний необходимо число перестановок $P_n = A_n^n = n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ из n элементов множества S разделить на число $n_1! \cdot n_2! \cdots n_m!$ повторений одинаковых сочетаний по m совокупностям, порядок элементов в которых не существенный. Результат совпадает с (1.8).

1.3. Алгебра событий. Операции над событиями.

Говорят, что в СЭ *G событие A влечёт появление события B*, если из осуществления события *A* следует наступление и события *B*, т. е. событие *A* влечёт наступление события *B*. Обозначают это: $A \subseteq B$.

События *A* и *B* называются *равными* *A* = *B*, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Объединением событий A и B называется событие $A \cup B$, состоящее в том, что в СЭ *G* произойдёт хотя бы одно из этих событий, *A* и/или *B*.

Пересечением событий A и B называется событие $A \cap B$, состоящее в одновременном появлении этих событий, то есть происходят и *A*, и *B*.

Дополнением события B до события A (*или разностью событий A и B*) называется событие $A \setminus B$, которое наступает всегда, когда наступает событие *A*, и при этом не наступает событие *B*.

Достоверное событие $U = \Omega$ происходит в каждом СЭ.

Противоположным событию A называется событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ (читается “не *A*”), которое наступает всегда, когда событие *A* не наступает.

Невозможное событие $V = \varnothing$ не происходит ни в одном опыте (СЭ).

События A и B называются несовместными, если $A \cap B = \varnothing$. В случайных опытах такие события *A* и *B* не могут наступить одновременно.

Говорят, что события $H_1, H_2, \cdots, H_n$ образуют *полную группу*, если они попарно несовместны ($H_i \cap H_J = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i, j = 1,2,\ldots,n$), и их “объединение” ($H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n = \Omega$) эквивалентно достоверному событию, то есть одно из них обязательно наступит, $H_i \neq \varnothing, i = 1,2,\ldots,n$.

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу. То есть *это два несовместных события, одно из которых обязательно наступит*. Если одно из противоположных событий обозначено *A*, то второе принято обозначать $\overline{A}$, и говорят “не *A*”.

Элементарное событие ω_i, связанное с испытанием G, невозможно представить как объединение или пересечение более простых событий.

Для наглядного представления событий, операций над ними и отношений между ними используются *диаграммы Венна – Эйлера* (рис. 1.1).

На этих диаграммах достоверное событие Ω изображается в виде некоторой области на плоскости, а отдельные элементарные исходы (ЭИ) ω_i – точками внутри этой области Ω. При этом любому случайному событию A соответствует некоторая геометрическая фигура, которая включает ЭИ, влекущие наступление A. Она расположена внутри области всех возможных ЭИ, то есть внутри Ω (рис. 1.1а). Тогда верно следующее.

Достоверное событие – это все ЭИ, то есть вся область Ω.

Объединение $A \cup B$ событий A и B состоит из ЭИ, принадлежащих одному из событий A и/или B (рис. 1.1б).

Пересечение $A \cap B$ событий A и B состоит из ЭИ, принадлежащих одновременно обоим событиям A и B (рис. 1.1в).

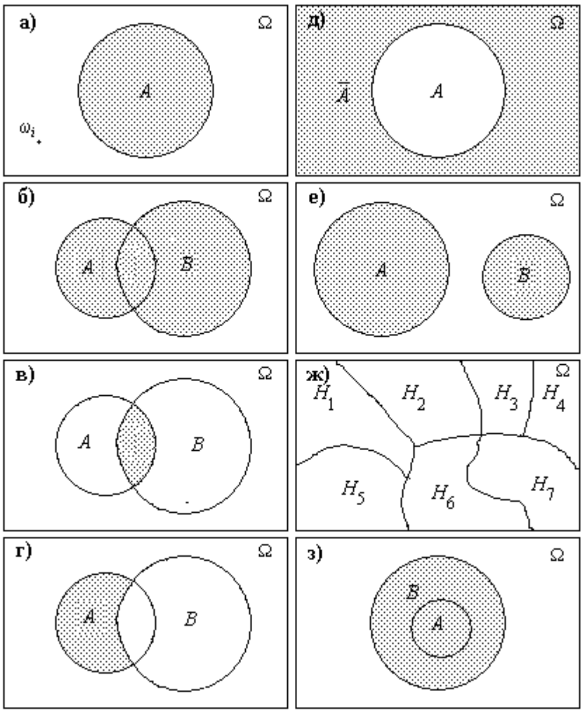


Рис. 1.1. Диаграммы Венна – Эйлера

Дополнение $A \setminus B$ события B до события A состоит из ЭИ, принадлежащих событию A и при этом не принадлежащих событию B (рис. 1.1г).

Событие $\overline{A}$, противоположное событию A, состоит из всех тех ЭИ, которые не принадлежат событию A (рис. 1.1д).

У несовместных событий нет общих ЭИ (рис.1.1е).

Полная группа событий представлена на рис. 1.1ж.

Событие A влечёт событие B, $A \subseteq B$, на рис. 1.1з.

Невозможное событие $V = \varnothing$ – это пустое подмножество области Ω, содержащей все возможные ЭИ испытания (СЭ), $\varnothing \in \Omega$.

Для событий A, B, C, …, как и для множеств ЭИ, способствующих их наступлению, применимы тождества, установленные в теории множеств.

Операции над событиями обладают следующими свойствами:

1) *коммутативность* объединения событий:

$$A \cup B = B \cup A, \tag{1.9}$$

2) *ассоциативность* объединения событий:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \tag{1.10}$$

3) *идемпотентность* объединения равных событий:

$$A \cup A = A, \tag{1.11}$$

4) свойство *противоположных* событий:

$$A \cup \overline{A} = \Omega, \tag{1.12}$$

5) свойство объединения с *невозможным* событием:

$$A \cup \varnothing = A, \tag{1.13}$$

6) свойство объединения с *достоверным* событием:

$$A \cup \Omega = \Omega, \tag{1.14}$$

7) *коммутативность* пересечения событий:

$$A \cap B = B \cap A, \tag{1.15}$$

8) *ассоциативность* пересечения событий:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \tag{1.16}$$

9а) *дистрибутивность* объединения:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), \tag{1.17}$$

9б) *дистрибутивность* пересечения:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \tag{1.18}$$

10) *идемпотентность* пересечения равных событий:

$$A \cap A = A, \tag{1.19}$$

11) свойство *несовместных* событий:

$$A \cap \overline{A} = \varnothing, \tag{1.20}$$

12) свойство пересечения с *невозможным* событием:

$$A \cap \varnothing = \varnothing, \tag{1.21}$$

13) свойство пересечения с *достоверным* событием:

$$A \cap \Omega = A, \tag{1.22}$$

14) свойство *дополнения события B до события A*:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}, \tag{1.23}$$

15) событие *противоположное достоверному* событию:

$$\overline{\Omega} = \varnothing, \tag{1.24}$$

16) событие *противоположное невозможному* событию:

$$\overline{\varnothing} = \Omega, \tag{1.25}$$

17а) *правило де Моргана* для объединения:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \tag{1.26}$$

17б) *правило де Моргана* для пересечения:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{1.27}$$

Пример 10. Известно, что $A \subset B$. Найти: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$.

Решение.

Событие $A \cup B$ заштриховано на рис. 1.2а, событие $A \cap B$ заштриховано на рис. 1.2б, откуда следует (очевидно), что $A \cup B = B$, $A \cap B = A$.

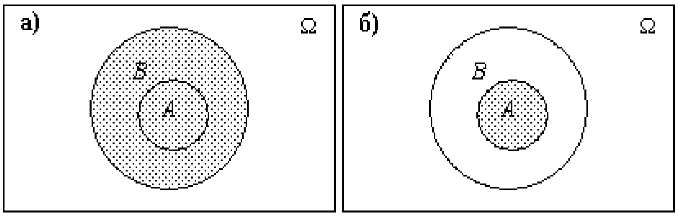


Рис. 1.2. События $A \cup B$ (а) и $A \cap B$ (б), когда $A \subset B$.

1.4. Определение вероятности, классическая и геометрическая вероятности, условия их применения

1.4.1. Классическая и статистическая вероятности

Если множество элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ конечно, и все элементарные события *равновозможные* (одинаково возможны), то такая *вероятностная схема* носит название *классической* схемы.

В этом случае *вероятность* $P(A)$ *наступления события* A, состоящего из $m(A)$ элементарных событий, входящих в Ω, определяется как отношение числа $m(A)$ элементарных событий, благоприятствующих наступлению события A, к общему числу n элементарных событий (исходов).

Эта формула носит название *классического определения вероятности*:

$$P(A) = \frac{m(A)}{n}. \tag{1.28}$$

Вероятность, $P(A)$, наступления события A – это число, дающее меру возможности появления события A при проведении СЭ (испытания).

Согласно классическому определению вероятности:

1) Вероятность *достоверного* события равна 1, так как $m(A) = n$:

$$P(\Omega)=\frac{n}{n}=1. \qquad (1.29)$$

2) Вероятность *невозможного* события равна 0; так как $m = 0$:

$$P(\varnothing)=\frac{0}{n}=0. \qquad (1.30)$$

3) Вероятность *случайного* события является положительным *числом*, заключенным между нулем и единицей; так как для него $0 < m < n$:

$$0 < P(A) < 1. \qquad (1.31)$$

4) Вероятность одного (любого) из элементарных исходов равна:

$$P(\omega_i)=\frac{1}{n}, \quad i=1,2,\ldots,n., \qquad (1.32)$$

Схема решения задач на классическое определение вероятности:

1) по условию задачи определить, что представляет собой СЭ (*случайный эксперимент*);
2) определить природу элементарного события, и, если возможно, записать ПЭИ (*пространство элементарных исходов*);
3) вычислить число всех ЭИ (элементарных исходов) n;
4) по условию задачи определить, в чём состоит событие A, вероятность которого нужно вычислить;
5) определить те ЭИ, которые благоприятствуют событию A, и, если возможно, выписать их;
6) вычислить число $m(A)$ элементарных событий, благоприятствующих наступлению события A;
7) по формуле (28), $P(A)=\dfrac{m(A)}{n}$, вычислить вероятность события A.

Пример 11. Из урны, содержащей 5 красных, 3 черных и 2 белых шара, наудачу извлекают 3 шара. Найти вероятности событий:

A – “все извлеченные шары красные”;
B – “все извлеченные шары – одного цвета”;
C – “среди извлеченных шаров ровно 2 черных”.

Решение:

СЭ – это извлечение из урны наудачу трёх шаров.

ПЭИ данного случайного эксперимента – это все неупорядоченные тройки шаров, которые можно извлечь из урны. Поэтому, общее число исходов есть число сочетаний по 3 из 10, $10 = 5кр + 3ч + 2б$: $n = C_{10}^{3} = 120$.

Событие *A* – "все извлеченные шары красные".

Событие *A* состоит только из тех троек, которые извлекались из пяти красных шаров, т.е. $m(A) = C_5^3 = 10$.

Вероятность события *A* вычислим по формуле (1.28): $P(A) = \dfrac{10}{120} = \dfrac{1}{12}$.

Событие *B* –"все извлеченные шары одного цвета"

Событию *B*, кроме 10 красных троек, благоприятствуют еще и черные тройки, число которых равно $C_3^3 = 1$. Поэтому: $m(B) = 10 + 1 = 11$.

Вероятность события *B* (по формуле (1.28) для $m(B)$): $P(B) = \dfrac{11}{120}$.

Событие *C* – "среди извлеченных шаров ровно 2 черных".

Событию *C* благоприятствуют те тройки шаров, которые содержат 2 черных и один не черный. Каждый способ выбора двух черных шаров может комбинироваться с выбором одного не черного, их семь. Поэтому:

$m(C) = C_3^2 \cdot C_7^1 = 3 \cdot 7 = 21$.

Вероятность события *C* (по формуле (1.28) для $m(C)$): $P(C) = \dfrac{21}{120}$.

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{12}$, $P(B) = \dfrac{11}{120}$, $P(C) = \dfrac{21}{120}$.

Пример 12. В условиях предыдущей задачи будем считать, что шары каждого цвета имеют свою нумерацию, начиная с 1. Найти вероятности события: *D* – "максимальный извлеченный номер равен 4".

Решение:

СЭ и ПЭИ не изменяются.

Событие *D* – "максимальный извлеченный номер равен 4".

После нумерации шаров в урне есть один шар с номером 4, один шар с номером большим 4 (оба красные), и 8 шаров (3к + 3ч + 2б) с меньшими номерами. Событию *D* благоприятствуют те тройки шаров, которые обязательно содержат шар с номером 4 и два шара с меньшими номерами. Поэтому $m(D) = C_1^1 \cdot C_8^2 = 1 \cdot \dfrac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$ и вероятность этого события $P(D) = \dfrac{28}{120}$.

Ответ: $P(D) = \dfrac{28}{120} = \dfrac{7}{30}$.

Пример 13. Каждая из *M* различных частиц бросается наудачу в одну из *N* ячеек. Найти вероятности событий:

A – все частицы попали во вторую ячейку;

B – все частицы попали в одну ячейку;

C – каждая ячейка содержит не более одной частицы ($M \le N$);
D – все ячейки заняты и $M=N+1$;
E – вторая ячейка содержит ровно k частиц.

Решение:

Для каждой частицы имеется N способов попасть в ту или иную ячейку. По первому основному правилу комбинаторики *(правилу произведения*) для M частиц имеем N^M таких способов и $n = N^M$ – число ЭИ в данном СЭ.

Для каждой частицы имеем одну возможность попасть во вторую ячейку, поэтому $n(A) = 1^M = 1$, и по формуле (1.28) $P(A) = 1/N^M$.

Попасть в всем частицам одну (любую) ячейку означает попасть всем либо в первую, либо во вторую, и т.д., либо всем всем в N-ю. Но каждый из этих N вариантов может осуществиться только одним способом. Поэтому $n(B) = 1 + 1 +\ldots+1 = N$ и $P(B) = N/N^M = 1/N^{M-1}$.

Событие C означает, что первая частица может попасть в любую из N ячеек, а у каждой следующей частицы число способов размещения на единицу меньше, чем у предыдущей частицы, т.е. $n(C)= N\cdot(N-1)\cdots(N - M + 1)$ и $P(C) = \dfrac{N\cdot(N-1)\cdots(N-M-1)}{N^M} = \dfrac{N!}{(N-M)!N^M}$, а при $M = N$ $P(C) = \dfrac{N!}{N^M}$.

Событие D означает, что одна из ячеек содержит две частицы, а каждая из $N - 1$ оставшихся ячеек содержит по одной частице. Чтобы найти $n(D)$ рассуждаем так: выберем ячейку, в которой будет две частицы, это можно сделать $C_n^1 = N$ способами; затем выберем две частицы для этой ячейки, для этого существует $C_{N+1}^2 = N(N+1)/2$ способов. После этого оставшиеся N–1 частиц распределим по одной в оставшиеся N–1 ячеек, для этого имеется $(N-1)!$ способов. Итак, $n(D) = N\cdot C_N^2\cdot(N-1)!$ и по формуле (1.28) получим $P(D) = \dfrac{C_{N+1}^2\cdot N!}{N^{N+1}} = \dfrac{(N+1)!}{2\cdot N^N}$.

Число $n(E)$ можно подсчитать так: k частиц для второй ячейки можно выбрать C_M^k способами, оставшиеся $M - k$ частиц распределяются произвольным образом по $N - 1$ ячейке $(N-1)^{M-k}$ способами. Поэтому: $n(E) = C_M^k\cdot(N-1)^{M-k}$ и $P(E) = \dfrac{m(E)}{n} = \dfrac{C_M^k\cdot(N-1)^{M-k}}{N^M}$.

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{N^M}$; $P(B) = \dfrac{1}{N^{M-1}}$; $P(C) = \dfrac{N!}{(N-M)!N^M}$; $P(D) = \dfrac{(N+1)!}{2\cdot N^N}$;

$$P(E) = \frac{C_M^k\cdot(N-1)^{M-k}}{N^M}.$$

Пример 14. Трое играют в карты. Каждому игроку сдано по десять карт и две оставлены в прикупе. Один из игроков видит, что у него на руках шесть карт бубновой масти, а четыре – других мастей. Он сбрасывает две карты из этих четырёх и берёт себе прикуп. Найти вероятность того, что в прикупе окажутся две бубновые карты.

Решение:

СЭ – взятие наудачу 2-х карт из прикупа.

Какое будет ПЭИ, если из 32 карт игрок знает 10? Рассуждаем так. Поскольку из 32 карт игроку известны только десять, то остальные 22 карты неизвестны. Поэтому взять две карты из прикупа – это то же, что взять их из 22 неизвестных карт, среди которых есть две бубновых карты.

В итоге общее число элементарных событий: $n = C_{22}^2 = \dfrac{22 \cdot 21}{2} = 231$.

Событие A состоит в том, что в прикупе окажутся две бубновые карты. Среди неизвестных карт две бубновых карты. Поэтому в ПЭИ только одно элементарное событие благоприятствует наступлению события A, $m(A) = 1$.

Согласно классическому определению вероятности: $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{231}$.

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{231}$

Частным случаем классической вероятностной схемы является *схема урн*: в урне содержится $(K+L)$ шаров, среди которых K белых и L чёрных; из урны наугад без возвращения извлекаются $(k+l)$ шаров, тогда вероятность $P_{K,L}(k,l)$ того, что в выборке содержится ровно k белых шаров и l чёрных, вычисляется по формуле *гипергеометрической вероятности*:

$$P_{R,L}(k,l) = \left\{ \frac{m}{n} \right\} = \frac{C_K^k C_L^l}{C_{K+L}^{k+l}}. \qquad (1.33)$$

Пример 15. В партии, состоящей из 1000 изделий, четыре изделия имеют дефекты. Для контроля отбираются 100 изделий. Найти вероятность того, что среди отобранных изделий не окажется бракованных.

Решение.

По формуле гипергеометрической вероятности (33):

$$P_{996,4}(100,0) = \frac{C_{996}^{100} C_4^0}{C_{1000}^{100}} = \frac{996! \cdot 900!}{896! \cdot 1000!} = \frac{900 \cdot 899 \cdot 898 \cdot 897}{1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997} \approx 0{,}656.$$

Ответ: 0,656.

Если элементарные события не являются равновозможными, для приближённого вычисления вероятности события используют относительную частоту его появления в n СЭ. Пусть в результате n-кратного проведения СЭ (опыта S) событие A наступило m_n раз. Назовём *относительной частотой*

$\nu(A)$ появления события A в серии из n опытов S отношение числа m_n наступлений события A к общему числу n проведённых опытов:

$$\nu(A) = \frac{m_n}{n}. \tag{1.34}$$

Из-за устойчивости относительной частоты, вероятность наступления события A, $P(A)$, приравнивают пределу частоты ν наступления этого события в серии из n опытов при неограниченном увеличении числа опытов:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n}.$$

На практике в этом случае вероятность рассчитывают при помощи приближённого равенства:

$$P\left(A\right) \approx \nu(A) = \frac{m_n}{n}. \tag{1.35}$$

Формула (35) для $P(A)$, называется *статистической вероятностью*.

Пример 16. Рыбаки поймали в пруду 100 рыб, окольцевали их и выпустили назад в воду. На следующий день они поймали 120 рыб, из которых 10 оказались окольцованными. Найти:

а) вероятность того, что выловленная рыба окольцована;

б) количество рыб в пруду.

Решение.

Пусть n – число рыб в пруду и $m_n = 100$ – число окольцованных рыб.

Событие A состоит в том, что «выловленная рыба окольцована». Тогда согласно классическому определению вероятности $P(A) = \dfrac{100}{n}$.

Но поскольку из 120 выловленных рыб $m_{120} = 10$ оказались окольцованы, то вероятность события A приближённо равна относительной частоте: $P\left(A\right) = \dfrac{100}{n} \approx \nu(A) = \dfrac{m_{120}}{120} = \dfrac{10}{120} = \dfrac{1}{12}$. Отсюда $\dfrac{100}{n} \approx \dfrac{1}{12}$ и $n \approx 1200$.

Ответ: а) $\dfrac{1}{12}$; б) 1200.

Недостатки классического определения вероятности: а) ограниченное число ЭИ, б) все ЭИ должны быть равновозможными исходами.

1.4.2. Геометрическая вероятность

Пусть случайный эксперимент (СЭ) можно представить себе, как бросание наудачу точки в некоторую геометрическую область G, которая расположена на прямой, на плоскости или в пространстве. Тогда каждый ЭИ – это точка из области G. Следовательно ПЭИ = G. Любое событие A – это подмножество этой области. Если СЭ обладает симметрией возможных исходов, то все точки G “равноправны”. Естественно считать, что вероятность попадания точки в некоторое подмножество A, $A \subseteq G$, пропорционально мере A и не зависит от расположения и формы области A. Для такого СЭ геометрическая вероятность события A определяется отношением:

$$P(A) = \frac{mer(A)}{mer(G)}, \tag{1.36}$$

где $mer(G)$ и $mer(A)$ – геометрические меры соответственно ПЭИ и события A (длины, площади или объёма, т. е. мера мощности этих множеств).

Геометрическая вероятность не требует ограниченного числа ЭИ, но одинаковая возможность появления любого ЭИ остаётся обязательной.

Пример 17. На плоскость, разграфленную параллельными полосами шириной $2d$, расстояние между осевыми линиями которых равно $2D$, наудачу брошен круг радиуса r ($r + d < D$). Найти вероятность пересечения круга с некоторой, любой, полосой, т. е. появления у них общих точек.

Решение:

Здесь СЭ заключается в бросании на плоскость, разграфлённую параллельными полосами определённого размера, круга известного радиуса.

В качестве ЭИ этого СЭ будем считать расстояние $\boldsymbol{x}$ от центра круга до осевой линии ближайшей к кругу полосы. Тогда ПЭИ – это множество-отрезок $G = \{x\text{: } 0 \le x \le D\}$. Мера ПЭИ равна его длине $D = mer(G)$.

Событие A – «круг пересечется с некоторой полосой». Ясно, что пересечение круга с полосой произойдет в том случае, если его центр попадёт в полосу, т. е. множество-отрезок $A' = \{x\text{: } 0 \le x \le d\}$, или будет находиться от края полосы на расстоянии меньшем его радиуса, тогда $A'' = \{x\text{: } d < x \le d + r\}$.

Мера множества элементарных событий (исходов), благоприятствующих событию A, равна $mer(A) = mer(A') + mer(A'') = d + r$, где $A = A' \cup A''$.

Тогда для искомой вероятности получаем: $P(A) = \dfrac{mer(A)}{mer(G)} = \dfrac{d + r}{D}$.

Ответ: $\dfrac{d + r}{D}$.

Пример 18. Чтобы добраться в институт, Петя может воспользоваться автобусом одного из двух маршрутов. Автобусы первого маршрута следуют с интервалом в 18 мин, второго маршрута – с интервалом в 15 мин. Найти вероятность того, что Петя будет ждать автобуса не более 10 мин.

Решение:

Здесь СЭ – это случайное время прихода на остановку,

Начало ожидания автобусов совместим с началом координат, с точкой O, а времена ожидания автобуса первого, t_1, и второго, t_2, маршрутов будем откладывать вдоль горизонтальной и вдоль вертикальной осей, соответственно. Тогда ПЭИ Ω (множество всех ЭИ) совпадёт с прямоугольником: $0 \le t_1 \le$

$T_1 = 18$ *мин*, $0 \le t_2 \le T_2 = 15$ *мин* (рис. 1.3). Здесь T_1 и T_2 времена максимально возможного ожидания соответствующего автобуса. (Через эти промежутки времени ситуация для указанных маршрутов повторяется.)

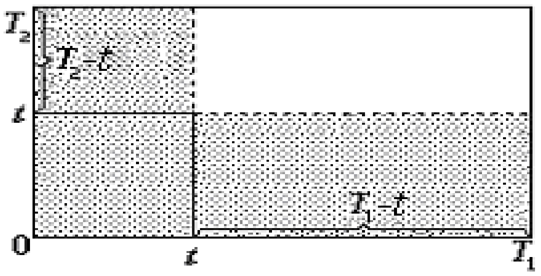


Рис. 1.3. Множество элементарных событий в примере

Событие A состоит в том, что Петя не более t = 10 мин будет ждать автобус. Оно реализуется, если $0 \le t_1 \le t$ и/или $0 \le t_2 \le t$. На рис. 1.3 эта область заштрихована. Она включает все ЭИ, благоприятствующие наступлению события A. Тогда по определению геометрической вероятности:

$$P\{A\} = \frac{mer(A)}{mer(\Omega)} = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{T_1T_2 - (T_1 - t)(T_2 - t)}{T_1T_2} = 1 - \left(1 - \frac{t}{T_1}\right)\cdot\left(1 - \frac{t}{T_2}\right).$$

Если $T_1 = 18$ мин, $T_2 = 15$ мин и t = 10 мин, получим:

$$P\{A\} = 1 - \left(1 - \frac{10}{18}\right)\cdot\left(1 - \frac{10}{15}\right).$$

Ответ: $\frac{23}{27}$.

1.5. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Только при выполнении для СЭ определённого комплекса условий S можно говорить о *вероятности* наступления какого-либо события. Если в комплекс условий, при которых изучалась вероятность наступления события A, добавить условие наступления и события B, то S заменится на S_B и другими будут СЭ и вероятность $P_B(A)$. Её называют вероятностью наступления события A при условии, что событие B уже произошло. *По определению условная вероятность события A при условии B* равна

$$P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1.37}$$

Для геометрической (36) и классической (28) вероятностей формула (37) *доказывается.* Действительно, для комплекса условий S имеем ПЭИ равное Ω, все ЭИ равновозможные и вместе с формулами (36) и (28) верно $P(B) = mer(B)/mer(\Omega) = m_B/n$ и $P(A \cap B) = mer(A \cap B)/mer(\Omega)$. Тогда

$$P(A/B) = \frac{mer(A \cap B)}{mer(B)} = \frac{mer(A \cap B)/mer(\Omega)}{mer(B)/mer(\Omega)} = \left\{\frac{m_{A\cap B}}{m_B} = \frac{m_{A\cap B}/n}{m_B/n}\right\} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Теоремы умножения (ТУ):

Из формулы (37) ясно, что *вероятность наступления двух совместных событий* равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго события при условии, что первое уже наступило:

$$P(A\cdot B)=P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B). \qquad (1.38)$$

Следствие 1: Вероятность совместного наступления нескольких событий равна произведению вероятности любого из них на условные вероятности остальных, при этом вероятность каждого следующего события вычисляются при условии, что все предыдущие уже наступили:

$$P(A_1\cdot A_2\cdots A_k)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdots P(A_k|A_1\cdot A_2\cdots A_{k-1}). \qquad (1.39)$$

События A и B *независимые*, если $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$). Тогда для *независимых событий* из формулы (37) следует равенство

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)=P(B)\cdot P(A). \qquad (1.38')$$

Говорят: “Вероятность совместного наступления *независимых* событий A и B равна произведению их вероятностей.”

События $A_1, A_2, \cdot A_3, \ldots, A_k$ *независимые в совокупности*, если независимые каждое из них и произведение любого количества остальных событий,

т. е. $P(A_1|A_2)=P(A_1),\ P(A_2|A_1)=P(A_2),\ \ldots, P(A_k|A_1\cdot A_2\cdots A_{k-1})=P(A_k),\ \ldots$

Следствие 2: Вероятность совместного наступления нескольких событий *независимых в совокупности* равна произведению их вероятностей.

$$P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdots A_k)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdots P(A_k). \qquad (1.40)$$

Пример 19. Среди 16 лампочек 3 нестандартных. Найти вероятность того, что две взятые одновременно лампочки окажутся нестандартными.

Решение:

Обозначим события:

A – «первая лампочка окажется нестандартной»;

B – «вторая лампочка окажется нестандартной».

События A и B зависимые.

Вероятность того, что первая лампочка нестандартная:

$$P(A)=\frac{3}{16}.$$

Вероятность второй лампочке быть нестандартной при условии, что первая лампочка оказалась нестандартной, равна

$$P_A(B)=\frac{2}{15}.$$

Здесь учтено, что общее число лампочек и число нестандартных среди них уменьшится на единицу, если первая лампочка нестандартная. В соответствии с теоремой умножения вероятностей для двух зависимых событий

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{3}{16}\cdot\frac{2}{15}=\frac{1}{40}=0{,}025.$$

Ответ: 0,025

Теоремы сложения (ТС):

События A и B *несовместные*, если их совместное наступление невозможно, $A\cap B=\varnothing$. Для них $P(A\cap B)=0$ и $P(A/B)=P(B/A)=0$. Для противоположных событий $A\cap\overline{A}=\varnothing$, но $A\cup\overline{A}=\Omega$. Поэтому.

События $A_1,A_2,\ldots A_k$ *попарно несовместные*, когда $A_i\cap A_J=\varnothing$ и для всех пар событий вероятности $P(A_i\cap A_j)=0$, где $i\neq j,\ i,j=1,2,\ldots,k$,

Из $mer(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k)=mer(A_1)+mer(A_2)+\ldots+mer(A_k)$ для k попарно несовместных событий, $A_1,A_2,\ldots A_k$, и определения (37) следует, что вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i/n, \qquad (1.41)$$

Вероятность суммы событий, образующих полную группу, равна 1. Это следует из свойств полной группы событий, $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=\Omega$, $A_i\cap A_J=\varnothing,\ i\neq j,\quad i,j=1,2,\ldots,k$, и из $P(\Omega)=1$. Поэтому для них верно

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_k)=P(\Omega)=1. \qquad (1.42)$$

Для противоположных событий: $A\cup\overline{A}=\Omega$ и $P(A\cup\overline{A})=1$. Поэтому вследствие (41) верно: $P(A)+P(\overline{A})=1$, откуда следует: $P(A)=1-P(\overline{A})$.

Вероятность суммы совместных событий вычисляется по формуле

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B). \qquad (1.43)$$

В (43) учитывают $P(A\cup B)=\begin{cases}P(A)\cdot P_A(B), & \text{для зависимых событий;}\\ P(A)\cdot P(B), & \text{для независимых событий;}\\ 0, & \text{для несовместных событий.}\end{cases}$

Доказательство формулы (43) опирается на применение (41) для трёх несовместных событий, $A\cap B$, $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$ и $B\setminus A=B\setminus(A\cap B)$, после замены объединения A и B их суммой, $A\cup B=A\setminus B\cup B\setminus A\cup(A\cap B)$, и аналогично для событий A и B: $A=A\setminus B\cup(A\cap B)$ и $B=B\setminus A\cup(A\cap B)$.

Пример 20. Из урны, содержащей 5 красных и 7 белых шаров, наудачу извлекают по одному два шара. Найти вероятности событий :

B – «извлеченные шары – белые»;
C – «только первый извлеченный шар – белый»;
D – «только один извлеченный шар – белый».

Рассмотреть два случая: а) извлечения без возвращения;
б) извлечения с возвращением.

Решение:

Обозначим : $A_к$ – ***к***-й извлеченный шар – белый, ***k*** = 1 .. 2. Тогда

$$B = A_1 * A_2; \quad C = A_1 * \overline{A_2}; \; D = A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2.$$

а) Если 1 шар не возвращают в урну, то вероятности событий, связанных со вторым извлечением зависят от исхода первого, т.е. A_1 и A_2 – зависимые события и поэтому:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{7}{22}.$$

Условную вероятность нашли, рассуждая так: после того, как событие A_1 произошло, т.е. первый извлеченный шар был белый, второе извлечение осуществляется из урны, содержащей 5 красных и 6 белых (7 – 1 = 6) шаров. Поэтому $P(A_2 / A_1) = \frac{6}{11}$.

Аналогично $P(C) = P(A_1)P(\overline{A_2} / A_1) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{35}{132}.$

Слагаемые в записи события D являются несовместными, поэтому:

$$P(D) = P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{70}{132} = \frac{35}{66}.$$

б) В случае возвращения извлеченного шара извлечения становятся независимыми испытаниями, а значит и события, связанные с ними – независимые, причем $P(A_1) = P(A_2) = \frac{7}{12}$. Поэтому:

$$P(B) = \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{49}{144}; \quad P(C) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{35}{144}; \quad P(D) = 2 \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{70}{144} = \frac{35}{72}.$$

Ответ: *а*) $P(B) = \frac{7}{22}$; $P(C) = \frac{35}{132}$; $P(D) = \frac{35}{66}$;

б) $P(B) = \frac{49}{144}$; $P(C) = \frac{35}{144}$; $P(D) = \frac{35}{72}$.

1.6. Упражнения для самостоятельной работы

1. В розыгрыше первенства по баскетболу учувствуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд в каждой. Среди участников имеется 5 команд экстра-класса. Найти вероятность следующего события: В – две команды экстра-класса попадут в одну из групп, а три в другую.

2. На 5 карточках написаны цифры:1,2,3,4,5. Две из них, одна за другой, вынимаются. Найти вероятность того, что число на второй карточке будет больше, чем на первой.
3. В круг радиуса R помещён меньший круг радиуса r. Найти вероятность того, что точка наудачу брошенная в большой круг, попадёт в маленький круг
4. Два студента условились встретиться в определённом месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждёт второго 25 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода в данном промежутке.
5. В ящике 10 красных и 6 синих шаров. Вынимаются на удачу 2 шара. Какова вероятность, что шары будут одинакового цвета.

6. Из урны, содержащей 5 красных и 7 белых шаров, наудачу извлекают по одному два шара. Найти вероятности событий: B – извлеченные шары белые; C – белый только первый извлеченный шар; D – только один извлеченный шар белый. Рассмотреть два случая: а) извлечения без возвращения; б) извлечения с возвращением.
7. Монета бросается до тех пор, пока 2 раза не выпадает одно и то же. Какова вероятность события: опыт закончится до 6 бросания?
8. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что нестандартным окажется только четвёртое по порядку проверенное изделие из 5 проверенных изделий.

9. Из колоды карт (36 карт, 4 масти) извлекают наудачу сразу 3 карты. Найти вероятности событий: A – среди извлеченных карт есть 2 бубны или 2 туза; B – извлечена хотя бы одна дама.

10. Независимый СЭ проводится до тех пор, пока не произойдет событие A, причем: вероятность появления A в каждом испытании одна и та же и равна p. Найти вероятности событий: B – опыт закончится на третьем испытании; C – потребуется нечетное число испытаний; D – потребуется не менее трех испытаний.

1.7. Индивидуальные задания

Вариант 1

1.События: A - хотя бы один из трех проверяемых приборов бракованный. B - все приборы доброкачественные. Что означают события: $A\cup B,\ A\cap B,\ \overline{A\cap B}$?

2. Из колоды, содержащей 36 карт, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт окажется хотя бы один туз?

3. По статистическим данным ремонтной мастерской в среднем на 20 остановок токарного станка приходится: 10 – для смены резца, 3 - из-за неисправности привода, 2 - из-за несвоевременной подачи заголовок. Остальные остановки происходят по другим причинам. Найти вероятность остановки станка по другим причинам.

4. Устройство состоит из 7 элементов, из которых 3 изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

5. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что вытянутый им билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?

6. Батарея, состоящая из 10 орудий, ведет огонь по 15 кораблям неприятеля. Найти вероятность того, что все орудия стреляют: а) по одной цели; б) по разным целям (выбор цели случаен и не зависит от других).

7. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 см и 10 см. На большую окружность наудачу брошена точка. Найти вероятность попадания точки в кольцо, образованное этими окружностями.

8. Наудачу взяты два положительных числа x, y, каждое из которых не превышает $^{7}\!/_{10}$. Найти вероятность p того, что их произведение $x \cdot y$ будет не более 5, а частное x/y не больше $10/7$.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв. Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен. «к», «ю»

10. На автомобиле установлены электронная сигнализация и механическая блокировка рычага переключения передач. Вероятность того, что угонщик справится с сигнализацией, составляет 0,2, а вероятность того, что он сломает блокиратор, равна 0,1. Сегодня была попытка угнать автомобиль. Найти вероятности следующих событий: а) автомобиль будет угнан; б) угонщик справится только с одной системой защиты.

11. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии первый сигнализатор сработает, равна 0,95; для второго сигнализатора эта вероятность равна 0,9. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

12. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; 9 очков - 0,3; 8 и меньше - 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее девяти очков.

Вариант 2

1.Из таблицы случайных чисел наудачу взято число. Рассмотрим два события: А - число делится на 5; В – число оканчивается нулем. Что означают события $A \cap B,\ A \cup B,\ A \cap \overline{B},\ \overline{A} \cap B,\ \overline{A} \cap \overline{B}$?

2. Найти количество четырехзначных чисел, получаемых при всевозможных перестановках цифр 1,2,2,5?

3. В соревнованиях по футболу участвуют 20 команд. Случайным образом они делятся на две группы по 10 команд. Какова вероятность того, что 2 наиболее сильные команды при этом окажутся в одной группе?

4. Из 10 книг 4 художественные. Найти вероятность того, что среди трех, взятых наугад книг, хотя бы одна художественная.

5. Из колоды в 52 карты выбираются наугад 4. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один туз.

6. В чулане лежат 10 пар ботинок. Из них случайно выбирают 4 ботинка. Найти вероятность того, что среди выбранных ботинок: а) нет парных; б) имеется ровно 1 пара.

7. В круг вписан правильный треугольник. Какова вероятность того, что точка, брошенная наудачу в круг, окажется внутри треугольника.

8. Найти вероятность, что сумма наудачу взятых положительных правильных дробей не больше 0.95, а произведение не меньше $3/20$

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв. Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен. «е», «ц»

10. Из урны, содержащей три красных шара и семь зелёных, вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба они будут красными.

11. Для некоторой местности среднее число дождливых дней в августе равно II. Чему равна вероятность того, что первые два дня августа будут дождливыми?

12. В мастерскую по ремонту радиоприемников поступили две партии радиоламп определенного типа. В первой партии ламп в 2 раза больше, чем во второй; качество ламп в первой партии более высокое. Из большого числа не рассортированных ламп мастер берет первые попавшиеся два. Чему равна вероятность того, что обе лампы окажутся: а) из какой-либо одной партии; б) из различных партий.

Вариант 3

1.Пусть A_1, A_2, A_3 - произвольные события. Найти выражение для событий: А- произошло точно два события из трех, В- ни одно не произошло.

2. Сколько различных браслетов можно сделать из 5 одинаковых изумрудов,6 одинаковых рубинов, 7 одинаковых сапфиров (В браслет входят все 18 камней?)

3. Найти вероятность того, что абонент наберет правильный двузначный номер, если он знает, что данный номер не делится на 5.

4. В пакете 15 конфет «Красная шапочка» и 20 конфет «Мишка косолапый». Из пакета наудачу извлекаются 8 конфет. Какова вероятность того, что среди них ровно 4 конфеты «Мишка косолапый»?

5. Каждая из букв м, е, р, о написана на одной из четырех карточек. Карточки перемешиваются и раскладываются наугад. Какова вероятность того, что в результате получится слово "море"?

6. 52 игральные карты раздаются 4 игрокам. Найти вероятность того, что

а) все тузы будут у одного игрока; б) каждый игрок получит один туз.

7. На плоскости проведены параллельные прямые, расстояния между которыми равны поочередно 2.5 и 8 см. На плоскость наудачу бросают круг радиуса 2.5 см. Какова вероятность того, что этот круг не пересечет ни одну из линий.

8. Два студента условились встретиться в определенном месте между 13 и 15 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 1 часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 13 до 15 часов).

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв: «п», «э». Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен.

10. Игральную кость бросают два раза. Найти вероятность того, что оба раза появится одно и то же число очков.

11. Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,8; для второго и третьего орудий эти вероятности равны соответственно 0,7 и 0,9. Найти вероятность того, что: а) только один снаряд попадет в цель; б) хотя бы один снаряд попадет в цель.

12. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Вариант 4

1.Машинно-котельная установка состоит из двух котлов и одной машины. Событие А-исправна машина, событие B_1 - исправен первый котел, B_2 - второй котел. Выразить полную группу событий через *А*, B_1 , B_2 .

2. В урне лежат жетоны с числами от 1 до 10 и из неё вынимают 3 жетона. В скольких случаях сумма написанных на них чисел будет равна 9, не больше 9?

3. Брошены три игральные кости. Найти вероятность того, что на двух выпавших гранях появится одинаковое число очков, а на третьей грани - другое число очков.

4. Из колоды в 36 карт наудачу извлекают 3 карты. Какова вероятность того, что среди них окажутся 2 туза и 1 дама пик?

5. В группе 25 студентов, из них 10 девушек и 15 юношей. Из группы должны по жребию отобрать 5 студентов. Какова вероятность того, что среди отобранных окажутся 3 юноши?

6. В цветочном ларьке продаются 8 аспарагусов и 5 гераней. Какова вероятность того, что среди 5 проданных растений: а) 2 аспарагуса; б) все герани?

7. В круг радиуса R наудачу бросают точку. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до центра превышает a.

8. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждое из которых не больше 1, не превзойдет единицы, а их произведение будет не больше 0,25.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв: «щ», «д». Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен.

10. В группе из 1 000 человек 452 имеют текущие счета, 336 — депозитные счета, а 302 — и текущие, и депозитные. Определить, являются ли события «*обладание текущим счётом*» и «*обладание депозитным счётом*» независимыми?

11. Покупатель приобрел пылесос и полотёр. Вероятность того, что пылесос не выйдет из строя в течение гарантийного срока, равна $0,95$, для полотера такая вероятность равна $0,94$. Найти вероятность того, что хотя бы один из приборов выдержит гарантийный срок.

12. Два стрелка стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7, вторым - 0,8. Оба стрелка производят по одному выстрелу в мишень. Найти вероятность того, что: а) оба стрелка поразят мишень; б) оба промахнутся; в) хотя бы один попадет в мишень; г) произойдет одно попадание в мишень

Вариант 5

1.Имеются два круга, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$) . В круг радиуса r_2 брошена точка. Событие *А* – попадание точки в круг радиуса r_1. Событие В - попадание точки в круг радиуса r_2. Что означают события: $A \cup B,\ A \cap B,\ \overline{A \cap B}$?

2. Сколько существует семизначных телефонных номеров в первых трёх цифрах, которых, не встречаются две цифры: 0 и 9.

3. На пяти одинаковых карточках написаны буквы: на двух карточках "л", на остальных трех "и". Вкладываем наудачу эти карточки подряд. Какова вероятность того, что при это получится слово "лилии"?

4. Устройство состоит из 6 элементов, из которых два изношены. С начала работы устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность, что включенными окажутся неизношенные элементы.

5. Четырехтомное сочинение расположено на полке случайном порядке. Найти вероятность того, что тома расположены должном порядке, справа налево или слева направо.

6. Из колоды в 36 карт наугад выбирают 4 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется: а) один «туз»; б) хотя бы один «король»; в) «туз пик».

7. На окружности радиуса R и центром в точке O наудачу взяты две точки A и B. Какова вероятность того, что угол AOB – острый.

8. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени от T_1 до T_2. Одно из событий длится 10 мин., другое – t мин. Определить вероятность того, что: а) события «пересекаются» по времени; б) «не пересекаются». T_1 =1000; T_2 =1200; t=20.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв. Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен. «ь», «с»

10. Нефтедобывающая компания проводит буровые работы в трёх различных местах *A*, *B* и *C*. Вероятности успешного бурения в *A*, *B* и *C* равны соответственно 0,5, 0,4 и 0,1. Предположив, что события, заключающиеся в успешности бурения в местах *A*, *B* и *C*, независимы, вычислить вероятности следующих событий: *а*) хотя бы одно бурение окажется успешным; *б*) ровно одно бурение окажется успешным.

11. Производится стрельба по некоторой цели, вероятность попадания, в которую при одном выстреле равна $0,2$. Стрельба прекращается при первом попадании. Найти вероятность того, что будет произведено ровно шесть выстрелов.

12. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,9; для второго эта вероятность равна 0,8; а для третьего – 0,85. Какова вероятность того что в течение часа: *а*) ни один станок не потребует внимания рабочего; *б*) все станки потребуют внимания рабочего; в) какой-нибудь один станок потребует внимания рабочего?

Вариант 6

1.По цели производится 3 выстрела. Даны события A_i - попадание в цель при i-м выстреле (i =1,2,3) . Выразить через A_i и $\overline{A_i}$ слебдующие события: B_0 - ни одного попадание в цель; B_2 - хотя бы два попадания в цель.

2. Сколькими способами можно составить из 9 согласных и 7 гласных слова, в которые входят 4 различных согласных и 3 различных гласных. Во скольких из этих слов, ни какие две согласные не стоят рядом?

3. Для участия в шахматном турнире записалось 20 человек. Организаторы отобрали из них команду в 9 человек. Какова вероятность того, что два наиболее сильных шахматиста попадут в команду?

4. Четыре человека сели в лифт 9-ти этажного дома, каждый из них может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все выйдут на разных этажах.

5. Для уменьшения общего количества игр на соревнованиях 16 волейбольных команд разбили, на две подгруппы (по 8 команд в каждой).Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся в разных подгруппах.

6. На 4-х карточках написаны числа 1, 4, 5, 8. Случайным образом выбираются две и из них и составляется двузначное число. Описать пространство элементарных исходов и найти вероятности событий *A, B*:

а) *A* – полученное число > 50, б) *B* – полученное число делится на 3.

7. На окружности радиуса *R* наудачу взяты две точки. Какова вероятность того, что расстояние между точками не превосходит $r(r \le 2R)$.

8. Поезда данного маршрута городского трамвая идет с интервалом в 5 минут. Пассажир подходит к остановке в некоторый момент времени. Считая момент прихода пассажира распределенным равномерно, найти вероятность появления пассажира не ранее чем через минуту после ухода предыдущего поезда, но не позднее, чем за две минуты до отхода следующего поезда.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв: «я», «ж». Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен.

10. Студент знает не все экзаменационные билеты. В каком случае вероятность вытащить невыученный билет будет меньше: когда он тянет билет первым или вторым?

11. Экспедиция издательства отправила газеты в два почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в каждое отделение почты равна 0,9. Найти вероятность того, что: *а*) оба почтовых отделения получат газеты вовремя; *б*) хотя бы одно почтовое отделение получит газеты вовремя.

12. Для некоторой местности среднее число пасмурных дней в июле равно шести. Найти вероятность того, что первого и второго июля будет ясная погода.

Вариант 7

1.Прибор состоит из 2-х блоков 1-го и 3-х блоков 2-го типа. События A_k (k =1,2) –исправлен k -й блок 1-го типа; B_j (j = 1,2,3) – исправленный j -й блок 2-го типа. Прибор исправен, если исправен хотя бы один блок1-го типа и не менее 2-х блоков 2-го типа. Выразить событие С - исправность прибора через A_k и B_j .

2. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 30 три натуральных числа, так что бы их сумма была чётной?

3. Среди 25 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрывается 5 билетов. Определить вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 2 девушки.

4. Группу спортсменов из 12 человек, среди которых три перворазрядника, разбили на 3 команды по 4 человека. Найти вероятность того, что хотя бы в одной команде не будет перворазрядника.

5. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков будет четным.

6. В ящике находятся 8 одинаковых пар перчаток черного цвета и 6 одинаковых пар перчаток бежевого цвета (перчатки не связаны в пары, т.е. каждая перчатка, левая или правая, – это отдельный предмет). Какова вероятность извлечь: *а*) пару черных перчаток; *б*) пару бежевых перчаток; *в*) пару перчаток любого цвета?

7. В квадрате со стороной *a* наудачу выбрана точка. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей вершины меньше $r(r < \frac{a}{2})$.

8. Двое условились о встрече между 7 час. 45 мин. и 8 час. 00 мин. Пришедший первым ждет другого в течение 3 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность их встречи, если каждый может прийти в любой момент указанного промежутка, и моменты их прихода независимы?

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв: «в», «ь». Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен.

10. Студенты считают, что из 50 экзаменационных билетов 10 являются «*хорошими*». Петр и Анна по очереди тянут по одному билету. Найти вероятности следующих событий: а) Петру достался «*хороший*» билет; б) Анне достался «*хороший*» билет; в) им обоим достались «*хорошие*» билеты.

11. В урне *а* белых и *в* черных шаров. Из нее в случайном порядке, один за другим, вынимают все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку был вынут белый шар.

12. Вероятность попадания в мишень каждым из двух стрелков равна 0,3. Стрелки стреляют по очереди, причем каждый должен сделать по два выстрела. Попавший в мишень получает приз. Найти вероятность того, что получит приз стрелок, начавший стрелять первым; вторым.

Вариант 8

1.Событие "*A*" - хотя бы одно из имеющихся трех изделий бракованное, событие "*B*" - бракованных изделий среди них не менее двух. Что означают события: $\overline{A}$, $A \cap B$, $A \cup B$?

2. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр числа 12335233?

3. При приемке партии подвергается проверке половина изделий. Условиями приемки допускается не более 2% бракованных изделий. Определить вероятность того, что партия из 100 изделий, содержащая 5% брака, будет принята.

4. В пруду находится 800 осетров и 500 стерлядей. Какова вероятность того, что две подряд выловленные рыбы окажутся разных видов?

5. Для дежурства на агитпункте из отдела, в котором работает 10 инженеров, 5 техников и 3 лаборанта, должны быть выделены 5 человек. Чему равна вероятность того, что будут выделены 2 техника, один лаборант и 2 инженера?

6. В зале художественного салона развешаны картины: 10 натюрмортов русских художников, 3 полотна французских импрессионистов и две картины представителей сюрреализма. Воры в темноте наудачу снимают три картины. Какова вероятность, что среди этих картин: а) два натюрморта; б) одна картина импрессиониста и одна - сюрреалиста?

7. На окружности радиуса R наудачу взяты две точки. Какова вероятность того, что эти точки и центр образуют тупоугольный треугольник.

8. Из отрезка (-1,2) наудачу взяты два числа. Какова вероятность, что их сумма больше единицы, а произведение меньше единицы?

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв. Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен. «у», «л»

10. Студентка пришла на экзамен, зная ответы на 20 вопросов программы из 25. Профессор задаёт три вопроса. Найти вероятности следующих событий: *а*) студентка ответит на все три вопроса; *б*) студентка ответит на два вопроса; *в*) студентка ответит на один вопрос; *г*) студентка ответит хотя бы на один вопрос; *д*) студентка не ответит ни на один вопрос.

11. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым из стрелков равна 0,8. Найти вероятность того, что: *а*) оба стрелка поразят мишень; *б*) оба стрелка промахнутся; в) только один стрелок поразит мишень; *г*) хотя бы один стрелок поразит мишень.

12. Три исследователя независимо один от другого производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показаний прибора, равна 0,1. Для второго и третьего исследователей эта вероятность соответственно равна 0,15 и 0,2. Найти вероятность того, что при однократном измерении хотя бы один из исследователей допустит ошибку.

Вариант 9

1.Прибор состоит из 3-х элементов 1-го типа и 2-х элементов 2-го типа: A_k (k =1,2,3) -исправен k -й элемент 1-го типа; B_j (j =1,2) -исправен j -й элемент 2-го типа; *С* - прибор исправен в том случае, когда исправны все элементы 2-го типа и хотя бы один элемент 1-го типа. Выразить событие *С* - исправность прибора через A_k и B_j.

2. Из города *А* в город *В* ведут 5 дорог, и из города *В* в город *С* – три дороги. Сколько путей, проходящих через *В*, ведут из *А* в *С*?

3. На первом этаже семиэтажного дома в лифт зашли 3 человека. Вероятности выхода каждого из лифта на любом этаже одинаковы. Найти вероятность того, что все трое вышли из лифта на 4 этаже.

4. Колода из 36 карт хорошо перемешана (то есть все возможные расположения карт равновероятны). Найти вероятность того, что все четыре туза расположены рядом.

5. В пруду находится 800 осетров и 500 стерлядей. Какова вероятность того, что две подряд выловленные рыбы окажутся разных видов?

6. Бросаются 2 игральные кости. Определить вероятность того, что: *а*) сумма числа очков не превосходит 8; *б*) сумма числа очков превосходит 10; *в*) произведение числа очков делится на 4; *г*) произведение числа очков делится на 10.

7. Вкруг вписан правильный шестиугольник. Какова вероятность того, что точка, брошенная наудачу в круг, окажется внутри шестиугольника.

8. Выбираются случайным образом два числа x, y ,$1 < x < 2$, $1 < y < 2$. Найти вероятность того, что сумма их меньше 3, а произведение больше 2.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв: «г», «с». Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен.

10. Участковый врач обслуживает на дому троих больных. Вероятность того, что в течение суток врач потребуется первому больному, равна 0,1, второму - 0,5, третьему - 0,3. Найти вероятность того, что в течение некоторых суток: *а*) ни один больной не вызовет врача; *б*) хотя бы один вызовет врача; *в*) только один больной вызовет врача.

11. Чему равна вероятность того, что дни рождения трех человек придутся на разные месяцы: июнь, июль, август? Вероятности попадания дня рождения на данный месяц считаются равными для всех месяцев года.

12. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность поражения первым стрелком равна 0,7; вторым – 0,8 и третьим – 0,9. Найти вероятность того, что: *а*) только один из стрелков поразит цель; *б*) все три стрелка поразят цель; *в*) по крайней мере два стрелка поразят цель.

Вариант 10

1.Из ящика берется для проверки наудачу одна деталь. События: *А* - взятая наудачу для проверки деталь 1-го сорта: *В* - деталь 2-го сорта. Какие события *А* и *В*, совместные или несовместные? Что означают события: $A \cup B$, $A \cap B$?

2. Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну – на правую так, чтобы выбранные перчатки были разных размеров?

3. В урне 4 белых и 4 черных шара. Из этой урны наудачу извлекли 5 шаров. Какова вероятность того, что 2 из них белые, а 3 – черные?

4. На стеллаже 15 учебников, 5 из них в переплете. Наудачу выбирают 3 учебника. Какова вероятность, что хотя бы один из них будет в переплете?

5. В мастерскую для ремонта поступило 10 часов марки "Заря". Известно, что шесть штук из них нуждаются в общей чистке механизма. Мастер берет первые попавшиеся 5 часов. Определить вероятность того, что двое из них нуждаются в общей чистке механизма.

6. Из колоды, в которой содержится 52 карты, выбирается 4 карты, причем каждая из них после определения масти и значения возвращается в колоду. Определить вероятность того, что все карты будут: *а*) разных мастей; *б*) одной масти; *в*) тузами.

7. В круге радиуса *R* наудачу взята точка. Какова вероятность того, что она будет ближе к центру, чем к границе круга?

8. Наудачу взяты два положительных числа, каждое из которых не превышает единицы. Определить вероятность того, что их частное не больше двух.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв: «ш», «а». Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен.

10. Три стрелка производят по одному выстрелу по мишени, вероятности попадания в которую равны для первого стрелка $0,5$, для второго – $0,7$, для третьего – $0,6$. Найти вероятность двух попаданий в мишень.

11. Для повышения надежности работы электрической цепи на участке *АВ* параллельно подсоединены два дублирующих узла *С* и *Д*, не взаимодействующие друг с другом. Узлы присоединены так, что в цепи работает один из них и, как только он выходит из строя, автоматически включается другой. Определить надежность (вероятность невыхода из строя) участка *АВ* если вероятность выхода из строя узла *С* равна $0,1$, узла *Д* – $0,2$.

12. При конвейерной сборке точного прибора рабочий должен установить в него определенную деталь. Деталь эту в некоторых случаях приходится подгонять путем дополнительной обработки и пробных установок ее в механизм. Всего таких установок производится не более 4-х. Вероятность того, что деталь будет установлена без подгонки с первой пробы, равна 0,44;с подгонкой, при второй пробе -0,31; при третьей-0,20; при четвертой-0,05.Какова вероятность того, что для подгонки этой детали потребуется: *а*) три или четыре пробы; *б*) не более двух проб?

Вариант 11

1.В урне черные и белые шары, взяли два шара. Событие: A- оба шара белые, B- один чёрный, другой белый. Что означают события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\cup B$, $A\cap B$, $\overline{A\cap B}$?

2. Семь девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 5 человек, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

3. Две команды по 20 спортсменов производят жеребьёвку для присвоения номеров участникам соревнований. Два брата входят в состав различных команд. Найти вероятность того, что братья будут участвовать в соревнованиях под одним и тем же номером 18.

4. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и набирает её наугад. Определите вероятность того, что он наберёт правильный номер со второго раза.

5. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

6. Из колоды, в которой содержится 52 карты, выбирается 4 карты. Определить вероятность того, что будет: *а*) выбрано три карты одного значения, а четвертая – другого; *б*) все карты одного значения.

7. Внутри квадрата со стороной *a* наудачу взята точка. Какова вероятность того, что она будет ближе к его центру, чем к какой-либо из его вершин.

8. Время прихода обоих пароходов к причалу независимо и равновозможно в течение суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ждать, если время стоянки обоих пароходов 1 час.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв: «ч», «в». Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен.

10. Вероятность того, что в течение дня произойдет неполадка станка, равна 0,03. Какова вероятность того, что в течение четырех дней подряд не произойдет ни одной поломки?

11. В телестудии имеются три телекамеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна $0,6$. Найти вероятность того, что в данный момент включена: *а*) одна камера; *б*) хотя бы одна камера.

12. Игрок *A* поочередно играет по 2 партии с игроками *B* и *C* .Вероятности выигрыша первой партии для *B* и *C* равны 0,1 и 0,2 соответственно. Вероятность выиграть во второй партии для *B* равна 0,3, для *C* – 0,4. Определить вероятность того, что из игроков *B* и *C*: *а*) первым выиграет *B*; *б*) первым выиграет *C*.

Вариант 12

1.Два стрелка делают по одному выстрелу. Событие *А* - первый стрелок попадает в цель; событие *В* – второй стрелок попадает в цель. Что означают события: $A\cup B$, $A\cap B$, $\overline{A}\cap B$?

2. В лифт сели 9 человек. Сколькими способами они могут выйти на 3-х этажах?

3. Четырёхтомное сочинение расположено на полке в произвольном порядке. Какова вероятность, что номера томов идут подряд?

4. В ящике 10 белых и 4 чёрных шара. Из ящика наугад извлекают два шара найти вероятность того, что оба шара будут белые.

5. Из колоды в 36 карт наудачу выбирается 3 карты. Какова вероятность, что среди них не более одного туза?

6. В урне содержатся 4 черных и 7 белых шаров. Случайным образом вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них имеется: *а*) 2 белых шара; *б*) меньше, чем 2, белых шаров; *в*) хотя бы один белый шар.

7. На окружности радиуса R наудачу взяты две точки. Какова вероятность того, что эти точки и центр окружности образуют остроугольный треугольник.

8. Наудачу выбираются два числа *x* и *y* такие, что $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Найти вероятность того, что $\max(x, y) > \frac{1}{2}$

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв: «р», «й». Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен.

10. Два стрелка A и B по очереди стреляют а одну мишень. Вероятность, попадания при каждом выстреле равна $0{,}25$. Каждый стрелок имеет право произвести два выстрела, однако стрельба прекращается, когда кто-нибудь из них попадет в мишень. Определить вероятность поражения мишени каждым стрелком в отдельности.

11. При конвейерной сборке точного механизма рабочий должен установить в него определенную деталь. Деталь эту в некоторых случаях приходится подгонять путем дополнительной обработки и пробных установок ее в механизм. Всего таких установок производится не более пяти. Вероятность того, что деталь будет установлена без подгонки с первой пробы, равна 0,38, а подготовкой при второй пробе - $0{,}26$, при третьей пробе - $0{,}20$, при четвертой - $0{,}14$, при пятой - 0,02. Какова вероятность того, что для подгонки этой детали потребуется: а) более двух проб; б) нечетное число проб.

12. Производится бомбометание в 3 склада. Сбрасывается одна бомба. Вероятность попадания в первый склад 0,01; во второй- 0,008; в третий- 0,025. Попадание в один из них взрывает все склады. Какова вероятность того, что все склады будут взорваны?

Вариант 13

1.Из колоды карт вынимают две карты. Событие A- хотя бы одна карта черной масти; B- обе карты черной масти. Что означают события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$?

2. В соревновании по гимнастике участвуют 10 человек практически одинаковых по степени мастерства. Трое судей должны независимо друг от друга перенумеровать их в порядке, отражающих их успехи в соревновании, по мнению судей. Победителем считается тот, кого назовут первым хотя бы двое судей. В какой доле всех возможных случаев победитель будет определен?

3. На прилавке лежат 10 кочанов капусты, 4 среди них не стандартные. Найти вероятность того, что среди трех отобранных продавцов кочанов будет хотя бы 1 нестандартный.

4. В партии, состоящей из 40 одинаково упакованных изделий, смешаны изделия двух сортов, причем 25 из этих изделий – первого сорта, а остальные изделия – второго сорта. Найти вероятность того, что взятые наугад два изделия окажутся разных сортов.

5. Ребенок играет с десятью буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово "математика"?

6. В урне 33 шара, из них 13 белых и 10 красных, остальные - зеленые. Из нее наугад вынимают три шара. Определить какой состав шаров по цвету извлечь наиболее вероятно: а) два шара белых, один зеленый; б) все три шара разного цвета.

7. В квадрате *ABCD* со стороной *a* наудачу взята точка *S*. Какова вероятность того, что треугольник *SAB* – тупоугольный.

8. Из отрезка [0,4] случайным образом выбирают две точки: *A* и *B*. Найти вероятность того, что расстояние между ними больше единицы.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв. Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен. «а», «ф»

10. В первом ящике 6 шаров: один белый, два красных, три синих. Во втором - 12: два белых, шесть красных, четыре синих. Из каждого ящика выбирается по одному шару. Какова вероятность, что среди них нет синих?

11. Многолетними наблюдениями в данном районе установлено, что статистическая вероятность сентябрьскому дню оказаться дождливым равна 1/3. Совхоз должен в течение трех дней сентября выполнить определенную работу. Чему равна вероятность того, что ни один из этих дней не будет дождливым?

12. В урне 2 белых и 3 черных шара. Два игрока поочередно вынимает из урны по шару, не вкладывая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше получит белый шар. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.

Вариант 14

1..Рабочий берет три детали из ящика. Событие A- хотя бы одна из 3-х деталей бракованная; B- не менее двух из 3-х бракованные. Что означают события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$?

2. В урне лежат 10 жетонов с числами 1,2,3, …, 10. Из нее, не выбирая, вынимают 3 жетона. Во скольких случаях сумма написанных на них чисел не менее 9?

3. В мастерскую для ремонта поступило 15 телевизоров. Известно, что 6 из них нуждаются в общей регулировке. Мастер берет первые попавшиеся 5 телевизоров. Какова вероятность, что 2 из них нуждаются в общей настройке?

4. Имеются 2 урны: в первой – a белых и b черных шаров; во второй – c белых и d черных. Из каждой урны вынимают по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

5. Чему равна вероятность того, что дни рождения трех человек придутся на разные месяцы: июнь, июль, август? Вероятности попадания дня рождения на данный месяц считаются равными для всех месяцев года.

6. Бросаются 2 игральные кости. Определить вероятность того, что: *а*) сумма числа очков не превосходит 9; *б*) произведение числа очков превосходит 9; *в*) произведение числа очков делится на 9; *г*) произведение числа очков делится на 11.

7. Из квадрата случайным образом выбирается точка. Какова вероятность того, что она удалена от вершин квадрата на расстояние не меньшее половины длины стороны квадрата?

8. На отрезке [-1;2] наудачу взяты два числа. Найти вероятность того, что их сумма больше единицы, а произведение меньше единицы.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв: «з», «х». Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен.

10. Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна $0,7$, второй – $0,4$, третий – $0,4$, четвертый – $0,3$. Найти вероятность того, что в течение часа: *а*) ни один станок не потребует внимания рабочего; *б*) хотя бы один станок потребует внимания рабочего; *в*) только один станок потребует внимания рабочего.

11. Четыре охотника договорились стрелять по дичи в определенной последовательности: следующий охотник производит выстрел лишь в случае промаха предыдущего. Вероятности попадания в цель каждым из охотников равны по $0,8$. Найти вероятность того, что будет произведено: *а*) один выстрел; *б*) два выстрела; *в*) три выстрела; *г*) четыре выстрела.

12. Рабочий у конвейера при сборке механизма устанавливает в него две одинаковые детали. Берет он их случайным образом из имеющихся у него 10 штук, среди которых находятся 2 шт. уменьшенного размера. Механизм не будет работать, если обе установленные детали окажутся уменьшенного размера. Определить вероятность того, что механизм будет работать.

Вариант 15

1.Рабочий обслуживает три автоматических станка. События: A - 1-й станок потребует внимания в течение часа, B - 2-й потребует внимания в течение часа, C - 3-й потребует внимания в течение часа. Что означают события: $A\cup B\cup C$, $A\cap B\cap C$, и $B=\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)$?

2. Человек имеет 6 друзей и в течении 20 дней приглашает к себе 3 из них так, что компания ни разу не повторяется. Сколькими способами может он это сделать?

3. В классе 12 мальчиков и 18 девочек. Нужно выбрать делегацию из трех человек. Какова вероятность того (если считать выбор случайным), что выбраны две девочки и один мальчик.

4. Гардеробщица одновременно выдала номерки пяти лицам, сдавшим в гардероб свои шляпы, и повесила их наугад. Найти вероятность того, что она каждому выдаст свою шляпу.

5. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которые по жребию распределяются на две группы по 10 человек. Найти вероятность того, что 4 наиболее сильных шахматиста попадут по два в разные группы.

6. В коробке лежат 30 электрических лампочек одинаковой величины и формы, причем 12 из них рассчитаны на напряжение 220 Вт, а остальные – на 127 Вт. Какова вероятность того, что из 4-ех наудачу взятых электроламп: *а*) все окажутся с напряжением 220 Вт, *б*) все окажутся с напряжением 127 Вт, *в*) хотя бы одна электролампа окажется с напряжением 220 Вт.

7. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной 3 см наудачу бросают монету радиуса 1 см. Найти вероятность того, что монета не пересчет ни одной из сторон квадрата

8. Из промежутка [0; 3] наугад выбирается два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше 2?

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв. Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен. «т», «и»

10. Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8 , а после каждого выстрела уменьшается на $0,1$. Найти вероятность того, что он: *а*) попадет хотя бы раз; *б*) промахнется все три раза; *в*) попадет два раза.

11. Три охотника попадают в летящую утку с вероятностями 2/3, 3/4 и 1/4. Все одновременно стреляют по пролетающей утке. Какова вероятность того, что утка будет подбита?

12. Вероятность установления в данной местности устойчивого снежного покрова в октябре равна 0,1. Определить вероятность того. что в ближайшие три года в этой местности устойчивый снежный покров в октябре: *а*) не установится ни разу; *б*) установится хотя бы раз; *в*) установится один и только один раз.

Вариант 16

1.Два баскетболиста по очереди бросают мяч в корзину до первого попадания. Выиграет тот, кто первый попадет. События: A_k – первый попадает на k -м броске, B_j - второй попадает на j -м броске, B – выиграет второй. Записать событие B через A_k и B_j.

2. Имеется 4 различных флага. На флагштоке поднимается сигнал, состоящие не менее чем из двух флагов. Сколько различных сигналов можно поднять на флагштоке (порядок флагов учитывается)?

3. В ящике имеется 20 деталей, из которых 15 окрашенных. Наудачу извлечены 4 детали. Найти вероятность того, что извлечённые детали окажутся окрашенными. (15 рублей)

4. В группе из 22 человек назначается двое дежурных. Какова вероятность, что из троих друзей в этой группе дежурным назначат ровно одного?

5. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из букв О, Т, М, Р, О, С. Карточки тщательно перемешивают. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной (наугад) и расположенных в одну линию карточках можно прочесть слово "ТРОС".

6. В урне находятся 5 красных, 4 синих и 3 белых шара. Наудачу вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что это будут: *а*) синие шары; *б*) два красных и один синий шар; *в*) разноцветные шары.

7. Из равностороннего треугольника случайным образом выбирается точка. Какова вероятность того, что эта точка внутри вписанной окружности?

8. Внутри квадрата с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) наудачу выбирается точка с координатами (*x*,*y*). Какова вероятность того, что $\min(x,y)<0.5$?

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв: «и», «щ». Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен.

10. Из цифр $1,2,3,4,5$ выбирается наудачу сначала одна цифра, а затем из остальных - вторая. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: *а*) первый раз; *б*) второй раз; *в*) оба раза.

11. В цехе *n* моторов, включающихся и выключающихся независимо друг от друга. Вероятность того, что в данный момент мотор окажется выключенным, для всех моторов одинакова и равна $0,1$. Определить:1) вероятность того, что в данный момент окажется выключенным хотя бы один мотор ($n=10$); 2) при каком количестве (*n*) моторов в цехе вероятность того, что в данный момент окажется выключенным хотя бы один мотор, будет не более $0,5$.

12. Две электрические лампочки включены в цепь последовательно. Определить вероятность того, что при повышении напряжения в сети выше номинального произойдет разрыв цепи, если вероятность того, что лампочка перегорит, для обеих лампочек одинакова и в этих условиях равна 0,4.

Вариант 17

1.Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. События: A – студент знает 1-й, вопрос, B – 2-ой, C – 3-й, D – студент сдал экзамен. Студент сдает экзамен, если он знает 1-й вопрос и хотя бы один из оставшихся двух. Выразить D через $A,\ B,\ C$.

2. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа? Сколько среди них будет правильных дробей?

3. Из колоды в 52 карты наугад вынимают 3 карты. Найти вероятность того, что среди них окажутся 2 дамы.

4. В группе 2 человека сдали экзамен на «5», 6 человек – на «4», 12 – на «3», 3 – на «2». Найти вероятность того, что случайно взятый человек сдал экзамен на «4» или «5».

5. Колода карт (52 карты) произвольным образом делится пополам. Найти вероятность того, что в каждой половине будет по 2 туза.

6. Из 19 билетов выигрышными являются два. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов;

а) один выигрышный; *б*) два выигрышных; *в*) хотя бы один выигрышный.

7. На окружности единичного радиуса с центром в начале координат наудачу выбирается точка. Найти вероятность того, что проекция точки на ось абсцисс находится на расстоянии от цента, не превышающем 0.5.

8. Внутри квадрата с вершинами (0,0), (1,0), (1,1) и (0,1) наудачу выбирается точка с координатами (*x*,*y*). Найти вероятность события $A=\left\{x^2<y<\sqrt{x}\right\}$.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв: «й», «к». Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен.

10. Пусть вероятность того, что покупателю женской обуви понадобится 37-й размер, равна $0{,}25$. Найти вероятность того, что из трех первых покупателей обувь этого размера: *а*) никому не потребуется; *б*) потребуется хотя бы одному.

11. Вероятность для данного спортсмена улучшить свой предыдущий результат с одной попытки равна р. Определить вероятность того, что на соревнованиях спортсмен улучшит свой результат, если разрешается делать две попытки.

12. Определить вероятность того, что выбранное наудачу изделие является первосортным, если известно, что 4 % всей продукции являются браком, а 75 % не бракованных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта.

Вариант 18

1.Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие A - выбранное число делится на 2; событие B - это число оканчивается нулем. Что означают события: $A\cap B,\ A\cup B,\ A\cap\overline{B},\ \overline{A}\cap B,\ A\cup\overline{B}$?

2. Сколько пятибуквенных слов, оканчивающихся на "ть" можно составить из слова "крепость"

3. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. Наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.

4. На склад привезли 50 упаковок комплектующих изделий для одного из видов ЭВМ, но среди них оказалось четыре упаковки комплектующих для другого вида ЭВМ. Наудачу взяли шесть упаковок. Найти вероятность того, что в одной из этих шести упаковок окажутся некомплектные детали.

5. В партии, состоящей из 50 изделий, имеется 4 бракованных. Наудачу выбирается 5 изделий из этой партии. Найти вероятность того, что среди них окажется 2 бракованных изделия.

6. Из 6 букв м, а, ш, и, н, а выбирают одну за другой и подставляют в порядке выбора 4 буквы. Найти вероятность того, что при этом получится слово: *а*) шина, *б*) маша.

7. На отрезок *AB* длиной 12 см наудачу ставится точка *M*. Найти вероятность того, что площадь прямоугольника со сторонами *AM* и *MB* больше $27\,\text{см}^2$.

8. Компьютер сгенерировал два числа из промежутка [-1; 2]. Какова вероятность, что их сумма больше 1, а произведение меньше 1?

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв: «р», «ъ». Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен.

10. В семье трое детей. Принимают события, состоящие в рождении мальчика и девочки, равно вероятными. Найти вероятность того, что в этой семье: *а*) все мальчики; *б*) все дети одного пола

11. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7; а вторым – 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень.

12. Три стрелка стреляют в одну мишень. Известно, что вероятность попадания в цель у первого стрелка равна 0,8; у второго- 0,7; у третьего- 0,6. Найти вероятность попадания мишени: *а*) одной пробойки в результате одновременного выстрела всех трех стрелков; *б*) хотя бы одной пробоины при тех же условиях.

Вариант 19

1.Из ящика, содержащего бракованные и доброкачественные детали, наудачу последовательно и без возвращения извлекаются по одной детали до появления бракованной. События: A–появление бракованной детали при k -м извлечении; B – производится пять по счету извлечений. Записать B через A_k .

2. Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

3. Бросаются 3 игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 10.

4. В партии из 15 однотипных деталей пять деталей изготовлено на заводе *А*, а 10 – на заводе *В*. Случайным образом отобрано 5 деталей. Найти вероятность того, что две из них изготовлено на заводе *А*.

5. Ящик содержит 10 деталей, среди которых две нестандартные. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных шести деталях окажется не более одной нестандартной детали.

6. К экзамену приготовлено 24 одинаковые ручки. Известно, что треть из них имеет фиолетовый стержень, остальные – синий стержень. Случайным образом отбирают три ручки. Вычислить вероятность того, что:

а) все ручки имеют фиолетовый стержень; б) только одна ручка имеет фиолетовый стержень.

7. На отрезке *ОА* длины 21 см наудачу бросается точка *В*. Найти вероятность того, что меньший из отрезков *ОВ* и *ВА* имеет длину, большую, чем 7 см.

8. Наудачу выбираются два числа *x* и *y* такие, что 0 < *x* < 1, 0 < *y* <1. Найти вероятность того, что $\max(x, y) > 1/3$.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв: «ч», «б». Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен.

10. Разрыв электрической цепи происходит в том случае, когда выходит из строя хотя бы один из трех последовательно соединенных элементов. Определить вероятность того, что не будет разрыва цепи, если элементы выходят из строя, соответственно, с вероятностями: 0,3; 0,4 и 0,6. Как изменится искомая вероятность, если известно, что первый элемент не вышел из строя?

11. Рабочий обслуживает четыре станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,9; для второго-0,8; для третьего - 0,7; для четвертого - 0,9. Вычислить вероятность того, что в течение часа: *а*) по крайней мере, один из станков не потребует внимания рабочего; *б*) только один станок потребует внимания рабочего.

12. Два стрелка поочерёдно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого игрока равна 0.2, а для второго 0.3. Найти вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй.

Вариант 20

1.События: A – из 4-х проверяемых электролампочек все дефектные, B – все доброкачественные. Что означают события: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$?

2. В почтовом отделении продаются открытки десяти видов в неограниченном количестве. Сколькими способами можно купить 12 открыток?

3. Владелец одной карточки лотереи «Спорт лото» (6 из 49) зачеркивает 6 номеров. Какова вероятность того, что им будет угадано 5 номеров в тираже?

4. В партии из 10 деталей имеется 6 стандартных. Наудачу отобраны 9 деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей 5 стандартных.

5. В партии из 80 банок консервов оказалось 6 бракованных. Какова вероятность того, что две подряд взятые банки окажутся бракованными?

6. На складе университета хранится 28 одинаковых упаковок писчей бумаги. Известно, что в четырех из них содержится бумага более низкого качества. Случайным образом выбирают три упаковки бумаги. Вычислить вероятность того, что среди них: *а*) нет упаковок с бумагой более низкого качества; *б*) есть одна упаковка такой бумаги.

7. Из прямоугольного треугольника с острым углом 30º случайным образом выбирается точка. Какова вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанной окружности?

8. Какова вероятность того, что сумма длин двух наудачу взятых отрезков, длина каждого из которых не превосходит 1, будет больше 1?

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв: «й», «п». Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен.

10. Из изделий, выпускаемых предприятием, 3 % бракованных. Какова вероятность того, что из трех наугад выбранных изделий: *а*) все окажутся качественными; *б*) все окажутся бракованными; *в*) только одно окажется качественным; *г*)хотя бы одно окажется качественным

11. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на три зоны. Вероятность попадания в первую зону равна 0,45; во вторую – 0,30; в третью – 0,15. Найти вероятность попадания в мишень.

12. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятность выигрыша для каждого из игроков.

Вариант 21

1.В урне черные и белые шары. Взяли два шара. Событие A- хотя бы один из двух шаров черный, B - оба шара черные. Что означают события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$?

2. Для премии на математической олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, 2 экземпляра другой и 1 экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 20 человек, и никому не дают двух экземпляров одной и той же книги, но могут быть вручены 2 или 3 различные книги?

3. На 30 одинаковых жетонах написаны 30 двухзначных чисел от 11 до 40 . Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешены. Какова вероятность вытянуть жетон с номером, кратным 3 или 2?

4. В урне 7 белых и 4 черных шара. Из урны наугад извлекают 3 шара. Найти вероятность того, что все шары будут черными.

5. На девяти карточках написаны цифры 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Две из них вынимают наугад и кладут на стол в порядке появления, затем читается полученное число. Найти вероятность того, что это число четное.

6. Из десяти первых букв русского алфавита: а, б, в, г, д, е, ж, з, и, к наудачу составляется новый алфавит, состоящий из 5 букв. Найти вероятность того что: *а*) *A* – в состав нового алфавита входит буква «а»;

б) *B* – в состав нового алфавита входят только согласные буквы.

7. Внутри правильного треугольника выбирается точка случайным образом. Какова вероятность того, что она удалена от вершин треугольника более чем на половину длины стороны?

8. Внутри квадрата с вершинами (0,0), (1,0), (1,1), (0,1) наудачу выбирается точка с координатами (*x*,*y*). Какова вероятность того, что корни уравнения $a^2 + 2ax + y = 0$ действительны

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв: «у», «н». Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен.

10. Процесс изготовления детали состоит из нескольких операций. После первой к второй операций производится контроль качества и при обнаружении брака деталь отбрасывается. Вероятность детали оказаться бракованной после первой операции равна 0,02, а после второй -0,1. Определить вероятность того, что деталь окажется забракованной до третьей операции.

11. В двух ящиках находятся детали. В первом ящике -10 (Из них 8 стандартных), во втором- 15 (из них 12 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

12. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0.875. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

Вариант 22

1.События A - хотя бы один из 3-х проверяемых приборов бракованный, B - все приборы доброкачественные. Что означают события $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{B}$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$?

2. Сколько чисел меньше 100 000 можно написать с помощью цифр 7 и 0?

3. Из полной колоды карт (52 карты) вынимаются наугад сразу три карты. Найти вероятность того, что этими картами будут: тройка, семерка и туз.

4. Какова вероятность того, что четырехзначный номер автомобиля в городе имеет только две одинаковые цифры.

5. Из шести карточек с буквами Л,И,Т,Е,Р,А выбрели наугад четыре и последовательно уложили друг за другом. Найти вероятность того, что при этом получится слово "ТИРЕ.

6. Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что: а) сумма числа очков не превосходит 3;

б) произведение числа очков не превосходит 3; в) произведение числа очков делится на 3.

7. Из круга случайным образом выбирается точка. Какова вероятность того, что она принадлежит вписанному в круг прямоугольному треугольнику острым углом 30^o?

8. Из отрезка [0,4] случайным образом выбирают две точки: *A* и *B*. Найти вероятность того, что расстояние между ними меньше единицы.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв. Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен. «г», «ы»

10. Два стрелка производят в мишень по одному выстрелу. Вероятность попадания одного стрелка, равна 0,7, для второго - 0,8. Найти вероятность того, что попадут в цель : а) оба стрелка; б) только один стрелок; в) ни один стрелок не попадет в мишень.

11. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены потребует внимания первый станок, равна 0,7; второй- 0,75; третий - 0,8. Найти вероятность того, то в течение смены: а) потребуют внимания рабочего какие-либо два станка; б) ни один станок не потребует внимания рабочего.

12. В семье трое детей. Принимая события, соответствующие рождению мальчика и девочки равновероятными, найти вероятность того, что в семье а) все мальчики; б) все дети одного пола; в) дети разного пола.

Вариант 23

1.Рабочий изготовил две детали. Событие A_k (k =1,2) – k -я деталь имеет дефект. Записать через A_k события: A - ни одна из деталей не имеет дефекта, B - хотя бы одна имеет дефект, C - обе детали дефектны.

2. Человек имеет 6 друзей и в течении 20 дней приглашает к себе 3 из них так, что компания ни разу не повторяется. Сколькими способами может он это сделать?

3. На трех карточках написана буква «о», на двух буква «к» и на двух буква «л». Найти вероятность того, что карточки, выложенные в ряд, образуют слово «колокол».

4. В телефонном номере последние три цифры стерлись. Считая, что все возможные значения стершихся цифр равновероятны, найти вероятность события: среди стершихся цифр хотя бы две различны.

5. Библиотека состоит из 15 различных книг, причем 5 книг стоят по 4 рубля, 3 книги - по I рублю, 2 - по 3 рубля и 5 - по 2 рубля. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 рублей.

6. В лифт 14-этажного дома сели 3 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: *а*) все вышли на разных этажах; *б*) по крайней мере, двое сошли на одном этаже.

7. Из равнобедренного прямоугольного треугольника случайным образом выбирается точка. Какова вероятность того, что эта точка попадет внутрь вписанного круга?

8. Значения a и b равновозможны в квадрате $|a| \le 1$, $|b| \le 1$. Найти вероятность того, что корни трехчлена $x^2 + 2ax + b$ - действительны.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв. Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен. «ш», «б»

10. Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,3, второй - 0,4, третий -0,7, четвертый - 0,4, Найти вероятность того, что в течение часа : а) ни один станок не потребует внимания рабочего; б) хотя бы один потребует внимания рабочего.

11. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7; а вторым - 0,8. Стрелки выстрелили одновременно. Какова вероятность того, что произошло одно попадание?

12. Охотник выстрелил 3 раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее для первого выстрела равна 0.8, а после каждого следующего выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что он а) промахнётся все 3 раза; б) попадет хотя бы один раз; в) попадет 2 раза.

Вариант 24

1.Рабочий берет две детали. События: A - хотя бы одна из них бракованная, B - обе бракованные. Что означают события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$?

2. Сколькими способами можно расставить на полке 6 различных книг?

3. Среди 20 одинаковых по виду тетрадей 16 в клетку. Взято 4 тетради. Найти вероятность того, что из них: а) ровно 2 тетради в клетку, б) хотя бы одна тетрадь в клетку.

4. В телефонном номере три последние цифры стерлись. Считая, что все возможные значения стершихся цифр равновероятны, найти вероятность события: среди стершихся цифр хотя бы две совпадают.

5. В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вытянули 2 шара наугад. Какова вероятность того, что оба шара белые?

6. Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что: а) сумма числа очков не превосходит 4; б) произведение числа очков не превосходит 4; в) произведение числа очков делится на 4.

7. Точка *M* случайным образом выбирается из квадрата со стороной 3. Найти вероятность того, что расстояние от точки *M* до любой стороны не превосходит 2.

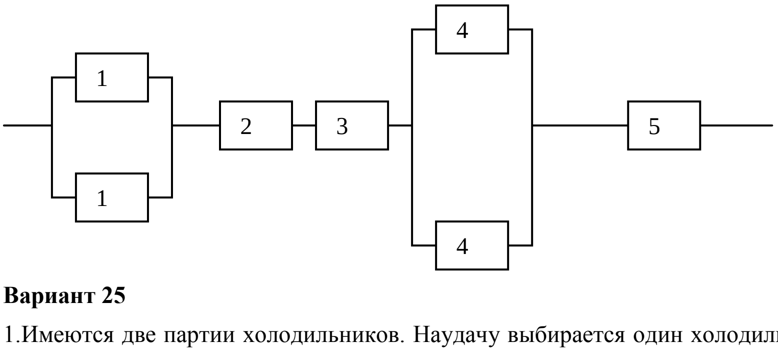
8. Наудачу взяты два положительных числа не больше единицы. Определить вероятность того, что их сумма не меньше 0.5.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв. Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен. «ъ», «л»

10. Каждое из четырех несовместных событий может произойти с вероятностями соответственно: 0,012; 0,010; 0,006 и 0,002. Определить вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих событий.

11. Детали проходят три операции обработки. Вероятность появления брака во время первой операции равна 0,02; второй - 0,03, третьей - 0,02. Найти вероятность выхода стандартной детали.

12. Вычислить надежность системы, показанной на рисунке. Разные элементы выходят из строя независимо друг от друга, вероятность безотказной работы элемента с номером i, т. е. надежность элемента равна p_i. Найти надежность системы.



Вариант 25

1.Имеются две партии холодильников. Наудачу выбирается один холодильник. Событие A - случайно выбранный холодильник из первой партии. Событие B - холодильник из второй партии. Совместные или несовместные события A и B? Что означают события: $A \cap B$, $A \cup B$?

2. Сколькими способами можно выбрать 3 цветка из вазы, в которой стоят 10 красных и 4 розовых гвоздики?

3. В ящике имеются 8 белых и 4 черных шара. Найти вероятность того, что: а) первый вынутый из ящика шар будет белым; б) все вынутые из ящика 3 шара будут черными.

4. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что они четные и различные, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что дозвонится с первой попытки.

5. В лотерее 1000 билетов. Из них 500 выигрышных. Куплено два билета. Какова вероятность того, что оба билета выигрышные?

6. В лифт 13-этажного дома сели 4 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что:

а) все вышли на разных этажах; б) по крайней мере, двое сошли на одном этаже.

7. Из отрезка *AB* длиной 10см случайным образом выбирается точка *M*. Какова вероятность того, что площадь прямоугольного треугольника с катетами *AM* и *MB* меньше 12 см^2?

8. Два теплохода должны подойти к одному и тому же причалу в течение суток. Определить вероятность того, что одному из теплоходов придется ждать освобождения причала, если время стоянки одного теплохода 1 час, другого - 2 часа.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв. Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен. «м», «о»

10. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,8; вторым - 0,7. Найти вероятность того, что хотя бы один из них попал в мишень.

11. Три стрелка стреляют в одну мишень. Известно, что вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,5; для второго -03; для третьего - 0,4. Определить вероятность того, что в результате одновременного выстрела всех трех стрелков в мишени будет; а) одна пробоина; б) не менее одной пробоины.

12. Двое поочередно извлекают шары без возвращения из урны, содержащей 3 белых и 3 чёрных шара. Выигрывает тот, кто первый извлечёт белый шар. Определить вероятность выигрыша каждым из игроков.

Вариант 26

1.В коробке лежат шары одного размера разных цветов: белого, красного, зеленого. Вынимаются два шара подряд. Событие A_i - взятый наудачу шар красного цвета, событие D_i - зеленого, событие C_i - белого цвета (i=1,2,3). Как запишется событие B, состоящее в том, что взятый наудачу второй шар окажется зеленого цвета?

2. Сколькими способами три награды могут быть распределены между 10 участниками соревнования?

3. Устройство состоит из 5 элементов, из которых 2 изношены. При включении устройства включаются случайным образом 2 элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

4. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 8.

5. Семь яблок, три груши и четыре апельсина раскладывают случайным образом в два пакета так, чтобы в каждом пакете было одинаковое количество фруктов. Какова вероятность того, что в каждом пакете было по два апельсина.

6. В 1-ом ящике лежат шары с № 1, 2, 3, 4, 5, во 2-ом с № 6, 7, 8, 9, 10. Из каждого ящика вынули по 1 шару. Какова вероятность того, что сумма № вытянутых шаров

а) не меньше 7; б) равна 4; в) не больше 11.

7. Точка *M* случайным образом выбирается из квадрата со стороной 1. Какова вероятность того, что расстояние от точки *M* до ближайшей к ней стороны не превосходит $1/3$?

8. Из равнобедренного прямоугольного треугольника случайным образом выбирается точка. Какова вероятность того, что эта точка попадет внутрь вписанного круга? Наудачу взяты два положительных числа, каждое не превышает единицы. Определить вероятность того, что их частное не больше трёх.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв. Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен. «м», «ы»

10. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков будет четным.

11. Ящик содержит 10 деталей, среди которых две нестандартные. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных шести деталях окажется не более одной нестандартной детали.

12. Двое поочередно извлекают шары из урны, содержащей 4 белых и 3 черных шара. Выигрывает тот, кто первый извлечет белый шар. Определить вероятность выигрыша каждым из игроков.

Вариант 27

1.Поражение боевого самолёта (событие A) может наступить в результате поражения обоих двигателей (события B_1 и B_2) или после попадания в кабину пилота (событие C). Записать событие A с помощью B_1, B_2, C.

2. Сколькими способами можно выстроить 9 человек разного роста в колонну по 3 человека, если в каждой шеренге люди выстраиваются по росту?

3. Из партии деталей, среди которых 13 доброкачественных и 10 бракованных деталей, для контроля на удачу взято 7 штук. При контроле оказалось, что среди взятых деталей 5 доброкачественных. а) Определить вероятность p_1 того, что следующая восьмая выбранная деталь будет доброкачественной. б) Определить вероятность p_2 того, что эта деталь будет недоброкачественной

4. Из колоды в 36 карт вынимают без возвращения 4 карты. Найти вероятность того, что все карты валеты.

5. На 6 карточках написаны буквы П, Д, Р, Л, Е, Е. После тщательного перемешивания берут по одной карточке и кладут последовательно рядом. Какова вероятность того, что получится слово «ПРЕДЕЛ»?

6. Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что студент знает: а) все три вопроса; б) только два вопроса; в) только один вопрос экзаменационного билета.

7. В круге $x^2 + y^2 < 4$ случайным образом выбрана точка. Какова вероятность того, что координаты точки по абсолютной величине не превышают $\sqrt{3}$?

8. Компьютер случайным образом генерирует число b из промежутка $[-\pi, \pi]$. Какова вероятность того, что $\sin b < \cos b$?

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв. Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен. «о», «д»

10. При штамповке пластмассовых тарелок брак составляет в среднем 2% общего числа изделий, 95% годных изделий составляет продукция первого сорта. Найти вероятность того, что взятая наудачу изготовленная тарелка окажется первого сорта.

11. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет в цель, равна 0,9. Стрелок произвел три выстрела. Найти вероятность того, что три выстрела дали попадание.

12. Двое поочередно бросают два кубика. Выигрывает тот, кто первым выбросит два кубика с суммой очков равной ровно 10. Определить вероятность выигрыша каждым игроком.

Вариант 28

1.Два стрелка делают по мишени по одному выстрелу. Событие A – первый стрелок попадает в цель; событие B - второй стрелок попадает в цель. Что означают события: $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $A \cap \overline{B}$?

2. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «пурпур» так, чтобы одинаковые буквы не шли друг за другом?

3. Из партии деталей, среди которых 13 доброкачественных и 10 бракованных деталей, для контроля на удачу взято 7 штук. При контроле оказалось, что среди взятых деталей 5 доброкачественных. а) Определить вероятность p_1 того, что следующая восьмая выбранная деталь будет доброкачественной. б) Определить вероятность p_2 того, что эта деталь будет недоброкачественной

4. Из букв И, Н, С, Т, И, Т, У, Т разрезной азбуки составляют наудачу слово, состоящее из 8 букв. Найти вероятность того, что получится слово «ИНСТИТУТ».

5. Найти вероятность того, что дни рождения трех подруг придутся на разные месяцы года, попадание на любой месяц года считать равновозможным.

6. Из коробки, содержащей 28 костей домино, извлекают наудачу одну. Описать пространство элементарных событий. Найти вероятности следующих событий: а) А – извлечен дубль; б) В – сумма очков на кости домино кратна трем; в) С – большее из очков кости равно 4; г) Д – произведение очков четно.

7. Из квадрата со стороной $\sqrt{3}$ случайным образом выбирается точка. Найти вероятность того, что она лежит вне круга радиуса **2**, центр которого совпадает с центром квадрата.

8. Два студента договорились встретиться в институте между 8 и 9-ю часами. Каждый приходит и ждет другого не более 10 минут. Определить вероятность того, что встреча состоится после 8 ч. 30мин.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв. Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен. «з», «ж»

10. Из трех орудий произвели залп по цели, вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,8; длл второго и третьего орудий эти вероятности соответственно равны 0,7 и 0,9. Найти вероятность того, что: а) только один снаряд попадет в цель; б) все три снаряда попадут в цель.

11. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает ее наугад. Какова вероятность, что ему придется звонить не более, чем три раза?

12. Пусть вероятность того, что покупатель приобретает в магазине некоторый товар, равна 0,6. Предполагая, что события, состоящие в наличии нужного товара в отдельных магазинах, независимы, найти вероятность того, что он приобретет нужный товар, посетив: а) не более 3 магазинов; б) не более 5 магазинов.

Вариант 29

1.Из таблицы случайных чисел взято одно число. Событие A – выбранное число делится на 2, событие B - выбранное число делится на 4. Что означают события: $A \cap B$, $A \cup B$?

2. Подсчитайте число программ, не обязательно имеющих смысл, состоящих из 5 команд трех типов?

3. В 25 экзаменационных билетах содержатся по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся знает ответы на 45 вопросов. Какова вероятность того, что доставшийся билет состоит из подготовленных им вопросов?

4. В классе 28 студентов, из них 8 человек учатся отлично, 10 – хорошо, 8 – удовлетворительно. Для проверки случайным образом вызваны три студента. Какова вероятность, что это отличники.

5. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайным образом номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из шести цифр, причем все комбинации цифр равновозможные. Найти вероятность того, что номер содержит две цифры 5, две цифры 1 и две цифры 2.

6. В лифт двенадцатиэтажного дома вошли 3 человека. Предположим, что каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что:

а) все 3 пассажира выйдут на одном этаже; б) все пассажиры выйдут на разных этажах.

7. В квадрат со стороной 4 см вписаны 4 соприкасающихся круга с радиусом 1 см. Найти вероятность того, что наудачу брошенная точка не попадет ни в один круг.

8. На отрезке длинной 10 см наудачу поставлены две точки. Найти вероятность того, что длина отрезка между ними окажется меньше, чем 5 см.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв. Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен. «п», «ц»

10. В электрическую цепь последовательно включены приборы A_1и A_2, не взаимодействующие друг с другом. Вероятность выхода из строя прибора A_1 равна 0,1, а прибора A_2 - 0,2. Цепь размыкается, если выйдет из строя хотя бы один прибор. Определить вероятность выхода из строя цепи.

11. Три спортсмена участвуют в отборочных соревнованиях. Вероятности зачисления в сборную команду первого, второго и третьего спортсмена соответственно равны 0,8; 0,7 и 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из этих спортсменов попадет в сборную.

12. Три стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятность попадания в которую для 1-го, 2-го и 3-го стрелков равны 0.5, 0.7 и 0.8 соответственно. Найти вероятность а) хотя бы одного попадания в цель; б) двух попаданий.

Вариант 30

1.Два шахматиста играют одну партию. Событие A – выигрывает первый игрок, B – второй игрок. Какое событие следует добавить к указанной совокупности, чтобы получилась полная группа событий? Что означают события: $A\cup B$, $A\cap B$?

2. Подсчитайте число последовательностей, получаемых перестановками символов в последовательности 013270?

3. В урне 10 белых и 8 черных шаров. Наудачу отобраны 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно 3 белых шара.

4. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, вынимают без возвращения 3 шара. Найти вероятность того, что все шары белые.

5. Ребенок ставит на шахматную доску две ладьи – белую и черную. Какова вероятность того, что ладьи не побьют друг друга?

6. В урне 26 белых шаров и 6 черных шаров. Найти вероятность, что:

а) вытащили белый шар; б) вытащили 2 белых шара; в) вытащили 3 черных шара.

7. Телефонная линия, соединяющая два пункта *A* и *B*, расстояние между которыми равно 7 км, оборвалась в неизвестном месте. Какова вероятность того, что место обрыва удалено от обоих пунктов далее чем на 2,5 км.

8. Наудачу взяты два положительных числа, каждое не превышает двух. Определить вероятность того, что и их сумма не превышает двух.

9. На примере двух любых басен Крылова определить статистические частоты следующих букв. Ответ записать в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби с точностью до одной тысячной. Привести тексты басен. «щ», «з»

10. Производится бомбардирование военного объекта. Вероятность попадания в цель при сбрасывании бомбы равна 0,7, а вероятность того, что бомба не взорвется, равна 0,08. Найти вероятность того, что объект будет разрушен, если будет брошена одна бомба.

11. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность принятия вызова равна 0,2 для первого вызова, 0,3 для второго вызова, 0,4 для третьего вызова. Найти вероятность установления связи, если события, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы.

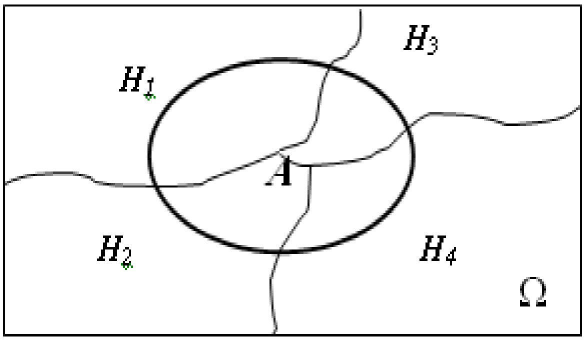
12. Двое поочередно бросают кубик. Выигрывает тот, у которого раньше выпадет «6». Определить вероятность выигрыша для каждого игрока.

2. Независимые измерения

Все формулы этого раздела являются следствием теоремы сложения (ТС) и теоремы умножения (ТУ) вероятностей.

2.2. Полная вероятность, формулы Байеса, их содержание.

Вероятности *событий* $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих *полную группу*, обладают следующими свойствами:



1) $P(H_i) \neq \varnothing$, $i = 1,2,\ldots,n$;

2) $P(H_i \cap H_j) = 0$, так как все события *полной группы* попарно несовместны: $H_i \cap H_j = \varnothing$; $i, j=1,2,...,n$, $i \neq j$;

3) пространство всех элементарных исходов образует их объединение:

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n,$$

тогда , соответственно, по ТС

$$P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1. \qquad (2.1)$$

Пусть событие A может произойти только совместно с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, что имеет место, например, для полной группы событий H_k, k = 1, …, n. В этом случае события $A \cap H_i$, i, = 1, 2, ..., n, будут несовместными событиями, и наступление любого из них совместно наступлением события A. Поэтому A = $AH_1 \cup AH_2 \cup \ldots \cup AH_n$ и для вероятности события A, после учёта формул (1.41) и (1.38) для сложения и умножения вероятностей, получим *формулу*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A), \qquad (2.2)$$

которая называется *формулой полной вероятности*.

События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ в формуле (2.2) называют *гипотезами*, вероятности $P(H_i)$ – *вероятностями гипотез*, а $P_{H_i}(A)$ – *условная вероятность события A при наступлении события* H_i.

Пример 1. В магазине продаются электрочайники производства трех заводов, причем доля первого завода – 30%, второго – 50%, третьего – 20%. Брак в их продукции составляет соответственно 5%, 3% и 2%. Какова вероятность, что случайно выбранный в магазине чайник оказался бракованным?

Решение.

Обозначим события:

A – случайно выбранный в магазине чайник оказался бракованным;

H_1 – чайник произведён 1-м заводом;

H_2 – чайник произведён 2-м заводом;

H_3 – чайник произведён 3-м заводом.

Очевидно, что $H_i \cap H_j = \varnothing$; $i, j=1,2,...,n$, $i \neq j$.

По классическому определению вероятности находим вероятности гипотез:

$$P(H_1) = \frac{30\%}{100\%} = 0{,}3,\ P(H_2) = \frac{50\%}{100\%} = 0{,}5,$$

$$P(H_3) = \frac{20\%}{100\%} = 0{,}2.$$

Обязательно проверим выполнение свойства (2.1):

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}2 = 1.$$

Свойство (2.1) выполнено, и данные гипотезы образуют полную группу событий. Теперь найдем условные вероятности $P_{H_i}(A)$, то есть вероятности того, что чайник бракованный, если он произведен i-м заводом, $i = 1, 2, 3$:

$$P_{H_1}(A) = \frac{5\%}{100\%} = 0{,}05,\ P_{H_2}(A) = \frac{3\%}{100\%} = 0{,}03,$$

$$P_{H_3}(A) = \frac{2\%}{100\%} = 0{,}02.$$

Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности (2.2):

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + P(H_3)\cdot P_{H_3}(A) =$$
$$= 0{,}3\cdot 0{,}05 + 0{,}5\cdot 0{,}03 + 0{,}2\cdot 0{,}02 = 0{,}015 + 0{,}015 + 0{,}004 = 0{,}034.$$

Ответ: 0,034..

Пример 2. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,8. Вероятность поражения цели при k попаданиях равна $(1 - 0{,}3^k)$. Найти вероятность поражения цели, если сделано 2 выстрела.

Решение.

Интересующее нас событие A – цель поражена. Оно может произойти только совместно с одним из событий:

H_1 – одно попадание в 2^x выстрелах;

H_2 – два попадания.

Если B_k – попадание в k-ом выстреле, то

$$P(H_1) = P(B_1\bar{B}_2 + \bar{B}_1 B_2) = 0{,}8\cdot 0{,}2 + 0{,}2\cdot 0{,}8 = 0{,}32.$$

$P(H_2) = P(B_1B_2) = 0{,}8\cdot 0{,}8 = 0{,}64.$

Для гипотезы H_0, нет попаданий: $P(H_1) = P(\bar{B}_1\bar{B}_2) = 0{,}2\cdot 0{,}2 = 0{,}4.$

Проверка: $P(H_0) + P(H_1) + P(H_2) = 0{,}4 + 0{,}32 + 0{,}64 = 1.$

Найдем условные вероятности:

$P(A|H_0) = 0$; $P(A|H_1) = 1 - 0{,}3^1 = 0{,}7$; $P(A|H_2) = 1 - 0{,}3^2 = 0{,}91$.

Поэтому полная вероятность события A равна:

$P(A) = 0 + 0{,}32 \cdot 0{,}7 + 0{,}64 \cdot 0{,}91 = 0{,}8064$.

Ответ: $0{,}8064.$.

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ - полная группа событий и $A \subseteq \Omega$ - некоторое событие. Чтобы узнать вероятность реализации гипотезы H_k при условии, что событие A произошло, необходимо воспользоваться *формулой Байеса (или формулой вероятности гипотез)*:

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)} \tag{2.3}$$

Пример 3. Рассмотрим приведенную в примере 1 задачу об электрочайниках, только изменим вопрос задачи. Пусть покупатель купил электрочайник в том же магазине, и он оказался бракованным. Найти вероятность того, что этот электрочайник изготовлена на втором заводе.

Решение.

Выпишем формулу Байеса для этого случая

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)} = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)}.$$

Подставим в эту формулу вероятности, вычисленные в примере 1 $P(H_2) = 0{,}5$, $P_{H_2}(A) = 0{,}03$, $P(A) = 0{,}034$. Получаем

$$P_A(H_2) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}03}{0{,}034} = \frac{0{,}015}{0{,}034} = \frac{15}{34}.$$

Ответ: $\frac{15}{34}$.

Пример 4. На трех станках-автоматах обрабатываются однотипные детали, поступающие после обработки на общий конвейер. Первый станок дает 2% брака, второй – 7%, третий – 10%. Производительность первого станка в 3 раза больше производительности второго, а третьего – в 2 раза меньше, чем второго.

а) Каков процент брака на конвейере?

б) Каковы доли деталей каждого станка среди бракованных деталей на конвейере?

Решение.

Возьмем с конвейера наудачу одну деталь и рассмотрим событие A – деталь бракованная. Оно связано с гипотезами относительно того, где была обработана эта деталь: H_k – взятая наудачу деталь обработана на k-ом станке, k = 1..3.

Условные вероятности (в условии они даны в форме процентов):

$P(A|H_1) = 0{,}02$; $P(A|H_2) = 0{,}07$; $P(A|H_3) = 0{,}1$.

Зависимости между производительностями станков означают следующее: $P(H_1) = 3P(H_2)$, $P(H_3) = 0{,}5P(H_2)$. А так как гипотезы образуют полную группу, то обязательна проверка: $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$.

Решив полученную систему уравнений, найдем:

$P(H_1) = 6/9$; $P(H_2) = 2/9$; $P(H_3) = 1/9$.

а) Полная вероятность того, что взятая наудачу с конвейера деталь окажется бракованной вычисляется по формуле (2.2):

$$P(A) = 6/9 \cdot 0{,}02 + 2/9 \cdot 0{,}07 + 1/9 \cdot 0{,}1 = 0{,}04.$$

Другими словами, в массе деталей, сходящих с конвейера, брак составляет 4%.

б) Пусть известно, что взятая наудачу деталь – бракованная. Пользуясь формулой Байеса (2.3), найдем условные вероятности гипотез:

$$P(H_1|A) = [6/9 \cdot 0{,}02] \;/\; 0{,}04 = 0{,}33\,;$$

$$P(H_2|A) = [2/9 \cdot 0{,}07] \;/\; 0{,}04 = 0{,}39;$$

$$P(H_3|A) = 1 - P(H_1|A) - P(H_2|A) = 0{,}28.$$

Проверка: $P(H_1|A)+P(H_2|A)+P(H_3|A)=0{,}33+0{,}39+0{,}28=1.$

Таким образом, в общей массе бракованных деталей на конвейере доля первого станка составляет 33%, второго – 39%, третьего – 28%.

Ответ: а) 4%; б) 33%, 39%, 28%.

Пример 5. Из урны, содержащей 10 черных и 5 белых шаров, извлекают один шар и, выяснив его цвет, добавляют в урну k шаров противоположного цвета. Чему равно k, если вероятность извлечь после этого белый шар равна 0,5?

Решение.

Обозначим через A событие, состоящее в том, что шар, извлеченный из урны после изменения её состава, имеет белый цвет. Это событие тесно связано с двумя гипотезами относительно цвета первого извлеченного шара:

H_1 – шар, первоначально извлеченный из урны – черный;

H_2 – шар, первоначально извлеченный из урны – белый;

Вероятности этих гипотез: $P(H_1) = 10/15$; $P(H_2) = 5/15$.

Осуществление гипотезы H_1, означает, что второй шар извлекают из урны, содержащей 9 (= 10 – 1) черных и 5 + k белых шаров, а появление события H_2 приведет к такому составу: 4 (= 5 – 1) белых шара и 10 + k черных. Поэтому, условные вероятности:

$P(A/H_1) = (5 + k)/ (14 + k)$; $P(A/H_2) = 5/(14 + k)$.

По формуле полной вероятности (2.2) вычисляем $P(A)$, которая по условию задачи равна 0,5:

$$P\left(A\right)=\frac{10}{15}\cdot\frac{5+k}{14+k}+\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14+k}=\frac{14+2k}{42+3k}=0.5.$$

Отсюда находим k.

Ответ: $k = 14$.

2.2. Схема Бернулли для независимых событий.

Схемой Бернулли называется последовательность n повторяющихся независимых в совокупности СЭ, которые должны удовлетворять следующим требованиям:

1) число испытаний n должно быть *фиксированным;*

2) в каждом отдельном испытании возможны *только два* взаимоисключающих исхода: A (успех) с вероятностью $p = P(A)$ и $\overline{A}$ (неудача) с вероятностью $q = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p$;

3) вероятность успеха в каждом испытании *постоянна*, и не зависит от номера испытания.

Вероятность $P_n(k)$ того, что в результате n испытаний событие A наступит ровно k раз, вследствие применения ТС (*теорем сложения*) и ТУ (*теорем умножения*) вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad k = 0,1,\ldots,n, \tag{2.4}$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ – число сочетаний из n элементов по k.

Свойства формулы Бернулли:

1) Сумма всех возможных вероятностей в схеме Бернулли по всем $k = 0,1,\ldots,n$ равна единице: $\sum\limits_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$.

2) Вероятность $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ того, что в результате n испытаний событие A наступит от k_1 до k_2 раз, вычисляется по формуле:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \tag{2.5}$$

3) Вероятность $P_n(k \ge 1)$, что в результате n испытаний событие A наступит хотя бы один раз, с учётом $P_n(k \ge 1) + P_n(0) = 1$ вычисляется по формуле:

$$P_n(k \ge 1) = \sum_{k=1}^{n} P_n(k) = 1 - P_n(0) = 1 - C_n^0 \cdot p^0 \cdot q^n = 1 - P\left(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n\right) = 1 - q^n \tag{2.6}$$

Замечание. Некоторые задачи, связанные с повторением испытаний, не требуют для своего решения использования специальных формул, а решаются на основании ТС и ТУ (*теорем сложения и умножения*), как в (2.6).

Пример 6. В продукции некоторого производства брак составляет 10%. Наудачу отбираются семь изделий. Найти вероятности событий:

B – среди отобранных ровно 2 бракованных;

C – не более двух бракованных;

D – хотя бы одно изделие бракованное.

Решение.

Отбор одного изделия – это СЭ (испытание), в котором может появиться событие A – изделие является бракованным, причем $p = P(A) = 0{,}1$. По условию задачи проведено семь таких испытаний. Вероятность события B сразу находим по формуле *Бернулли*:

$$P(B) = P_7(2) = C_7^2 \cdot 0{,}1^2 \cdot (1-0{,}1)^{7-2} = 0{,}124.$$

Для события C можно написать: $C = C_0 + C_1 + C_2$, где C_k – среди отобранных ровно k бракованных. Используя теорему сложения, получим:

$$P(C) = P_7(0) + P_7(1) + P_7(2) = 0{,}9^7 + C_7^1 \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^6 + C_7^2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^5 = 0{,}974$$

Как интерпретировать полученный результат? Будем считать, что изделия укладываются в коробки по 7 штук, причем, если в коробке оказалось не более двух бракованных, то её назовем “хорошей”. Полученный результат для $P(C)$ означает, что 97,4% всех коробок являются “хорошими”.

Для вычисления $P(D)$ нет необходимости применять формулу Бернулли, а достаточно перейти к $\overline{D}$ – все изделия стандартные и применить одну из теорем сложения:

$P(D) = 1 - 0{,}9^7 = 0{,}522.$

Ответ: $P(B) = 0{,}124$; $P(C) = 0{,}974$; $P(D) = 0{,}522$.

Пример 7. Игральный кубик бросают 5 раз. Найти вероятность того, что шестерка выпадет:

а) 3 раза;

б) более 3-х раз;

в) хотя бы один раз.

Решение.

Число независимых испытаний (подбрасываний кубика): $n = 5$.

Два взаимоисключающих события:

A (успех) – при одном подбрасывании кубика выпала шестерка;

$\overline{A}$ (неудача) – при одном подбрасывании не выпала шестерка.

По классическому определению вероятности находим вероятность события A: $p=P(A)=\frac{1}{6}$. Тогда для события $\overline{A}$: $q=P(\overline{A})=1-p=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

а) Искомую вероятность находим по формуле Бернулли (2.4) при $k=3$:

$$P_5(3)=C_5^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{1}{216}\cdot\frac{25}{36}=10\cdot\frac{25}{7776}=\frac{125}{3888}.$$

б) «Шестерка выпала более 3-х раз» значит, она выпала или 4, или 5 раз из пяти. Искомую вероятность находим по формуле (2.5) при $k_1=4$ и $k_2=5$:

$$P_5(4\le k\le 5)=P_5(4)+P_5(5)=C_5^4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1+C_5^5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0=$$

$$=5\cdot\frac{1}{1296}\cdot\frac{5}{6}+1\cdot\frac{1}{7776}\cdot 1=\frac{25}{7776}+\frac{1}{7776}=\frac{26}{7776}=\frac{13}{3888}.$$

в) «Шестерка выпала хотя бы один раз» значит, что она выпала или 1, или 2, или 3, или 4, или 5 раз из 5-ти (т.е. ≥ 1 раза). Очевидно, данное событие является противополож6ным к событию «шестерка выпала 0 раз». Значит, искомую вероятность найдем по формуле (2.6):

$$P_5(k\ge 1)=1-P_5(0)=1-C_5^0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5=1-\frac{3125}{7776}=\frac{4651}{7776}.$$

Ответ: а) $\frac{125}{3888}$; б) $\frac{13}{3888}$; в) $\frac{4651}{7776}$.

Наивероятнейшее число наступления события A (*«успехов»*) k_0 в схеме Бернулли находится из формулы:

$$np-q\le k_0\le np+p \tag{2.7}$$

Иначе: наиболее вероятное число k_0 появлений события A в n испытаниях, когда в каждом испытании $P(A)=p$, равно целой части числа $p\cdot(n+1)$.

Если $p\cdot(n+1)$ нецелое число, то существует одно наивероятнейшее число «успехов» k_0 такое, что:

$$P_n(k_0)=\max_{k=\overline{0,n}}P_n(k).$$

Если $p\cdot(n+1)$ – целое, то существует два наивероятнейших числа «успехов» $k_0^{(1)}$ и $k_0^{(2)}=k_0^{(1)}+1$ такие, что:

$$P_n(k_0^{(1)})=P_n(k_0^{(2)})=\max_{k=\overline{0,n}}P_n(k).$$

Пример 8. Найти наивероятнейшее число попаданий в мишень при n выстрелах, когда вероятность попадания при одном выстреле равна $0{,}8$, для: а) $n=10$; б) $n=9$. Вычислить для них и соответствующие вероятности.

Решение.

а) $n=10$; $p=0{,}8$; $q=1-p=1-0{,}8=0{,}2$.

Для нахождения k_0 воспользуемся неравенством (2.7):

$10\cdot 0{,}8-0{,}2\le k_0\le 10\cdot 0{,}8+0{,}8$;

$7{,}8\le k_0\le 8{,}8$.

Так как k_0 – целая часть числа 8,8, то $k_0=8$ – наивероятнейшее число попаданий в мишень.

Соответствующую вероятность ищем по формуле (2.4):

$$P_{10}(8)=\max_{k=\overline{0,10}} P_{10}(k)=C_{10}^{8}\cdot 0{,}8^{8}\cdot 0{,}2^{2}\approx 0{,}302.$$

б) $n=9$; $p=0{,}8$; $q=1-p=1-0{,}8=0{,}2$.

Для нахождения k_0 воспользуемся неравенством (2.7):

$9\cdot 0{,}8-0{,}2\le k_0\le 9\cdot 0{,}8+0{,}8$;

$7\le k_0\le 8$.

Так как $p\cdot(n+1)=8$ – целое число, то имеем два решения $k_0^{(1)}=7$ и $k_0^{(2)}=8$, т.е. существуют два наивероятнейших числа попаданий в мишень.

Соответствующие вероятности находим по формуле (2.4):

$$P_9(7)=C_9^7\cdot 0{,}8^7\cdot 0{,}2^2=P_9(8)=C_9^8\cdot 0{,}8^8\cdot 0{,}2^1=\max_{k=\overline{0,9}} P_9(k)\approx 0{,}302$$

Ответ: а) $k_0=8$, $P_{10}(8)\approx 0{,}302$; б) $k_0^{(1)}=7$, $k_0^{(2)}=8$, $P_9(7)=P_9(8)\approx 0{,}302$.

Обобщение формулы Бернулли. Пусть в каждом из независимых испытаний может появиться одно из m несовместных событий A_i с $P(A_i)=p_i$ во всех испытаниях, и для всех несовместных событий A_i верно $\sum_{i=1}^{m} p_i=1$. Тогда вероятность $P_n(k_1,k_2,...,k_m)$ того, что в n испытаниях событие A_i произойдет k_i раз, $i=1...m$, $\sum_{i=1}^{m} k_i=n$, определяется полиномиальной формулой:

$$P_n(k_1,k_2,...,k_m)=\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}\,p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{k_m}. \tag{2.8}$$

Пример 9. В каждом выстреле стрелок наверняка попадает в мишень, состоящую из четырех перенумерованных частей, причем вероятность попасть в каждую часть пропорциональна ее номеру. Найти вероятность того, что в пяти выстрелах стрелок 1 раз попадет в первую часть и по два раза в третью и четвертую.

Решение.

Каждый выстрел – это СЭ, в котором может произойти одно из четырех событий: A_k – стрелок попал в часть мишени с номером k, k = 1, 2, 3, 4. По условию $P(A_k) = p_k = x{\cdot}k$ и $\sum_{k=1}^{4} p_k = 1$. Для коэффициента x имеем: $x + 2x + 3x + 4x = 1$. Откуда $x = 0.1$ и соответственно: $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,2$; $p_3 = 0,3$; $p_4 = 0,4$.

Искомая вероятность того, что в пяти испытаниях событие A_1 произошло 1 раз, A_2 – ни разу, A_3 и A_4 – по 2 раза, вычисляется по полиномиальной формуле (2.8) $P_5(1, 0, 2, 2)$. для данного примера следует из ТУ для пяти независимых и ТС для $\dfrac{5!}{1!0!2!2!}$ несовместных событий. В результате получаем:

$$P_5(1,0,2,2) = \frac{5!}{1!0!2!2!} \cdot 0,1^1 \cdot 0,2^0 \cdot 0,3^2 \cdot 0,4^2 = 0,0432.$$

Ответ: $P_5(1,0,2,2) = 0,0432.$

Обобщение формулы Бернулли (*другое*). В случае, когда вероятность того же события A в m-ом испытании, p_m, $m = 1, 2,..., n$, зависит от его номера, вероятность появления события A ровно k раз в n испытаниях, $P_{\text{n}}(k)$, равна коэффициенту при z^k в разложении производящей функции:

$$G(z) = \prod_{m=1}^{n} (p_m z + q_m) = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) \cdot z^k \,, \qquad (2.8')$$

где $q_m = 1 - p_m$.

Пример 10. Имеется n перенумерованных урн, в каждой из которых n шаров, причем в k -ой урне ровно k черных и n–k белых, $k = 1, 2,..., n$. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару. Найти вероятность $P_n(k)$ того, что среди n извлеченных шаров ровно k черных? Рассмотреть частный случай, когда $n = 4$, $k = 3$.

Решение.

Извлечение шара из урны – это СЭ (испытание), в котором может появиться интересующее нас событие A – шар черный. Однако вероятность события зависит от номера испытания: для k-ой урны: $P(A) = p_k = \dfrac{k}{n}$, $q_k = \dfrac{n-k}{n} = P(\bar{A})$, $k = 1, 2,..., n$.

Составляем производящую функцию:

$$G(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} z + \frac{n-k}{n} \right).$$

Искомая вероятность $P_n(k)$ есть коэффициент при z^k в разложении этой функции:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) \cdot z^k.$$

Коэффициенты $P_n(k)$ производящей функции $G(z)$ можно найти k кратным её дифференцированием:

$$P_n(k) = \frac{1}{k!} G_z^{(k)}(0).$$

В частном случае имеем:

$$G(z) = \left(\frac{1}{4}z + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{4}z + \frac{2}{4}\right)\left(\frac{3}{4}z + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{4}z + \frac{0}{4}\right).$$

Искомая вероятность – это коэффициент при z^3:

$$P_4(3) = \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{4}{4} = \frac{13}{32}.$$

Ответ: 13/32.

2.3. Предельные теоремы в схеме Бернулли (*повторение опытов при большом N*)

Вычисления по формуле Бернулли (2.4) при больших значениях n становятся громоздкими и не точными. Естественно возникает вопрос: нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается, можно. Формула Пуассона и теоремы Муавра – Лапласа дают асимптотические формулы, которые позволяют приближённо найти вероятность появления события ровно k раз в n независимых испытаниях.

2.3.1.Формула Пуассона.

Теорема Пуассона. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, но мала, число независимых испытаний n достаточно велико, но произведение $np = \lambda \le 10$, то вероятность $P_n(k)$ того, что в этих испытаниях событие A наступит k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}. \qquad (2.9)$$

Формула (2.9) называется *формулой Пуассона*. Для упрощения расчетов, связанных с её применением, составлена таблица значений функции Пуассона $\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$ для значений $\lambda = 0{,}1;\ 0{,}2;\ ...;\ 0{,}9;\ 1;\ 2;\ 3;\ldots;\ 10$ (приложение 1).

Пример 11. Имеется АТС, которая обслуживает 1000 абонентов. Для каждого их них вероятность воспользоваться услугами АТС в течение одной минуты равна 0,003. Для выбранной наудачу минуты найти вероятности событий:

а) B – поступило ровно 5 вызовов на АТС;

б) C – поступило не более двух вызовов;

в) D – поступил хотя бы один вызов.

Решение :

Поведение абонента в течении одной минуты – это испытание, событие A – абонент воспользовался услугами АТС, $p(A)$ = 0,003. Проверим условие в теореме Пуассона: $np = 3 \le 10$, следовательно, можем использовать формулу (2.9), причем λ = 3:

$$а)P(B) = P(1000;\ 5) \approx \frac{3^5}{5!}e^{-3} = 0{,}101;$$

$$б)P(C) = P(1000;\ 0) + P(1000;\ 1) + P(1000;\ 2) \approx (1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!}) \cdot e^{-3} = 0{,}423.$$

$$в)P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P(1000;\ 0) \approx 1 - e^{-3} = 0{,}95.$$

Ответ: а) 0,101; б) 0,423; в) 0,95.

Пример 12. Пусть вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,004. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей окажется:

а) 5 нестандартных;

б) не более 5-ти нестандартных.

Решение.

Здесь $n = 1000$, $p = 0{,}004$, а $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4 \le 10$.

Все три числа удовлетворяют условиям теоремы Пуассона, а поэтому для нахождения искомой вероятности применяем формулу (2.9).

а) По таблице значений функции Пуассона (приложение 1) при $\lambda = 4$ и $k = 5$ находим:

$$P_{1000}(5) \approx \frac{4^5}{5!} \cdot e^{-4} \approx 0{,}1563.$$

б) Не более 5-ти, значит, нестандартных оказалось 0, или 1, или 2, или 3, или 4, или 5 деталей. По таблице значений функции Пуассона (см. приложение 1) находим вероятности $P_{1000}(k)$ при $k = \overline{0,5}$ и вычисляем их сумму:

$$P_{1000}(0 \le k \le 5) = \sum_{k=0}^{5} P_{1000}(k) \approx \sum_{k=0}^{5} \frac{4^k}{k!} \cdot e^{-4} =$$
$$= 0{,}0183 + 0{,}0733 + 0{,}1465 + 0{,}1954 + 0{,}1954 +$$
$$+ 0{,}1563 = 0{,}7852.$$

Ответ: а) 0,1563; б) 0,7852.

2.3.2. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа.

Локальная теорема Муавра – Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, а число независимых испытаний n достаточно велико, так что $np \ge 30$, то вероятность $P_n(k)$ того, что в этих испытаниях событие A наступит ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{2.10}$$

где функция $\varphi(x)$ определяется равенством

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{2.11}$$

Формула (2.10) называется *локальной формулой Муавра - Лапласа*. Для упрощения расчетов, связанных с применением формулы (2.10), составлена таблица значений функции $\varphi(x)$ (приложение 2). Пользуясь этой таблицей, необходимо знать свойства функции $\varphi(x)$, а именно:

1. Функция $\varphi(x)$ является четной, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.
2. Функция $\varphi(x)$ - монотонно убывающая при $x > 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$.
3. Если $x > 4$, то можно считать, что $\varphi(x) \approx 0$, т. к. уже при $x = 4$ $\varphi(x)$ очень мала: $\varphi(4) \approx 0.0001$

Интегральная теорема Муавра – Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, а число независимых испытаний n достаточно велико, то вероятность $P_n(k)$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит от k_1 до k_2 раз, приближенно равна

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{2.12}$$

где функция $\Phi(x)$ определяется равенством:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_0^x \varphi(t) \cdot dt. \tag{2.13}$$

Формула (2.12) называется *интегральной формулой Муавра- Лапласа*. Функция $\Phi(x)$, которая определяется равенством (2.13), табулирована (приложение 2). Чтобы успешно пользоваться этой таблицей, необходимо знать следующие свойства функции $\Phi(x)$:

1. $\Phi(x)$ - нечетная функция: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

2. $\Phi(x)$ - монотонно возрастающая функция.

3. $\Phi(0) = 0$.

4. Для всех значений $x > 5$ полагают, что $\Phi(x) \approx 0.5$, т. к. $\Phi(5) \approx 0.49999$.

Пример 13. Компания, предоставляющая услуги Интернет обслуживает 4900 пользователей. Каждый из них может находиться в сети с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что одновременно в Интернете будут находиться:

а) ровно 3950 пользователей,

б) от 390О до 4100 пользователей.

Решение.

Для данного условия

$n = 4900$, $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

а) $\lambda = n \cdot p = 4900 \cdot 0{,}8 = 3920 > 10$

Данные числа удовлетворяют условиям локальной теоремы Муавра-Лапласа, значит, используем формулу Муавра-Лапласа (2.10) при $k = 3950$:

$$P_{4900}(3950) \approx \frac{1}{\sqrt{4900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \cdot \varphi\left(\frac{3950 - 4900 \cdot 0{,}8}{\sqrt{4900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{28} \cdot \varphi\left(\frac{30}{28}\right) = \frac{1}{28} \cdot \varphi(1{,}07) \approx \frac{1}{28} \cdot 0{,}2251 \approx 0{,}008.$$

Значения $\varphi(1{,}07) = 0{,}2251$ нашли по таблице значений функции $\varphi(x)$ (приложение 2).

б) Воспользуемся интегральной формулой Муавра-Лапласа (2.12) при $k_1 = 3900$ и $k_2 = 4100$:

$$P_{4900}(3900 \le k \le 4100) \approx \Phi\left(\frac{4100 - 3920}{\sqrt{3920 \cdot 0{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{3900 - 3920}{\sqrt{3920 \cdot 0{,}2}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{180}{28}\right) - \Phi\left(\frac{-20}{28}\right) = \Phi(6{,}43) - \Phi(-0{,}71) = \Phi(6{,}43) + \Phi(0{,}71) \approx$$

$$\approx 0{,}5 + 0{,}2611 = 0{,}7611.$$

Значения $\Phi(6{,}43) \approx 0{,}5$ определили по 4-му свойству функции $\Phi(x)$, а значение $\Phi(0{,}71) = 0{,}2611$ нашли по таблице значений функции $\Phi(x)$ (приложение 2).

Ответ: а) $P_{4900}(3950) \approx 0{,}008$; б) $P_{4900}(3900 \le k \le 4100) \approx 0{,}7611$.

Пример 14. Пусть m – число появлений события A в n независимых испытаниях. Чему равна вероятность того, что частота m/n события A отклонится от его вероятности p не более чем на ε?

Решение:

По условию задачи необходимо найти следующую вероятность:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon\right) = P\left(np - n\varepsilon < m < np + n\varepsilon\right).$$

По интегральной теореме Муавра-Лапласса:

$$P\left(np-n\varepsilon<m<np+n\varepsilon\right)\approx\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{-n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Ответ: искомая вероятность приближенно равна $2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.

Пример 15. В продукции некоторого производства брак составляет 15%. Изделия отправляются потребителям (без проверки) в коробках по 100 штук. Найти вероятности событий:

B – наудачу взятая коробка содержит 13 бракованных изделий;

C – число бракованных изделий в коробке не превосходит 20

Решение :

Изготовление детали – это испытание, в котором может появиться событие *A* – изделие бракованное с вероятностью $p = 0{,}15$. Находим $np = 15$, $npq = 12{,}75$. Применять формулы Лапласа (2.10) и (2.12), учитывая np =30/2:

$$P(B) = P_{100}(13)\approx\frac{1}{\sqrt{12,75}}\varphi\left(\frac{13-15}{\sqrt{12,75}}\right)= 0{,}28\cdot\varphi(-0{,}56) = 0{,}28\cdot0{,}341 = 0{,}095.$$

$$P(C)=P_{100}(0;\ 20)\approx\Phi\left(\frac{20-15}{\sqrt{12,75}}\right)-\Phi\left(\frac{0-15}{\sqrt{12,75}}\right)=\Phi(1,4)+\Phi(4,2)=0,419+0,5=0,919.$$

Значения функций Гаусса и Лапласа нашли по таблицам с учетом их свойств. Как интерпретировать результат? Приблизительно 9,5% всех коробок содержат 13 бракованных изделий, и в 92% коробок число бракованных не превосходит 20.

Ответ: $P(B) = 0{,}095$, $P(C) =0{,}919$.

Пример 16. Известно, что только 80% семян некоторой культуры дают полноценные растения. Сколько семян нужно посадить, чтобы с вероятностью не меньшей 0,95 получить, по крайней мере, 100 растений?

Решение:

Поведение семян в почве – это испытание, событие *A* – семя дало полноценное растение, $p = 0{,}8$. Неизвестное число испытаний *n* должно удовлетворять неравенству:

$P_n(100,\ n) \geq 0{,}95$, причем $n > 100$.

Используем формулу Лапласа (2.12):

$$P_n(100,\ n)\approx\Phi\left(\frac{n-0{,}8n}{\sqrt{0{,}8\cdot0{,}2n}}\right)-\Phi\left(\frac{100-0{,}8n}{\sqrt{0{,}8\cdot0{,}2n}}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)-\Phi\left(\frac{250-2n}{\sqrt{n}}\right)..$$

Учитывая свойства функции Лапласа, получим:

$$0,5-\Phi\left(\frac{250-2n}{\sqrt{n}}\right)\geq 0,95, \text{ или}$$

$$\Phi\left(\frac{2n-250}{\sqrt{n}}\right)\geq 0,45.$$

Из таблицы значений функции Лапласа находим: 0,45 = Ф(1,645). Учитывая еще и возрастание Ф(x) получаем неравенство для определения n:

$$\frac{2n-250}{\sqrt{n}}\geq 1,645.$$

Решая его, получаем: $\sqrt{n}\geq 11,6$, т.е. $n \geq 135$.

Итак, посеяв 135 (или более) семян можно с вероятностью 0,95 гарантировать получение, по крайней мере, 100 полноценных растений.

Ответ: 135.

Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях **(*см. решение примера* 14)**. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0<p<1)$, абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от вероятности p появления события не превысит положительного числа ε, приближенно равна удвоенной функции Лапласа при $x=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, т.е.

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (2.14)$$

Пример 17. Вероятность появления события в каждом из 625 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

Решение.

По условию, n = 625; p = 0,8; q = 0,2; ε = 0,04.

Требуется найти вероятность $P\left(\left|\frac{m}{625}-0,8\right|\leq 0,04\right)$.

Воспользуемся формулой (2.14):

$$P\left(\left|\frac{m}{625}-0,8\right|\leq 0,04\right)\approx 2\Phi\left(0,04\cdot\sqrt{\frac{625}{0,8\cdot 0,2}}\right)=2\Phi(2,5)=$$

$$=2\cdot 0,4938=0,9876.$$

Значение $\Phi(2,5)=0,4938$ нашли по таблице значений функции $\Phi(x)$ (приложение 2).

Ответ: $0,9876$.

2.4. Упражнения для самостоятельной работы

1. В автобусном парке имеются автобусы трех марок в отношении 2:3:4, надежность которых соответственно, 60%, 70% и 80%. Найти вероятность того, что случайно отобранный автобус отработает без поломок.
2. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?
3. В кошельке лежат 8 монет достоинством в 5 копеек и 2 монеты достоинством в 3 копейки. Наудачу выбирается монета и бросается 5 раз. Какова вероятность того, что в сумме будет 15 очков, если герб принимается за «0»?
4. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника в теннис два сета из четырех или три из шести?
5. Среди облигаций займа 10% выигравших. Найдите вероятность того, что из пяти взятых облигаций:

   а) все облигации выиграют;

   б) хотя бы одна облигация выиграет;

   в) выиграет одна облигация.
6. Чему равна вероятность наступления события в каждом из 199 независимых испытаний, если наивероятнейших чисел наступления события в этих испытаниях два: 59 и 60?
7. (Задача де Мере). Сколько раз надо бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей $\frac{1}{2}$ можно было утверждать, что хотя бы раз появится 12 очков?
8. Сообщение содержит 500 символов. Вероятность искажения символа при передаче постоянна и равна p. Если хотя бы один символ искажён, то сообщение будет принято неверно. При каких значениях p вероятность того, что сообщение будет успешно передано, окажется равной 0,9?
9. Сколько нужно взять изделий, чтобы наивероятнейшее число годных среди них было равно 49 или 50, если вероятность того, что наудачу взятое для проверки изделие будет бракованной, равна 0,1?
10. Вероятность появления события в каждом из 30000 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01.
11. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,5. Найти число испытаний n, при котором с вероятностью 0,7698 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

2.5. Индивидуальные задания

Вариант 1

1 В цехе работает 20 станков. Из них 10 марки *A*, 6 – марки *B* и 4 – марки *C*. Вероятность того, что качество детали, изготовленной на этих станках, окажется отличным, равны соответственно 0,9; 0,8; 0,7. Какой процент отличных деталей выпускает цех в целом?

2 Нефтяная компания, изучив данные геологоразведки, оценивает вероятность обнаружения нефти в некотором районе как 0,3. Из предыдущего опыта подобных работ известно, что если нефть действительно должна быть обнаружена, первые пробные бурения дают положительные образцы с вероятностью 0,4. Если оказалось, что первые бурения дали отрицательный результат, какова вероятность, что нефть, тем не менее, будет обнаружена в данном районе? Замечание: необходимо выбрать приемлемые значения для вероятностей гипотез о наличии и, соответственно, об отсутствии нефти в исследуемом районе, которые будут затем уточнены и применены.

3 В цехе шесть моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включено четыре мотора.

4 Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна 0,8 и не зависит от номера выстрела. Найти наиболее вероятное число попаданий в мишень при 5 выстрелах и соответствующую этому числу вероятность.

5 При массовом производстве элементов электроники вероятность появления брака равна 0,005. Определить вероятность того, что в партии из 600 элементов бракованными будут ровно три элемента.

6 При установившемся технологическом процессе завод выпускает в среднем 64% продукции первого сорта. Какова вероятность того, что в партии из 625 изделий, прошедших через отдел технического контроля, количество изделий первого сорта будет:

а) ровно 350; б) не менее 400 и не более 450.

Вариант 2

1 Пусть в коробке есть 3 новых и 3 уже использованных теннисных мяча. Для первой игры наудачу берут из коробки 2 мяча и затем их возвращают в коробку. Какова вероятность для второй игры из этой коробки наудачу вынуть два новых мяча?

2 Для принятия решений о покупке ценных бумаг была разработана система анализа рынка. Из данных известно, что 5% рынка представляют собой "плохие" ценные бумаги — неподходящие объекты для инвестирования. Предложенная система определяет 98% "плохих" ценных бумаг как потенциально "плохие", но также определяет 15% пригодных инвестиций как потенциально "плохие". При условии, что ценная бумага была определена как потенциально "плохая", какова вероятность того, что ценная бумага в действительности "плохая"?

3 30% изделий данного предприятия – это продукция высшего сорта. Некто приобрел 6 изделий, изготовленных на этом предприятии. Чему равна вероятность, что 4 из них высшего сорта?

4 Вероятность изготовления детали высшего сорта на данном станке равна 0,4. Найти наивероятнейшее число деталей высшего сорта среди 24 деталей и вероятность этого события.

5 Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,002. Найти вероятность того, что в партии из 1000 деталей окажется одна бракованная.

6 При автоматической прессовке болванок 2/3 общего числа из них не имеют зазубрин. Найти вероятность того, что из 450 взятых наудачу болванок, без зазубрин:

а) заключено между 280 и 320; б) равно ровно 300.

Вариант 3

1 Вероятность того, что во время работы цифровой электронной машины произойдет сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти, в остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятность обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных устройствах соответственно равна 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в памяти сбой будет обнаружен.

2 Два охотника одновременно стреляют в цель. Известно, что вероятность попадания у первого охотника равна 0,2, а у второго – 0,6. В результате первого залпа оказалось одно попадание в цель. Чему равна вероятность того, что промахнулся первый охотник?

3 По цели производится три независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Для поражения цели достаточно двух попаданий. При одном попадании цель практически не поражается. Найти вероятность поражения цели.

4 Вероятность изготовления изделия высшего сорта на данном предприятии равна 0,8. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 7 изделий и вероятность этого события.

5 Вероятность того, что в некотором автопарке одна машина потерпит аварию в течение месяца, равна 0,001. В автопарке имеется 300 автомашин. Найти вероятность того, что в течение месяца потерпят аварию не более трех из них.

6 Вероятность нормального расхода электроэнергии за день на данном предприятии равна 0,7. Найти с помощью формул Лапласа вероятности нормального расхода электроэнергии:

а) в 50 днях из 90; б) не менее чем в 60 днях из 90.

Вариант 4

1 В магазин поступили телевизоры от 3 фирм. На долю 1 фирмы приходится 50% от общего числа поставок, на долю 2 фирмы – 20%, а на долю 3 фирмы – 30%. Из практики известно, что бракованными оказываются 4% поставляемых 1 фирмой, 3% поставляемых 2 фирмой и 5% поставляемых 3 фирмой. Найти вероятность того, что купленный в данном магазине телевизор окажется бракованным.

2 В сентябре вероятность дождливого дня равна 0,3. Команда «Статистик» выигрывает в футбол в ясный день с вероятностью 0,8, а в дождливый день эта вероятность равна 0,3. Известно, что в сентябре они выиграли некоторую игру. Какова вероятность, что в тот день: а) шел дождь?; б) был ясный день?

3 Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,4. По мишени производится четыре независимых выстрела. Найти вероятность того, что будет хотя бы одно попадание в мишень.

4 Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при броске равна 0,4. Произведено 10 бросков. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

5 На лекции должно присутствовать 200 студентов. Вероятность того, что любой (один) из студентов сбежит с лекции, равна 0,02. Найти вероятность того, что все студенты будут на лекции.

6 Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян:

а) прорастет ровно 700;

б) число, проросших заключено между 790 и 830.

Вариант 5

1 В первой коробке 35 радиоламп, среди них 4 нестандартные. Во второй коробке 20 радио-

ламп, среди них 1 нестандартная. В третьей коробке 45 радиоламп, в том числе 5 нестандартных. Из третьей коробки взяли наудачу 1 радиолампу и переложили в первую коробку. Затем из второй коробки была наудачу взята радиолампа и переложена в первую коробку. После этого из первой коробки наудачу извлекли радиолампу. Какова вероятность того, что эта лампа стандартная?

2 В одном из трех ящиков 6 белых и 4 черных шарика, во втором – 7 белых и 3 черных, в третьем – только 8 белых. Наугад выбираем один из трех ящиков и из него снова наугад выбираем один шарик. Он оказался белым. Какова вероятность того, что этот шарик вынут из второго ящика?

3 Рабочий обслуживает пять однотипных станков. Вероятность того, что станок потребует внимания рабочего в течение дня, равна 0,3. Найти вероятность того, что в течение дня этих требований будет от трех до пяти.

4 В аэропорту в течение дня 10 самолетов ожидают вылета. Вероятность того, что самолет вылетит вовремя, равна 0.8. Найти вероятность того, что за день наивероятнейшее число самолетов вылетит вовремя.

5 Сообщение содержит 500 символов. Вероятность искажения символа при передаче постоянна и равна 0,001. Если хотя бы один символ искажён, то сообщение будет принято неверно. Найти вероятность того, что сообщение будет успешно передано.

6 На сборы приглашены 120 спортсменов. Вероятность того, что случайно выбранный спортсмен выполнит норматив, равна 0,7. Определить вероятность того, что выполнят норматив:

а) ровно 80 спортсменов;

б) не менее 80.

Вариант 6

1 В телевизионном ателье имеется четыре кинескопа. Вероятности того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно равны 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что взятый наудачу кинескоп выдержит гарантийный срок.

2 Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 0,2; 0,4; 0,6. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось одно попадание. Определить вероятность того, что попал первый стрелок.

3 Всхожесть семян данного сорта растений оценивается с вероятностью равной 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее трех?

4 Вероятность попадания в цель равна 0.3. Производится 8 независимых выстрелов по цели. Найти вероятность того, что в цель попадут наивероятнейшее число раз.

5 Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,004. Какова вероятность того, что из 750 проверяемых изделий более трех изделий не выдержат испытания?

6 Вероятность появления бракованных деталей при их массовом производстве равна 0,02. Определить вероятность того, что в партии из 7000 деталей будет:

а) ровно 130 бракованных;

б) не более 140 бракованных.

Вариант 7

1 Сборщик получил три коробки деталей, изготовленных заводом №1, и две коробки – заводом №2. Вероятность того, что деталь завода №1 стандартна, равна 0,8, а завода №2 – 0,9. Сборщик берет наугад деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь.

2 Турист, заблудившись в лесу, вышел на поляну, от которой в разные стороны идут пять дорог. Если турист пойдет по первой дороге, то вероятность выхода туриста из леса в течение часа составляет 0,6; если по второй – 0,3; если по третьей – 0,2; по четвертой – 0,1; по пятой – 0,1. Какова вероятность того, что турист пошел по первой дороге, если он через час вышел из леса?

3 Оптовая база снабжает товаром 10 магазинов. Вероятность того, что в течение дня поступит заявка на товар, равна 0,3 для каждого магазина. Найти вероятность того, что в течение дня поступит 6 заявок.

4 Отдел технического контроля проверяет партию из 2k+1 деталей с k>0. Деталь годная с вероятностью равной 0,5. Найти наивероятнейшие числа годных деталей. При каком значении k вероятность обнаружить такие числа годных деталей больше 0,5?.

5 Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность, того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит хотя бы одну разбитую бутылку.

6 Вероятность выхода из строя каждого из 900 независимо работающих элементов некоторого узла в течение 300 часов равна 0,1. Найти вероятность того, что по истечении этого времени будут работать:

а) 70 элементов;

б) не менее 70 элементов.

Вариант 8

1 В группе 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационный норматив такова: для лыжника – 0,9, для велосипедиста – 0,8, для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит квалификационный норматив.

2 На склад поступает продукция трех фабрик. Причем продукция первой фабрики составляет 20%, второй – 46%, третьей – 34%. Известно также, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%, для второй – 2% и, наконец, для третьей – 1%. Найти вероятность того, что наугад взятое изделие произведено на первой фабрике, если оно оказалось нестандартным.

3 В Машбюро стоит 5 пишущих машин. Вероятность того, что каждой из них в течение года потребуется ремонт 1/5. Найти вероятность того, что в течение года не придется ремонтировать хотя бы 2 машины.

4 В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене будет продано наивероятнейшее число пакетов.

5 На факультете учится 1000 студентов. Вероятность попадания дня рождения студента на определенный день года 1/365. Определить вероятность того, что ровно у трех студентов дни рождения совпадают.

6 Спортсмен стреляет по мишени 200 раз. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.92. Найти вероятность того, что число попаданий будет:

а) ровно 150 раз;

б) от 80 до 120 раз.

Вариант 9

1 По воздушной цели производится стрельба из двух различных ракетных установок. Вероятность поражения цели первой установкой равна 0,85, второй – 0,9, а вероятность поражения цели двумя установками равна 0,99. Найти вероятность поражения цели, если известно, что первая установка работает с вероятностью 0,8, а вторая – с вероятностью 0,7.

2 В кондитерском цехе выпускаются торты и пирожные, причем пирожных в 4 раза больше. 10% тортов и 35% пирожных изготавливаются с орехами. Наугад выбранное изделие оказалось с орехами. Какова вероятность того, что это торт?

3 В ящике лежат несколько тысяч предохранителей. Половина из них изготовлена заводом №1, остальные - завод №2. Наудачу вынули 5 предохранителей. Чему равна вероятность того, что заводом №1 из них изготовлено более двух?

4 Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,2. Куплено 12 билетов.

Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

5 Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,02. Найти вероятность того, что в 150 таких испытаниях событие наступит 5 раз.

6 В магазин поступило 1000 телевизоров. Вероятность продажи каждого из них в течение дня равна 0.05. Найти вероятность того, что за день будет продано:

а) ровно 40 телевизоров;

б) от 50 до 100 телевизоров.

Вариант 10

1 На сборку механизма поступают детали с двух автоматов. Первый автомат в среднем дает 1,5% брака, второй – 1%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 2000 деталей, а со второго – 1500.

2 Завод выпускает 3 типа предохранителей для магнитофона. Доля каждого из них в общем объеме составляет 30, 50 и 20%. При перегрузке сети предохранитель 1 типа срабатывает с вероятностью 0,8%, 2 типа 0,9 и 3 типа 0,85%. Выбранный наугад предохранитель не сработал при перегрузке сети. Какова вероятность того, что он принадлежал к 1 типу?

3 Проверяются изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

4 Вероятность выигрыша в лотерею равна 0,3. Куплено 15 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

5 Если в среднем левши составляют 1%, какова вероятность того, что среди 200 человек окажется четверо левшей?

6 В институте обучается 1000 человек, и ежедневно опаздывают на занятия в среднем 5% студентов. Найти вероятность того, что одновременно опоздают на занятия:

а) ровно 30 студентов;

б) от 25 до 50 студентов.

Вариант 11

1 На контрольной работе 7 студентов из группы получили оценку "5", 10 – "4", 8 – "3", 5 – "2". Обычно из написавших на "5", "4", "3" и "2" зачет не сдают соответственно 5, 10, 20 и 40% человек. Какова вероятность того, что произвольно выбранный из группы студент получит зачет

2 В продукции кондитерской фабрики шоколадные конфеты составляют 40% ассортимента. В среднем 10 из 100 шоколадных конфет оказывается с браком. Для остальной продукции этот показатель равен 5 из 200. Выбранное наугад изделие оказалось без брака. Какова вероятность того, что это была шоколадная конфета?

3 Пусть вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 3 телевизоров хотя бы один не потребует ремонта.

4 В тестовом задании 8 вопросов, на каждый дано 4 варианта ответов, среди которых 1 правильный. Какое наиболее вероятное число правильных ответов даст отвечающий наугад. Вычислить соответствующую вероятность.

5 Вероятность изготовления изделия с браком равно 0,01. Найти вероятность того, что из 200 изделий бракованными окажутся три изделия.

6 Аудиторную работу по теории вероятностей с первого раза успешно выполняют 50% студентов. Найти вероятность того, что из 400 студентов работу успешно выполнят:

а) 180 студентов;
б) не менее 180 студентов.

Вариант 12

1 Имеются две урны. В первой урне два белых и три черных шара, во второй – три белых и пять черных. Из первой и второй урн, не глядя, берут по одному шару и кладут их в третью урну. Шары в третьей урне перемешивают и берут из нее наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

2 Для сдачи норм ГТО из 1ой группы пришло 20 человек, из 2ой 15, из 3ей 10. Студент 1ой группы сдает нормы с вероятностью 0,7%, со 2ой 0,8%, с 3ей 0,9%. Наудачу выбранный студент не сдал номер ГТО. Какова вероятность того, что это был студент из 2ой группы.

3 Среди деталей, обрабатываемых рабочим, бывает в среднем 4% нестандартных. Найти вероятность того, что среди взятых на испытание 30 деталей две будут нестандартными.

4 Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину равна 0,6. Произведено 8 бросков. Найти вероятнейшее число попаданий и вероятность такого числа попаданий.

5 Завод отправил на базу 2000 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,0015. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено: хотя бы одно изделие.

6 В банк поступило 500 заявлений о выдаче кредита. Вероятность выдачи кредита по каждому заявлению равна 0,3. Найти вероятность того, что банком будет выдано:
а) 180 кредитов;
б) от 100 до 200 кредитов.

Вариант 13

1 Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 0,2; 0,4; 0,6. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось одно попадание. Определить вероятность того, что попал первый стрелок.

2 Один из 3-х стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для 1-го стрелка 0,3; для 2-го 0,5; для 3-го 0,8. Мишень не поражена. Найти вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком.

3 Произвели 7 выстрелов. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,705. Найти вероятность того, что при этом будет ровно 5 попаданий.

4 В помещении четыре лампы, вероятность работы в течение года для каждой лампы 0,8. Найти вероятность того, что к концу года горят три лампы. Чему равно наивероятнейшее число ламп, которые будут работать в течение года.

5 По цели производиться 100 независимых выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,04. Найти вероятность того, что в цель не попадет ни один снаряд.

6 Вероятность невыплаты дивидендов по выпущенной акции равна 0,06. В портфеле ценных бумаг находится 1000 акций. Найти вероятность того, что в портфеле ценных бумаг окажется:
а) ровно 50 акций, по которым не будут выплачиваться дивиденды;
б) не более 40 акций, по которым не будут выплачиваться дивиденды.

Вариант 14

1 По цели производится три независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,1, при втором – 0,2 и при третьем – 0,3. Для поражения цели достаточно двух попаданий. При одном попадании цель поражается с ве-

роятностью 0,6. Найти вероятность поражения цели.

2 Для сдачи экзамена студентам было необходимо подготовить 30 вопросов. Из 25 студентов 10 подготовили все вопросы, 8 – 25 вопросов, 5 – 20 вопросов, 2 -15 вопросов. Вызванный студент ответил на поставленный вопрос. Найти вероятность того, что этот студент подготовил только половину вопросов.

3 В партии из 10 изделий 4 бракованных. Наугад выбирают 6 изделий, с возвращением каждый раз вынутого изделия обратно. Определить вероятность того, что среди этих изделий будет 2 бракованных.

4 Вероятность попадания в десятку у данного стрелка при одном выстреле равна 0,2. Определить вероятность наивероятнейшего числа попаданий в десятку при 10 выстрелах.

5 Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 1000 деталей будет 10 бракованных.

6 В магазин поступило 500 пар обуви. Вероятность продажи каждой из них в течение дня равна 0.2. Найти вероятность того, что за день будет продано

а) ровно 120 пар;

б) от 30 до 100 пар.

Вариант 15

1 В ящик, содержащий 3 детали, брошена стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь. Первоначальный состав деталей в ящике неизвестен.

2 В белом ящике лежит 12 красных и 6 синих одинаковых на ощупь шаров. В желтом ящике лежит 15 красных и 10 синих одинаковых на ощупь шаров. Бросается игральная кость. Если число выпавших очков кратно трем, то наудачу вынимается шар из белого ящика. Если число выпавших очков не кратно трем, то вынимают наудачу шар из желтого ящика. Какова вероятность того, что вынутый шар красный?

3 Партия изделий содержит 6% брака. Найти вероятность того, что среди взятых наугад 8 изделий окажется 3 бракованных.

4 В 6-значном сообщении вероятность искажения знака 0,4. Определить вероятность наивероятнейшего числа искаженных знаков.

5 Книга издана тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что книга будет сброшюрована неправильно, равна 0,0002. Найти вероятность того, что тираж содержит 4 бракованных книг.

6 Вероятность отказа от выплаты страхового возмещения со стороны страховой компании при наступлении страхового случая равна 0,01. Найти вероятность того, что при наступлении 1500 страховых случаев страховая компания откажет:

а) ровно 30 потерпевшим;

б) не более 20 потерпевшим.

Вариант 16

1 В двух ящиках находятся шары: в одном 2 белых и 5 черных, в другом 2 белых и 3 черных. Из первого во второй переложены три шара. Какова вероятность вынуть из второго ящика черный шар?

2 Из 10 деталей 4 окрашены. Вероятность того, что окрашенная деталь тяжелее нормы, равна 0.3,а для неокрашенной детали эта вероятность равна 0.1. Взята наудачу деталь, оказалась тяжелее нормы. Найти вероятность того, что она окрашена.

3 Вероятность выигрыша по облигации займа за все время его действия, равна 0,25. Найти вероятность того, что купив 8 облигаций, вы выиграете по 6 из них.

4 Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна

0,75 и не зависит от номера выстрела. Найти наиболее вероятное число попаданий в мишень при 8 выстрелах и соответствующую этому числу вероятность.

5 Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,005. Найти вероятность попадания в цель не менее трех раз, если число выстрелов равно 800.

6 Вероятность выхода из строя каждого из 1000 независимо работающих элементов некоторого узла в течение 400 часов равна 0,1. Найти вероятность того, что по истечении этого времени будут работать:

а) 70 элементов;

б) не менее 70 элементов.

Вариант 17

1 На заводе изготавливающем шайбы 1автомат изготавливает 23%, 2 - 37%, 3 - 40% всех шайб. В их продукции доля стандартных изделий составляет 85%, 90%, 95%. Какова вероятность того, что выбранная шайба будет бракованной?

2 Агентство по страхованию автомобилей разделяют водителей по 3 классам: класс H_1 - мало рискует, класс H_2 - рискует средне, класс H_3 - рискует сильно. Агентство предполагает, что из всех водителей, застраховавших авто 30% - это класс H_1; 50%- это класс H_2; 20%-это класс H_3. Вероятность того, что в течение года водитель класса H_1 попадет хотя бы в одну аварию = 0,01, для водителя класса H_2 вероятность = 0,02, для водителя класса H_3 вероятность = 0,08. Водитель A страхует свою машину и в течение года попадает в аварию. Какова вероятность того, что он относится к классу H_1?

3 Самолет имеет 4 двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя равна 0,95. Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном из двигателей?

4 Вероятность изготовления детали высшего сорта на данном станке равна 0,45. Найти наивероятнейшее число деталей высшего сорта среди 20 деталей и вероятность этого события.

5 На станциях отправления поездов находиться 1000 автоматов для продажи билетов. Вероятность выхода из строя одного автомата в течение часа равна 0,004. Какова вероятность того, что в течение часа из строя выйдет пять автоматов.

6 Телефонная станция обслуживает сеть из 10000 абонентов. Вероятность сигнала «занято» для каждого абонента равна 0.4. Найти вероятность того, что число одновременно «занятых» абонентов будет:

а) ровно 4200 штук;

б) от 3550 до 4650 штук.

Вариант 18

1 На базе находятся костюмы, изготовленные на 3-х фабриках. Из них 30% изготовлены на 1-ой фабрике, 50% на 2-ой, и 20% на 3-ей. Известно, что из каждых 100 костюмов изготовленных на 1-ой фабрике знак качества имеет 60%. Для 2-ой и 3-ей фабрик показатель равен соответственно 70 и 80%. Определить вероятность того, что взятый наугад с базы костюм не будет иметь знак качества.

2 Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1. Для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

3 Техническая система состоит из 5 узлов. Вероятность нарушения режима работы для каждого узла в течение времени *T* равна 0,2. Система выходит из строя, если нарушения режима работы произойдут не менее чем в 3 узлах. Найти вероятность выхода из строя этой системы за время *T*, если вероятность нарушения работы для каждого узла не зависит от состояния других узлов.

4 Вероятность изготовления изделия высшего сорта на данном предприятии равна 0,8. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 10 изделий и вероятность этого события.

5 Система, состоящая из 100 элементов, работает нормально, если за рассматриваемый период выйдет из строя не более трех элементов. Найти вероятность нормальной работы системы, если отказы элементов независимы и вероятности их отказов равны 0,02.

6 Производится 200 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0.9. Найти вероятность того, что событие наступит

а) ровно 190 раз;

б) не менее 150 раз.

Вариант 19

1 Имеются две урны. В 1-ой 3 белых и 1 черный шар. Во 2-ой 2 белых и 3 черных шара. Из 1-ой урны перекладывают во 2-ю не глядя 3 шара. После того из 2-ой урны наугад берут 1 шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белый.

2 Среди шести винтовок пристрелянными оказываются только две. Вероятность попадания из пристрелянной винтовки равна 0,9, а из непристрелянной – 0,8. Выстрелом из одной наугад взятой винтовки цель поражена. Определить вероятность того, что взята пристрелянная винтовка.

3 Среди 10 учебников 3 с вырванными страницами. На группу выдано 6. Какова вероятность, что среди них не более одного испорченного?

4 Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при броске равна 0,6. Произведено 15 бросков. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

5 Вероятность того, что стодолларовая купюра фальшивая, равна 0,01. Найти вероятность того, что из 100 купюр хотя бы одна фальшивая.

6 Известно, что в среднем 64% студентов потока выполняют контрольные работы в срок. Какова вероятность того, что из 100 студентов потока задержат представление контрольных работ:

а) 30 студентов;

б) от 30 до 40 студентов?

Вариант 20

1 Среди 10 приборов равновероятно наличие неисправных приборов от 0 до 2. Наугад взят один прибор. Найти вероятность того, что он окажется неисправным.

2 В больницу поступает в среднем 50% больных с заболеванием A, 30% с заболеванием B, 20% с заболеванием C. Вероятность полного выздоровления для каждого заболевания соответственно равна 0,7; 0,8; 0,9. Больной был выписан из больницы здоровым. Найти вероятность того, что он страдал заболеванием A.

3 В аэропорту в течение дня 10 самолетов ожидают вылета. Вероятность того, что самолет вылетит вовремя, равна 0.8. Найти вероятность того, что за день 9 самолетов вылетит вовремя.

4 В аэропорту в течение дня 13 самолетов ожидают вылета. Вероятность того, что самолет вылетит вовремя, равна 0.85. Найти вероятность того, что за день наивероятнейшее число самолетов вылетит вовремя.

5 Магазин бытовой техники продал партию из 200 телевизоров. Вероятность того, что в мастерскую гарантированного ремонта попадут телевизоры из этой партии, равна 0,01. Найти вероятность того, что в мастерскую гарантированного ремонта обратятся ровно 4 покупателя, купивших телевизоры данной партии.

6 Считаем, что каждая лампа, освещающая улицу, горит в течение года с вероятностью 0,64. Какова вероятность, что из 2450 ламп, освещающих улицу, к концу года будет гореть:

а) 1550 ламп;

б) от 1500 до 1600 ламп.

Вариант 21

1 На стройке имеются автомобили трёх типов: первого типа 13, второго 10, третьего 7. Вероятность выхода из строя автомобиля первого типа 0,705, второго 0,104, третьего 0,018. Какова вероятность, что наудачу выбранная машина выйдет из строя?

2 Группа состоит из 2 отличников, 5 хорошо успевающих студентов и 13 студентов, успевающих посредственно. Отличник отвечает на 5 и 4 с равной вероятностью, хорошист отвечает на 5, 4 и 3 с равной вероятностью и посредственно успевающий студент отвечает на 4, 3 и 2 с равной вероятностью. Случайно выбранный студент ответил на 4. Какова вероятность того, что был вызван посредственно успевающий студент?

3 Вероятность поражения цели одной ракетой - 0,6. Проведен залп из 8 стволов. Какова вероятность, что в цель попали 4 ракеты?

4 Вероятность попадания в цель равна 0.35. Производится 10 независимых выстрелов по цели. Найти вероятность того, что в цель попадут наивероятнейшее число раз.

5 Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0.002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено ровно три изделия.

6 Проводится серия 480 независимых одинаковых испытаний. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0.2. Найти вероятность того, что событие наступит:

а) ровно 200 раз;
б) не менее 200 раз.

Вариант 22

1 Из двух колод по 36 карт и одной в 52 карты наудачу выбрана колода. А из колоды наудачу взята карта. Какова вероятность того, что это оказался туз?

2 На склад поступили детали с 3-х станков. На первом станке изготовлено 40% деталей от их общего количества, на 2-ом – 35% и на третьем – 25%. Причем на первом станке было изготовлено 90% деталей 1-го сорта, на втором 80% и на третьем – 70%. Известно, что наугад выбранная со склада деталь оказалась деталью 1-го сорта. Найти вероятность того, что она была изготовлена на 2-м станке.

3 Среди продукции завода - 90 % годной. Найти вероятность того, что среди 6 изделий будет не более 2 бракованных.

4 Отдел технического контроля проверяет партию из 10 деталей. Вероятность, что деталь окажется годной, равна 0,6. Найти наивероятнейшее число деталей, которые будут годными.

5 Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,003. Найти вероятность того, что в течении одной минуты произойдет ровно 2 обрыва нити.

6 Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за время Т из 100 конденсаторов выйдут из строя

а) ровно 20 конденсаторов;
б) от 14 до 26 конденсаторов.

Вариант 23

1 На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: 14 штук с первого, 26 штук со второго, 10 штук с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе 0,8, на втором – 0,9, на третьем – 0,8. Какова вероятность, что взятое наугад изделие будет качественным?

2 В ящике находятся 15 теннисных мячей, из которых 9 новых. Для первой игры наугад берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также наугад берутся три мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для

второй игры, новые.

3 Сбрасывается 4 бомбы. Вероятность попадания в цель каждой 0,3: найти вероятность не более чем одного попадания в цель.

4 В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 15 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене будет продано наивероятнейшее число пакетов.

5 Завод отправил на базу 5000 изделий. Вероятность повреждения каждого изделия в пути равна 0,0002. Какова вероятность того, что на базу прибудут 3 поврежденные изделия?

6 Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0.8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена:

а) ровно 75 раз;

б) не менее 75 раз.

Вариант 24

1 По самолету производится пять выстрелов. Вероятность попадания при каждом равна 0,81. Самолет будет заведомо сбит при трех попаданиях, при двух попаданиях он сбивается с вероятностью 0,57, а при одном – с вероятностью 0,32. Определить вероятность того, что самолет будет сбит.

2 Крыса может выбирать наугад один из пяти лабиринтов. Известно, что вероятность её выхода из различных лабиринтов за три минуты равна 0,6; 0,3; 0,2; 0,1; 0,1. Пусть оказалось, что крыса вырвалась из лабиринта через три минуты. Какова вероятность того, что она выбрала первый лабиринт?

3 На участке имеется n станков, вероятность выхода из строя для каждого 0,1. Найти вероятность выхода из строя не более k станков, если n=6, k=2.

4 Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,1. Куплено 20 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

5 Аппаратура содержит 2000 радиоламп. Вероятность отказа для каждой из них равна 0,0005. Какова вероятность отказа хотя бы одной радиолампы?

6 Вероятность того, что студент с первого раза сдаст экзамен по теории вероятностей, равна 0.6. Найдите вероятность того, что из 500 студентов с первого раза сдадут этот экзамен:

а) ровно 250 человек;

б) от 250 до 300 человек.

Вариант 25

1 Резистор может принадлежать одно из двух партий с вероятностями 0,6 и 0,4. Вероятность того, что он проработает гарантийное число часов (для этих партий) равна 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что взятый наугад резистор проработает гарантийное число часов.

2 Человек, заблудившийся в лесу, вышел на пересечение трех тропинок. Вероятность выхода из леса в течение оставшегося дня составляет соответственно 0,8; 0,4; 0,6 для каждой тропинки. Чему равна вероятность того, что человек вышел из леса в этот день, если он выбирает одну из трех тропинок с равной вероятностью?

3 В студии три телевизионные камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера.

4 Вероятность выигрыша в лотерею равна 0,15. Куплено 30 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

5 Вероятность того, что любая деталь в партии бракованная, равна 0,001. Найти вероятность того, что среди 5000 отобранных деталей окажется хотя бы одна бракован-

ная.

6 В жилом доме имеется 6400 ламп, вероятность включения каждой из них в вечернее время равна 0,5. Найти вероятность того, что число одновременно включенных ламп будет:

а) ровно 3330;

б) от 3150 до 3240.

Вариант 26

1 В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом второго – 10% и третьего – 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30% телевизоров с первого завода, 20% - со второго и 50% - с третьего?

2 Статистика запросов кредитов в банке такова: 10% - государственные органы, 30% - другие банки, остальные – физические лица. Вероятности невозврата взятого кредита соответственно таковы: 0,01, 0,05 и 0,2. Найти вероятность невозврата очередного запроса на кредит. Начальнику кредитного отдела доложили, что получено сообщение о невозврате кредита, но в факсимильном сообщении имя клиента было неразборчиво. Какова вероятность, что данный кредит не возвращает какой-то банк

3 Вероятность правильного оформления доверенности у нотариуса Иванова равна 0,8. В течение одного часа нотариус оформил три доверенности. Найти вероятность того, что только две доверенности верно оформлены.

4 В тестовом задании 15 вопросов, на каждый дано 4 варианта ответов, среди которых 1 правильный. Какое наиболее вероятное число правильных ответов даст отвечающий наугад. Вычислить соответствующую вероятность.

5 Владельцы кредитных карточек ценят их и теряют весьма редко. Пусть вероятность потерять кредитную карточку в течение недели для произвольного владельца равна 0,001. Всего банк выдал карточки 3000 клиентов. Найти вероятность того, что в предстоящую неделю будет потеряна: а) хотя бы одна; б) ровно одна кредитная карточка.

6 Вероятность появления бракованных деталей при их массовом производстве равна 0,001. Определить вероятность того, что в партии из 20000 деталей будет:

а) ровно 30 бракованных;

б) не более 25 бракованных.

Вариант 27

1 Перед посевом 95% семян обрабатываются специальным раствором. Всхожесть семян после обработки равна 99%, необработанных – 85%. Какова вероятность того, что случайно взятое семя взойдет?

2 Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества. Из высококачественных деталей собирается 40% приборов. Если прибор собран из высококачественных деталей, то вероятность его безотказной работы за время t равна 0,95; если же из деталей обычного качества – его надежность равна 0,70. Прибор работал в течение времени t безотказно. Найти вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.

3 Студенты выполняют контрольную работу. Для получения положительной оценки достаточно решить 2 задачи из 3, написанных на карточке. Для каждой задачи зашифровано 5 различных ответов, из которых только один правильный. Студент плохо знает материал и поэтому выбирает ответы наугад. Какова вероятность того что он получит положительную оценку?

4 Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину равна 0,75. Произведено 6 бросков. Найти вероятнейшее число попаданий и вероятность такого числа попаданий.

5 Книга издана тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что книга будет сброшюрована неправильно, равна 0,0002. Найти вероятность того, что тираж содержит менее 5 брако-

ванных книг.

6 Вероятность появления бракованных деталей при их массовом производстве равна 0,005. Определить вероятность того, что в партии из 7000 деталей будет:

а) ровно 40 бракованных;

б) не более 80-ти бракованных.

Вариант 28

1 В магазине имеются телевизоры с импортными и отечественными трубками в соотношении 2:9. Вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока телевизора с импортной трубкой равна 0,005; с отечественной трубкой она равна 0,01. Найти вероятность того, что купленный в магазине телевизор выдержит гарантийный срок.

2 В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношение 2:3. Вероятность качественного ремонта для сапог 0,9, а для туфель – 0,85. Проведена проверка качества одной пары обуви. Оказалось, что она отремонтирована качественно. Какова вероятность, что это сапоги?

3 Вероятность того, что расход электроэнергии на протяжении одних суток не превысит установленной нормы, 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход энергии в течении четырех суток не превысит нормы.

4 В помещении восемь ламп, вероятность работы в течение года для каждой лампы 0,9. Найти вероятность того, что к концу года горят три лампы. Чему равно наивероятнейшее число ламп, которые будут работать в течение года.

5 Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,02. Найти вероятность попадания в цель не менее трех раз, если число выстрелов равно 100.

6 На заводе 1000 станков, каждый из которых выходит из строя в течение смены с вероятностью 0,02. Найти вероятность, что за смену выйдет из строя:

а) 25 станков;

б) не более 20-ти станков.

Вариант 29

1 На тренировке стрелки получили 10 винтовок, из которых 8 пристрелянных, 2 – нет. Вероятность попадания в цель из пристрелянной винтовки равна 0,6, а из не пристрелянной 0,4. Какова вероятность, что стрелок из наудачу взятой винтовки попадет в цель при одном выстреле?

2 В магазин поступают телевизоры четырех заводов. Вероятность того, что в течение года телевизор не будет иметь неисправность, равна: для первого завода 0,9, для второго 0,8, для третьего 0,8 и для четвертого 0,99. Случайно выбранный телевизор в течение года вышел из строя. Какова вероятность того, что он изготовлен на первом заводе?

3 Вероятность отказа каждого прибора при испытании не зависит от отказов других приборов и равна 0,1. Испытано 9 приборов. Что вероятнее: откажет 3 или 5 приборов?

4 Вероятность попадания в десятку у данного стрелка при одном выстреле равна 0,25. Определить вероятность наивероятнейшего числа попаданий в десятку при 20 выстрелах.

5 Аппаратура содержит 1000 радиоламп. Вероятность отказа для каждой из них равна 0,003. Какова вероятность отказа хотя бы одной радиолампы?

6 Известно, что 80% специалистов в районе имеет высшее образование. Найти вероятность того, что из 100 наудачу отобранных человек, высшее образование имеет:

а) ровно 70;

б) от 65 до 90 человек.

Вариант 30

1 Авиапассажир за получением билета может обратиться в одну из авиакасс. Вероятность обращения в первую авиакассу составляет 0,4, вторую - 0,35 и третью -0,25. Вероятность того, что к моменту прихода авиапассажира имеющиеся в авиакассе билеты будут проданы, равна для первой кассы 0,3, для второй - 0,4, для третьей 0,6. Найти вероятность того, что авиапассажир купит билет.

2 Две перфораторщицы набили по одному комплекту перфокарт. Вероятность того, что первая перфораторщица допустит ошибку, равна 0,1; для второй перфораторщицы эта вероятность равна 0,2. При сверке перфокарт была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась вторая перфораторщица.

3 В ячейку памяти ЭВМ записывается 8-разрядное двоичное число. Значения 0 и 1 в каждом разряде появляются с равной вероятностью. Найти вероятность того, что в двоичном числе количество единиц будет больше 4.

4 В 8-значном сообщении вероятность искажения знака 0,3. Определить вероятность наивероятнейшего числа искаженных знаков.

5 Завод отправил на базу 5000 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,001. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено: хотя бы одно изделие.

6 Компания, предоставляющая услуги Интернет обслуживает 6400 пользователей. Каждый из них может находиться в сети с вероятностью 0.8. Найти вероятность того, что одновременно в Интернете будут находиться:

а) ровно 5000 абонентов;

б) от 5000 до 6000 абонентов.

3. Дискретная случайная величина

3.1. Понятие случайной величины.

Дискретная случайная величина и её закон распределения

Много величин, с которыми приходится иметь дело, являются случайными. Например, количество пассажиров в вагоне метро, время между двумя последовательно поступившими телефонными звонками, рост, вес, размер обуви и т. д. для наугад выбранного человека, время службы электрической лампочки и многое-многое другое.

Случайной величиной (СВ) называется величина, которая в результате случайного эксперимента может принять то или иное значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин, учесть которые нельзя.

Случайные величины обозначают заглавными латинскими ($X, Y, Z\ldots$) или прописными греческими ($\xi, \eta, \gamma\ldots$) буквами.

Если множество возможных значений СВ представляет собой последовательность чисел, разделённых интервалом, (конечную или бесконечную), то такая СВ называется дискретной (ДСВ).

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – значения, которые может принимать случайная величина X. Одно и то же значение x_k может соответствовать нескольким элементарным событиям. Совокупность всех этих элементарных событий образует составное событие, состоящее в том, что $X = x_k$. Это событие обозначается $\left(X = x_k\right)$, а вероятность этого события обозначают $p_k = P(X = x_k)$.

Пример 1.

Подбрасываем две монеты. Определить СВ X - число появлений герба. Найти вероятности всех значений, которые принимает X.

Решение.

Пространство элементарных исходов в данном эксперименте: $\Omega = \{гг, гр, рг, рр\}$.

Определим функцию X на Ω:

$X(гг) = 2$, $X(гр) = 1$, $X(рг) = 1$, $X(рр) = 0$

Таким образом СВ X принимает три значения: 0, 1, 2. Вероятности этих значений:

$$p_1 = P(X = 0) = P(рр) = \frac{1}{4},$$

$$p_2 = P(X = 1) = P(гр) + P(рг) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$p_3 = P(X = 2) = P(гг) = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $P(X=0)=\frac{1}{4}$, $P(X=1)=\frac{1}{2}$, $P(X=2)=\frac{1}{4}$.

Случайная величина полностью описывается (с вероятностной точки зрения) заданием своего закона распределения. Система равенств $P(X = x_k) = = p_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где $0 \le p_k \le 1$, определяет *закон распределения (ряд распределения)* случайной величины X.

Обычно ряд распределения выписывают в виде таблицы, состоящей из двух строк. В верхней строке выписывают все значения, которые принимает дискретная СВ X, а в нижней строке выписываются соответствующие вероятности этих значений:

$x_k =$	0	1	2
$p_k =$	0,25	0,5	0,25

Основным свойством ряда распределения является то, что сумма всех чисел во второй строке равна единице, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1. \tag{3.1}$$

Пример 2. Один раз подбрасываем игральный кубик. Пусть случайная величина X - число очков на верхней грани. Составить ряд распределения X.

Решение.

Очевидно, что X принимает значения: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Вероятности этих значений:

$$P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = P(X=4) = \quad = P(X=5) = P(X=6) = \frac{1}{6}.$$

Ответ: Ряд распределения имеет вид:

$x_k =$	1	2	3	4	5	6
$p_k =$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\sum p_k = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = 1.$$

Пример 3. Производится стрельба до 1-го попадания, причем вероятность попадания при каждом выстреле одна и та же и равна 0,8, а выстрелы независимы. Для ДСВ X – число сделанных выстрелов, найти закон распределения. Рассмотреть два случая: а) боекомплект не ограничен; б) боекомплект состоит из 3 зарядов.

Решение.

Обозначим через A_k событие – попадание в k-ом выстреле, $k = 1,2,\dots$.

По условию: $P(A_k) = 0,8 = p$, $P(\overline{A}_к) = 0,2 = q = 1 - p$.

а) В случае неограниченного боекомплекта ДСВ X может принять любое натуральное значение n, причем:

$$p_n = P(X = n) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\dots\overline{A}_{n-1}A_n) = 0,2^{n-1}0,8, \quad n = 1,2,\dots .$$

Это пример аналитической формы закона распределения: $P(X = x_n) = G(x_n)$, где $G(x_n)$ – некоторая функция.

б) В случае ограниченного боекомплекта вероятности p_1 и p_2 :

$p_1 = 0,8$, $p_2 = 0,2 \cdot 0,8$.

Для p_3 имеем:

$p_3 = P(X = 3) = P(\text{боекомплект исчерпан}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2U) = 0,2^2 \cdot 1$, где U – достоверное событие, что третий выстрел последний независимо от результата.

Ответ: а) $P(X = n) = 0,2^{n-1}0,8, \quad n = 1,2,\dots .$

б) Ряд распределения имеет вид:

$x=$	1	2	3
$p=$	0,8	0,16	0,04

Графически дискретная случайная величина задается полигоном (многоугольником) распределения. Для этого на координатную плоскость наносятся точки с координатами (x_k, p_k) и соединяют их отрезками прямых.

Пример 4. Дискретная СВ X задана рядом распределения.

$x_k=$	-1	0	2	4	5	6
$p_k=$	0,1	0,2	0,3	0,1	p	0,1

Найти p и построить многоугольник распределения.

Решение.

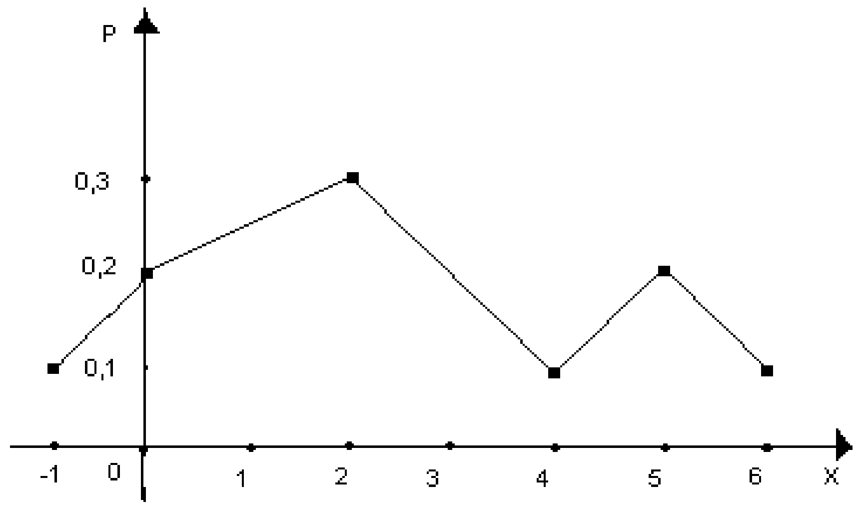
Неизвестную вероятность p найдем из свойства (1), то есть:

$p = 1 - 0{,}1 - 0{,}2 - 0{,}3 - 0{,}1 - 0{,}1 = 0{,}2$.

Таким образом:

x_k	-1	0	2	4	5	6
p_k	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1

Построим многоугольник распределения:



Ответ: $p = 0{,}2$.

3.2 Числовые характеристики

3.2.1. Математическое ожидание

Математическим ожиданием MX случайной величины X, принимающей значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$MX = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \,. \qquad (3.2)$$

Математическое ожидание СВ – это ее *среднее значение.*

Свойства математического ожидания.

1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$M(C) = C$.

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$M(CX) = CM(X)$.

3) Математическое ожидание суммы (разности) двух случайных величин равно сумме (разности) математических ожиданий слагаемых:

$M(Y \pm X) = M(Y) \pm M(X)$.

4) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$M(Y \cdot X) = M(Y) \cdot M(X)$.

Свойства 3 и 4 также справедливы для произвольного числа случайных величин.

Пример 5. Найти математическое ожидание для СВ X

x_k	-1	0	2	4	5	6
p_k	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1

Решение.

$MX = -1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}1 =$

$= -0{,}1 + 0{,}6 + 0{,}4 + 1 + 0{,}6 = 2{,}5$.

Ответ: $MX = 2{,}5$.

Пример 6. *X и Y - независимые СВ. Зная, что $MX = 2$, $MY = -3$, найти* $M(3Y + 2X + 9)$

Решение.

$M(3Y + 2X + 9) = M(3Y) + M(2X) + M(9) = 3M(Y) +$

$+ 2M(X) + 9 = 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 + 9 = 4;$

Ответ: 4.

3.2.2. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации

Дисперсией DX случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания:

$$DX = M(X - MX)^2. \qquad (3.3)$$

Обычно дисперсию вычисляют по более простой формуле:

$$DX = MX^2 - (MX)^2, \qquad (3.4)$$

где MX^2 - математическое ожидание СВ X^2, которое вычисляется по формуле:

$$MX^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k \qquad (3.5)$$

Среднеквадратичным отклонением σ_X случайной величины X называется квадратный корень из ее дисперсии:

$$\sigma_X = \sqrt{DX} \tag{3.6}$$

Среднеквадратичное отклонение показывает, чему равен *средний разброс* случайной величины вокруг ее среднего значения, её математического ожидания.

Свойства дисперсии.

1) Дисперсия любой СВ не может быть меньше нуля:

$DX \geq 0$.

2) Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$D(C) = 0$.

3) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$D(CX) = C^2 \cdot D(X)$.

4) Дисперсия суммы (разности) двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$D(Y \pm X) = D(Y) + D(X)$.

Пример 7. *X и Y - независимые СВ. Зная, что $DX = 3$, $DY = 4$, найти* $D(0{,}5Y - 2X + 1{,}5)$.

Решение.

$D(0{,}5Y - 2X + 1{,}5) = D(0{,}5Y) + D(2X) + D(1{,}5) = 0{,}5^2 D(Y) +$
$+ 2^2 D(X) + 0 = 0{,}25 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 13$.

Ответ: 13.

Коэффициент вариации случайной величины $V(X)$ – это мера относительного разброса случайной величины; показывает, какую долю среднего значения этой величины составляет её средний разброс. Исчисляется в процентах. Коэффициент вариации вычисляется по формуле:

$$V_X = \frac{\sigma(X)}{M(X)}. \tag{3.7}$$

Пример 8. Найти DX, σ_X, V_X для случайной величины X из примера 5

x_k	-1	0	2	4	5	6
p_k	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1

Решение.

Из примера 5 нам известно, что $MX = 2{,}5$

Найдем MX^2 по формуле (5):

$MX^2 = (-1)^2 \cdot 0{,}1 + 0^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}1 + 5^2 \cdot 0{,}2 + 6^2 \cdot 0{,}1 =$

$= 0{,}1 + 1{,}2 + 1{,}6 + 5 + 3{,}6 = 11{,}5.$

По формуле (4) найдем дисперсию:

$DX = 11{,}5 - 2{,}5^2 = 11{,}5 - 6{,}25 = 5{,}25$.

По формуле (6) найдем среднеквадратичное отклонение:

$\sigma_X = \sqrt{5{,}25} \approx 2{,}29$.

По формуле (7) найдем коэффициент вариации:

$V_X = \dfrac{2{,}29}{2{,}5} = 0.916$

Ответ: $DX = 5{,}25$ и $\sigma_X \approx 2.29$, $V_X = 0.916$.

3.2.3. Начальный и центральный моменты. Асимметрия и эксцесс.

Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k:

$$m_k = MX^k. \tag{3.8}$$

Для дискретной случайной величины:

$$m_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot p_i\ . \tag{3.9}$$

Начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию.

Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - m_1)^k$:

$$\mu_k = M(X - m_1)^k. \tag{3.10}$$

Для дискретной случайной величины:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_1)^k \cdot p_i\ . \tag{3.11}$$

Центральный момент первого порядка всегда равен нулю, а центральный момент второго порядка равен дисперсии.

Отношение центрального момента третьего порядка к среднему квадратическому отклонению в третьей степени называется *коэффициентом асимметрии*:

$$A_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} \tag{3.12}$$

Для характеристики островершинности и плосковершинности распределения используется величина, называемая *эксцессом:*

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 \ . \qquad (3.13)$$

3.2.4. Мода

Модой *Mo* дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение.

Если многоугольник распределения для дискретной случайной величины имеет два или несколько максимумов, то такое распределение называется двухмодальным или многомодальным. Если распределение имеет минимум, но не имеет максимума, то оно называется антимодальным.

Пример 9. Из ящика, содержащего 8 деталей, среди которых 2 нестандартные, наудачу извлечены 4 детали. Для СВ X – число нестандартных деталей среди извлеченных – построить ряд распределения, найти числовые характеристики.

Решение.

Нестандартных деталей среди извлеченных по условию задачи может быть 0, 1 и 2. Пользуясь классическим определением, находим вероятности возможных значений:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ где } n = C_8^4 = \frac{8!}{4!*4!} = 70;$$

$$p_0 = P(X = 0) = P(\text{ни одной нестандартной}) = \frac{C_6^4}{70} = 0,21;$$

$$p_1 = P(X = 1) = P(\text{ровно одна нестандартная}) = \frac{C_2^1 C_6^3}{70} = 0,58;$$

$$p_2 = P(X = 2) = P(\text{ровно две нестандартные}) = \frac{C_2^2 C_6^2}{70} = 0,21;$$

$p_0 + p_1 + p_2 = 1$.

Ряд распределения имеет вид:

$x=$	0	1	2
$p=$	0,21	0,58	0,21

Находим числовые характеристики:

$$M(X) = 0 \cdot 0,21 + 1 \cdot 0,58 + 2 \cdot 0,21 = 1;$$

$$D(X) = (-1)^2 0,21 + 0^2 0,58 + 1^2 0,21 = 0,42;$$

$$\sigma_X = \sqrt{0,42} \approx 0,648;$$

$$V_X = \frac{0,648}{1} = 0.648;$$

$$A_X = \frac{(-1)^3 0,21 + 0^2 0,58 + 1^3 0,21}{(0,648)^3} = 0;$$

$$E_X = \frac{(-1)^4 0,21 + 0^4 0,58 + 1^4 0,21}{(0,648)^4} - 3 = -0,619;$$

$$Mo = 1.$$

Ответ: $M(X) = 1;$ $D(X) = 0,42;$ $\sigma_x = \sqrt{0,42} \approx 0,648;$
$V_X = 0.648;$ $A_X = 0;$ $E_X = -0,619;$ $Mo = 1.$

3.3. Функция распределения дискретной случайной величины

Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называется функция действительного переменного x, определяемая соотношением:

$$F(x) = P(X < x). \tag{3.14}$$

Функцию распределения находят по формуле:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k) = \sum_{x_k < x} p_k \tag{3.15}$$

Функция распределения дискретной СВ является кусочно-постоянной, имеющей разрывы 1-го рода (скачки) в точках, в которых принимает значения случайная величина, причем величина скачка равна соответствующей вероятности. При этом в точке разрыва функция распределения принимает значение на левой ветви графика. Если дискретная СВ имеет наименьшее значение, то слева от него $F(x) = 0$. Если дискретная с.в. имеет наибольшее значение, то справа от него $F(x) = 1$.

Свойства функции распределения:

1) $F(x)$ определена при любом $x \in R$;
2) Значения $F(x)$ принадлежат интервалу $[0,1]$, т.е. $0 \le F(x) \le 1$;
3) $F(x)$ является неубывающей функцией;
4) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
5) $F(x)$ непрерывна слева, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$.

Пример 10. Найти функцию распределения случайной величины X и построить ее график.

x_k	-1	0	2	4	5	6
p_k	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1

Решение.

X принимает 6 разных значений. Значит, $F(x)$ принимает разные значения на 7-ми интервалах:

Если $x \le -1$, то $F(x) = 0$.

Если $-1 < x \le 0$, то $F(x) = 0{,}1$.

Если $0 < x \le 2$, то $F(x) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$.

Если $2 < x \le 4$, то $F(x) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}6$.

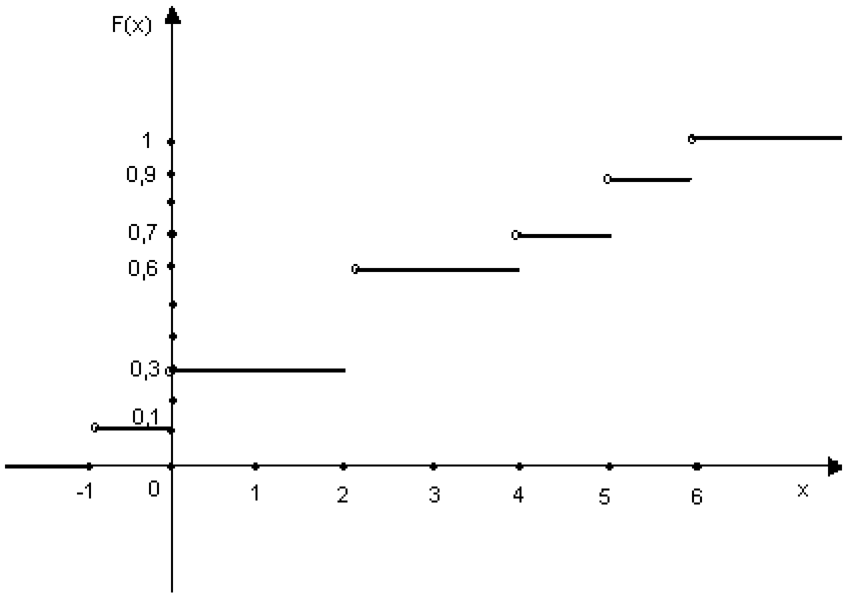
Если $4 < x \le 5$, то $F(x) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}7$.

Если $5 < x \le 6$, то $F(x) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}9$.

Если $x > 6$, то $F(x) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1$.

Ответ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 0{,}1, & -1 < x \le 0 \\ 0{,}3, & 0 < x \le 2 \\ 0{,}6, & 2 < x \le 4 \\ 0{,}7, & 4 < x \le 5 \\ 0{,}9, & 5 < x \le 6 \\ 1, & x > 6 \end{cases}$$



Вероятность попадания случайной величины в интервал $[a, b)$.

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \tag{3.16}$$

Пример 11. Для случайной величины X из примера 10 найти:
а) $P(X \le 0)$, б) $P(0 \le X < 5)$, в) $P(X \ge 5)$.

Решение.
а) $P(X \le 0) = P(X = -1) + P(X = 0) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$;
б) Воспользуемся формулой (16):
$P(0 \le X < 5) = F(5) - F(0) = 0{,}7 - 0{,}1 = 0{,}6$;
в) $P(X \ge 5) = P(5 \le X < \infty) = F(\infty) - F(5) = 1 - 0{,}7 = = 0{,}3$.

Ответ: $P(X \le 0) = 0{,}3$; $P(0 \le X < 5) = 0{,}6$; $P(X \ge 5) = 0{,}3$.

3.4. Наиболее распространенные законы распределения дискретных случайных величин.

3.4.1 Биномиальное распределение.

Вспомним схему Бернулли. Пусть проводится n одинаковых независимых случайных экспериментов, в каждом из которых может произойти только два противоположных события: A (успех) с вероятностью $p = P(A)$ и $\overline{A}$ (неудача) с вероятностью $q = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p$. Вероятность $P_n(k)$ того, что в результате n испытаний событие A наступит ровно k раз, вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \; k = 0, 1, \ldots, n \tag{3.17}$$

Количество успехов в схеме Бернулли является дискретной случайной величиной. Эта СВ называется *биномиальной* с параметрами n и p. Эта СВ принимает значения $k = 0, 1, \ldots, n$ с вероятностями:

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \tag{3.18}$$

Таким образом, ряд распределения биномиальной СВ имеет вид:

x_k	0	1	2	…	n
p_k	$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	$\frac{n(n-1)}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$	…	p^n

3.4.2. Геометрическое распределение.

Говорят, что случайная величина X имеет *геометрическое* распределение, если вероятности событий ($X = k$), $k = 1, 2, \ldots$ задаются соотношениями

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p = q^{k-1} p, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.19}$$

В этом случае ряд распределения случайной величины X имеет вид:

x_k	1	2	3	…,	n	…,
p_k	p	qp	$q^2 p$	…,	$q^{n-1} p$	…,

где $q = 1 - p$.

Вероятностный смысл геометрической СВ можно пояснить следующим образом. Пусть проводятся испытания Бернулли, но их количество заранее не ограничено. Пусть вероятность успеха в каждом отдельном испытании равна p (и, тем самым, вероятность неудачи равна $q = 1 - p$). Геометрическая СВ X – это номер испытания, в котором произойдет самый первый успех.

3.4.3 Распределение Пуассона.

Еще одна важная дискретная СВ получается, если рассматривать испытания Бернулли при $n \to \infty$ и $p \to 0$, причем так, что произведение np при этом стремится к некоторой постоянной величине λ. Для этой ситуации Пуассон доказал теорему, что вероятности $P_n(k)$ из формулы Бернулли (17) стремятся к пределу, равному $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

На практике принято считать, что теорему Пуассона можно применять для испытаний Бернулли, где n и p таковы, что $np < 10$. В качестве λ берется величина $\lambda = np$.

Случайная величина X имеет *распределение Пуассона*, если ее ряд распределения задается формулами

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \; \lambda > 0, \; k = 0,1,2,\ldots,n \qquad (3.20)$$

В таком случае ее ряд распределения есть:

x_i	0	1	2	…
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$	…

Значения вероятностей $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ можно находить по таблице значений функции Пуассона.

Математические ожидания и *дисперсии* для определенных выше случайных величин даны в следующей таблице:

Название распределения	Математическое ожидание	Дисперсия
биномиальное	np	npq
пуассоновское	λ	λ
геометрическое	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$

Пример 12. В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных. Найти математическое ожидание MX, дисперсию DX, среднеквадратическое отклонение σ_X и вероятность $P(0 \le X \le 2)$.

Решение.

СВ X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 4$ и $p = \frac{10}{100} = 0{,}1$ ($q = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$).

X принимает пять значений: 0, 1, 2, 3, 4.

Найдем вероятности этих значений по формуле Бернулли (18):

$$p_0 = P(X = 0) = C_4^0 \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}6561 = 0{,}6561,$$

$$p_1 = P(X = 1) = C_4^1 \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^3 = 4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}729 = 0{,}2916,$$

$$p_2 = P(X = 2) = C_4^2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 6 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}81 = 0{,}0486,$$

$$p_3 = P(X = 3) = C_4^3 \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^1 = 4 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}9 = 0{,}0036,$$

$$p_4 = P(X = 4) = C_4^4 \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^0 = 1 \cdot 0{,}0001 \cdot 1 = 0{,}0001,$$

$$\sum_k p_k = 0{,}6561 + 0{,}2916 + 0{,}0486 + 0{,}0036 + 0{,}0001 = 1.$$

Значит закон распределения СВ X имеет вид:

$x_k =$	0	1	2	3	4
$p_k =$	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Математическое ожидание:

$$MX = \sum_{k=0}^{4} x_k \cdot p_k = 0 \cdot 0{,}6561 + 1 \cdot 0{,}2916 + 2 \cdot 0{,}0486 +$$

$$+3\cdot 0{,}0036+4\cdot 0{,}0001=0{,}2916+0{,}0972+0{,}0108+$$
$$+0{,}0004=0{,}4=n\cdot p.$$

Дисперсия: $DX=MX^2-(MX)^2$.

Найдем MX^2:

$$MX^2=\sum_{k=0}^{4}x_k^2\cdot p_k=0^2\cdot 0{,}6561+1^2\cdot 0{,}2916+2^2\cdot 0{,}0486+$$
$$+3^2\cdot 0{,}0036+4^2\cdot 0{,}0001=0{,}2916+0{,}1944+0{,}0324+$$
$$+0{,}0016=0{,}52.$$

Таким образом:

$$DX=0{,}52-0{,}4^2=0{,}52-0{,}16=0{,}36=n\cdot p\cdot q.$$

Среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma_X=\sqrt{DX}=\sqrt{0{,}36}=0{,}6.$$

Вероятность попадания СВ в интервал:

$$P(0\le X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$
$$=0{,}6561+0{,}2916+0{,}0486=0{,}9963.$$

Ответ: $MX=0{,}4$, $DX=0{,}36$, $\sigma_X=0{,}6$ и $P(0\le X\le 2)=0.9963$.

Пример 13. В урне 2 белых и 3 черных шара. Шары наудачу извлекают из урны без возвращения до тех пор, пока не появится белый шар. Как только это произойдет, процесс прекращается. Составить таблицу распределения случайной величины X – числа произведенных опытов, найти $F(x), P(X\le 2), M(X), D(X)$.

Решение.

Обозначим через A – появление белого шара. Опыт может быть проведен только один раз, если белый шар появится сразу:

$$P(X=1)=P(A)=\frac{2}{5}=0{,}4.$$

Если же в первый раз белый шар не появился, а появился при втором извлечении, то X=2. Вероятность такого события равна

$$P(X=2)=P\left(\overline{A}A\right)=P\left(\overline{A}\right)P(A)=\frac{3}{5}\frac{2}{4}=0{,}3.$$

Аналогично:

$$P(X=3)=P\left(\overline{A}\overline{A}A\right)=P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right)P(A)=\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}=0{,}2,$$

$P(X=4)=P\left(\overline{A}\overline{A}\overline{A}A\right)=\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3}\frac{2}{2}=0{,}1$, $P(X=5)=\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3}\cdot 0\cdot 1=0$.

Запишем данные в таблицу:

X	1	2	3	4
P	0,4	0,3	0,2	0,1

Найдем $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}4, \text{ при } 1<x\le 2,\\ 0{,}7, \text{ при } 2<x\le 3,\\ 0{,}9, \text{ при } 3<x\le 4,\\ 1, \text{ при } x>4.\end{cases}$$

Найдем $P(X\le 2)=P(X=1 \text{ или } X=2)=0{,}4+0{,}3=0{,}7$.

$M(X)=1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}1=2$.

$D(X)=(1-2)^2\cdot 0{,}4+(2-2)^2\cdot 0{,}3+(3-2)^2\cdot 0{,}2+(4-2)^2\cdot 0{,}1=1$.

Ответ:

$$F(x)=\begin{cases}0, \textit{ при } x\le 1,\\ 0{,}4, \textit{ при } 1<x\le 2,\\ 0{,}7, \textit{ при } 2<x\le 3,\\ 0{,}9, \textit{ при } 3<x\le 4,\\ 1, \textit{ при } x>4.\end{cases}\quad P(X\le 2)=0{,}7;\ M(X)=2;\ D(X)=1.$$

3.5. Упражнения для самостоятельной работы

Для каждой случайной величины, рассматриваемой в задачах 1-4, найти ряд распределения, функцию распределения (аналитический вид и график), математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение и вероятности попадания случайной величины в указанные промежутки.

1. Случайная величина X принимает значения -1 и 1 с вероятностями $1/3$ и $2/3$ соответственно. Найти $P(X<-1)$, $P(X\le -1)$, $P(-1/2<X\le 1/2)$, MX, DX.

2. Одновременно один раз бросаются две монеты достоинством 2 ед. и 3 ед. Пусть X – сумма выпавших при этом цифр. Найти $P(2\le X<4)$, $P(X<0)$, MX, σ_X.

3. В магазин поступают 800 изделий с первой фабрики и 800 изделий со

второй. Первая фабрика дает некачественные изделия в 6% случаев, вторая - 4%. Найдите среднее число, дисперсию и среднеквадратическое отклонение числа X качественных изделий, поступивших в магазин.

4. Имеются два шестигранных кубика, две грани каждого из которых окрашены в чёрный цвет, а остальные четыре грани – в зелёный. Y – число выпавших зелёных граней при однократном бросании этих кубиков. Найти закон распределения СВ Y, $P(Y \geq 3)$, $P(Y < 1)$, MY, DY.

5. В ящике с 20 изделиями находится 6 дефектных. С целью контроля наудачу взято 7 изделий. Случайная величина X - число дефектных изделий в выборке. Требуется: 1) Составить таблицу распределения случайной величины X; 2) Построить многоугольник распределения; 3) Найти функцию распределения и построить ее график;4) Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X; 5) Найти вероятность $P(X<2)$.

6. Некто заполнил карточку спортивной лотереи «6 из 49». Случайная величина X – число угаданных им номеров при розыгрыше. 1) составить таблицу распределения случайной величины X; 2) построить многоугольник распределения; 3) найти функцию распределения и построить её график; 4) найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X; 5) найти вероятность $P(X>2)$.

3.6. Индивидуальные задания

Вариант 1

1 $D(X) = 1.5$. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X+5)$.

2 Вероятность появления события в одном испытании равна 0,6. Производится 5 испытаний. Составить закон распределения случайной величины X – числа появлений события. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-2	0	2	4	6
P	0,2	0,1	p	0,2	0,2

4 Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания первого равна 0,6, второго 0,8. Составить закон распределения числа попаданий X. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент и функцию распределения. Построить график $F(x)$.

5 В ящике 3 белых шара и 4 черных. Шары достают до тех пор, пока не появится белый шар. Составить закон распределения случайной величины X – числа испытаний. Найти $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$.

Вариант 2

1 X и Y – независимы. $D(X)$ =7, D(Y) =4. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X+3Y)$.

2 Производится три независимых опыта, в каждом из которых может произойти событие A с вероятностью 0,4. Вычислить таблицу для случайной величины X – числа появлений события A. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-1	10	15	18	20
P	0,3	p	0,3	0,2	0,1

4 Игральный кубик брошен один раз. Найти закон распределения случайной величины X – числа выпавших очков. Найти $M(X)$, $D(X)$, функцию распределения. Построить график $F(x)$.

5 Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует патроны). Найти математическое ожидание и дисперсию числа израсходованных патронов, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,25.

Вариант 3

1 $M(X)$ =6, $M(Y)$ =3. Используя свойства математического ожидания, найти $M(2X -3Y)$.

2 Вероятность выигрыша одного лотерейного билета равна 0,2. Составить таблицу распределения случайной величины X – числа выигрышей для владельца трех лотерейных билетов. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-1	1	2	3
P	0,2	0,3	p	0,1

4 Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет. Вычислить таблицу случайных величин – число бросков каждого баскетболиста, если вероятность попадания первого равна 0,4, а второго – 0,6.

5 В ящике 3 белых шара и 6 черных. Шары достают до тех пор, пока не появится белый шар. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа испытаний. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$.

Вариант 4

1 $D(X)$ =4.5. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X+5)$.

2 Составить закон распределения случайной величины X числа попаданий при четырех выстрелах, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Найти $F(x)$ и построить график. Вероятность попадания в мишень для данного стрелка при одном выстреле равна 0,7. Составить закон распределения случайной величины X –

числа попаданий при трех выстрелах. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	0	3	4	5	6
P	0,3	0,1	p	p	0,1

4 В урне 3 белых и 2 черных шара. Наудачу достают шары по одному без возвращения, до тех пор, пока не появится белый шар. Дискретная случайная величина X – число испытаний, проведенных при этом. Составить таблицу распределения X, найти $M(X)$, и $D(X)$.

5 В лотерее 100 билетов. Разыгрывается 8 вещей по 5 р., 4 вещи по 10 р. и одна по 20 р. Составить закон распределения суммы выигрыша для владельца лотерейного билета. Найти $M(X)$, $D(X)$, функцию распределения. Нарисовать ее график.

Вариант 5

1 X и Y – независимы. $D(X)$ =7, $D(Y)$ =4. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X+3Y)$.

2 В партии приборов 60% изделий повышенного качества. Наудачу взято 3 прибора. Составить таблицу распределения X – числа приборов повышенного качества среди отобранных. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	1	2	4	5
P	0,1	p	0,3	0,1

4 В партии из 9 деталей 5 стандартных. Наудачу отбираются для проверки 2 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа бракованных деталей среди отобранных. Найти $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$.

5 Два баскетболиста по очереди забрасывают мяч в корзину с вероятностью попадания для первого 0,9, для второго – 0,7. Составить таблицу распределения случайной величины X – числа попаданий в корзину, если каждый баскетболист делает по одному броску. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

Вариант 6

1 $M(X)$ =6, $M(Y)$ =5. Используя свойства мат.ожидания, найдите $M(2X+3Y)$.

2 Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,7. Составить таблицу распределения числа появления события при 4 испытаниях. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	p	0,2	0,3	0,1

4 В связке 5 ключей, из которых один подходит к двери. Дверь открывается путем опробований (предполагается, что опробованный ключ в дальнейших опробованиях не участвует). Составить таблицу распределения случайной величины X – числа опробований. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

5 В партии из 8 деталей – 6 стандартных. Наудачу отбирают 3 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X, числа стандартных деталей, среди отобранных. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Вариант 7

1 $M(X)$=5. Используя свойства математического ожидания, найдите $M(2X+5)$.

2 Вероятность попадания в мишень для данного стрелка равна 0,8. За каждое попадание стрелку зачитываются 5 очков. Составить таблицу распределения дискретной случайной величины X – числа выбитых очков при трех выстрелах. Найти $M(X)$, $D(X)$, построить $F(x)$.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-1	0	1	3	5
P	0,1	0,2	p	0,3	p

4 В коробке 6 теннисных мячей, из которых два окрашенных. Наудачу достают два мяча. Составить закон распределения случайной величины X – числа окрашенных мячей, попавших в выборку. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

5 Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого – 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,75, для четвертого – 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию числа станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа.

Вариант 8

1 $D(X)$ =4. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X+5)$.

2 В некотором цехе брак составляет 5% всех изделий. Составить таблицу распределения числа бракованных изделий из 6 взятых наудачу деталей. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-20	15	30	35	40
P	0,1	p	0,1	0,3	0,2

4 В урне 5 белых шаров и 25 черных. Вынули 1 шар. Случайная величина X – число вынутых белых шаров. Найти таблицу распределения и функцию распределения величины X. Найти Найти $M(X)$ и $D(X)$.

5 В партии из 6 деталей 4 стандартных. Наудачу для проверки выбираются 3 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа бракован-

ных деталей среди отобранных. Найти математическое ожидание, дисперсию, третий центральный момент и функцию распределения.

Вариант 9

1 X и Y – независимы. $D(X)$ =6, $D(Y)$ =3. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X+3Y)$.

2 Монету подбрасывают 7 раз. Найти математическое ожидание и дисперсию числа появлений герба. Составить таблицу распределения X – числа появлений герба.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	1	5	6	7	10
P	0,1	0,3	0,3	p	0,1

4 В лотерее разыгрывается 400 билетов. В том числе 10 вещей по 5 р., 20 вещей по 10 р. и одна по 20 р. Составить закон распределения суммы выигрыша для владельца одного лотерейного билета. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $F(x)$.

5 В партии 7 деталей 3 бракованные. Контролер наудачу достает 4 детали. Составить закон распределения случайной величины X – числа годных деталей в выборке. Найти математическое ожидание и дисперсию X. Построить график функции распределения.

Вариант 10

1 $M(X)$ =6, $M(Y)$ =4. Используя свойства математического ожидания, найдите $M(2X+3Y)$.

2 Игральную кость бросили 12 раз. Найти математическое ожидание и дисперсию числа появлений единицы.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-2	1	2	3
P	0,3	0,2	p	0,1

4 Игральный кубик брошен два раза. Составить закон распределения X – числа выпавших очков. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

5 Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8. Составить закон распределения случайной величины X – числа попаданий в мишень. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

Вариант 11

1 $M(X)$=3. Используя свойства математического ожидания, найдите $M(2X+5)$.

2 Изделия испытывают при перегрузочных режимах. Вероятности для каждого изделия пройти испытание равны 0,8 и независимы. Испытания заканчиваются после первого же изделия, после первого же изделия, не выдержавшего испытания. Найти распределение числа испытаний.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$,

$P(X \ge 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	1	2	3	4
P	p	0,5	0,1	0,1

4 Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8. Составить закон распределения случайной величины X – числа попаданий в мишень. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

5 Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания первого равна 0,6, второго 0,8. Составить закон распределения числа попаданий X. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент и функцию распределения. Построить график $F(x)$.

Вариант 12

1 $D(X)$ =3. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X+5)$

2 Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,9. Составить таблицу распределения числа появления события при 5 испытаниях. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \ge 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-3	-2	-1	0	1
P	0,3	p	0,2	p	0,3

4 Игральный кубик брошен один раз. Найти закон распределения случайной величины X – числа выпавших очков. Найти $M(X)$, $D(X)$, функцию распределения. Построить график $F(x)$.

5 В партии 7 деталей 3 бракованные. Контролер наудачу достает 4 детали. Составить закон распределения случайной величины X – числа годных деталей в выборке. Найти математическое ожидание и дисперсию X. Построить график функции распределения.

Вариант 13

1 X и Y – независимы, $D(X)$ =6, $D(Y)$ = 2. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X+3Y)$

2 Вероятность появления события в одном опыте равна 0,5. Составить закон распределения X – числа появлений события в 4-х опытах. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \ge 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-1	0	1	4	6
P	0,5	p	p	0,1	0,2

4 В партии из 6 деталей 4 стандартных. Наудачу для проверки выбираются 3 детали.

Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа бракованных деталей среди отобранных. Найти математическое ожидание, дисперсию, третий центральный момент и функцию распределения.

5 В лотерее 100 билетов. Разыгрывается 8 вещей по 5 р., 4 вещи по 10 р. и одна по 20 р. Составить закон распределения суммы выигрыша для владельца лотерейного билета. Найти $M(X)$, $D(X)$, функцию распределения. Нарисовать ее график.

Вариант 14

1 $M(X)$=6, $M(Y)$ =2. Используя свойства математического ожидания, найти $M(2X - 3Y)$.

2 В ящике 5 белых шаров и 5 черных. Наудачу достают шар, записывают цвет и возвращают обратно в ящик. Составить закон распределения числа появлений белого шара, если шары доставали 4 раза. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $F(x)$.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	2	4	6	8	10
P	0,1	0,3	0,3	p	0,1

4 В коробке 6 теннисных мячей, из которых два окрашенных. Наудачу достают два мяча. Составить закон распределения случайной величины X – числа окрашенных мячей, попавших в выборку. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

5 Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет. Вычислить таблицу случайных величин – число бросков каждого баскетболиста, если вероятность попадания первого равна 0,4, а второго – 0,6.

Вариант 15

1 $M(X)$ =2.5. Используя свойства математического ожидания, найдите $M(2X+5)$.

2 Вероятность появления события в одном опыте равна 0,4. Составить закон распределения случайной величины X – числа появлений события в 4-х опытах. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $F(x)$.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	1	3	5	6	7
P	0,1	0,3	p	p	0,1

4 Два баскетболиста по очереди забрасывают мяч в корзину с вероятностью попадания для первого 0,9, для второго – 0,7. Составить таблицу распределения случайной величины X – числа попаданий в корзину, если каждый баскетболист делает по одному броску. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

5 В партии из 8 деталей – 6 стандартных. Наудачу отбирают 3 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X, числа стандартных деталей, среди отобранных. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Вариант 16

1 $D(X)$ =2.5. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X+5)$.

2 Составить закон распределения числа появления пятерки при трех подбрасываниях игрального кубика. Найти математическое ожидание и дисперсию числа появлений.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-3	-2	0	2	3
P	0,2	p	0,2	0,3	0,2

4 В партии из 9 деталей 5 стандартных. Наудачу отбираются для проверки 2 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа бракованных деталей среди отобранных. Найти $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$.

5 В связке 5 ключей, из которых один подходит к двери. Дверь открывается путем опробований (предполагается, что опробованный ключ в дальнейших опробованиях не участвует). Составить таблицу распределения случайной величины X – числа опробований. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Вариант 17

1 X и Y – независимы. $D(X) = 5$, $D(Y) = 2$. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X+3Y)$.

2 Вероятность появления события в одном испытании равна 0,6. Производится 5 испытаний. Составить закон распределения случайной величины X – числа появлений события. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-3	-6	9	12	15
P	0,3	0,1	p	0,2	0,1

4 В ящике 3 белых шара и 6 черных. Шары достают до тех пор, пока не появится белый шар. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа испытаний. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$.

5 Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого – 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,75, для четвертого – 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию числа станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа.

Вариант 18

1 $M(X)$ =4, $M(Y)$ =6. Используя свойства мат. ожидания, найдите $M(2X+3Y)$.

2 Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Составить таблицу распределения числа появления события при 5 испытаниях. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение данной СВ.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	4	5	6	7	8
P	0,3	p	0,3	p	0,1

4 В урне 3 белых и 2 черных шара. Наудачу достают шары по одному без возвращения, до тех пор, пока не появится белый шар. Дискретная случайная величина X – число испытаний, проведенных при этом. Составить таблицу распределения X, найти $M(X)$, и $D(X)$.

5 В урне 5 белых шаров и 25 черных. Вынули 1 шар. Случайная величина X – число вынутых белых шаров. Найти таблицу распределения и функцию распределения величины X. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Вариант 19

1 $M(X)$=2. Используя свойства математического ожидания, найдите $M(2X+5)$.

2 Вероятность появления события в одном опыте равна 0,6. Составить закон распределения X – числа появлений события в 4-х опытах. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-2	-1	0	1
P	0,2	p	0,4	0,1

4 Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует патроны). Найти математическое ожидание и дисперсию числа израсходованных патронов, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,25.

5 В лотерее разыгрывается 400 билетов. В том числе 10 вещей по 5 р., 20 вещей по 10 р. и одна по 20 р. Составить закон распределения суммы выигрыша для владельца одного лотерейного билета. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $F(x)$.

Вариант 20

1 $D(X)$ =2. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X+5)$.

2 Производится три независимых опыта, в каждом из которых может произойти событие A с вероятностью 0,4. Вычислить таблицу для случайной величины X – числа появлений события A. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	4	5	6	8
P	0,1	0,5	p	0,1

4 В ящике 3 белых шара и 4 черных. Шары достают до тех пор, пока не появится белый шар. Составить закон распределения случайной величины X – числа испытаний. Найти $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$.

5 Игральный кубик брошен два раза. Составить закон распределения X – числа выпавших очков. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

Вариант 21

1 X и Y – независимы. $D(X) = 5$, $D(Y) = 2$. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X+3Y)$.

2 В ящике 5 белых шаров и 5 черных. Наудачу достают шар, записывают цвет и возвращают обратно в ящик. Составить закон распределения числа появлений белого шара, если шары доставали 4 раза. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $F(x)$.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-3	-1	0	3	5
P	0,1	0,3	0,2	p	0,1

4 Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания первого равна 0,6, второго 0,8. Составить закон распределения числа попаданий X. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент и функцию распределения. Построить график $F(x)$.

5 Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует патроны). Найти математическое ожидание и дисперсию числа израсходованных патронов, если вероятность попадания при каждом выстреле 0,25.

Вариант 22

1 $M(X) = 5$, $M(Y) = 2$. Используя свойства мат. ожидания, найдите $M(2X - 3Y)$.

2 Изделия испытывают при перегрузочных режимах. Вероятности для каждого изделия пройти испытание равны 0,8 и независимы. Испытания заканчиваются после первого же изделия, после первого же изделия, не выдержавшего испытания. Найти распределение числа испытаний.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-2	-1	1	2	5
P	0,1	p	0,2	0,3	p

4 Игральный кубик брошен один раз. Найти закон распределения случайной величины X – числа выпавших очков. Найти $M(X)$, $D(X)$, функцию распределения. Построить график $F(x)$.

5 В урне 3 белых и 2 черных шара. Наудачу достают шары по одному без возвращения, до тех пор, пока не появится белый шар. Дискретная СВ X – число испытаний, проведенных при этом. Составить таблицу распределения X, найти $M(X)$, и $D(X)$.

Вариант 23

1 $M(X) = 1.5$. Используя свойства математического ожидания, найдите $M(2X+5)$.

2 Составить закон распределения случайной величины X числа попаданий при четырех выстрелах, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Найти $F(x)$ и построить график Вероятность попадания в мишень для данного стрелка при одном выстреле равна 0,7. Составить закон распределения случайной величины X –

числа попаданий при трех выстрелах. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-3	-2	-1	0	1
P	0,1	0,3	p	0,3	0,2

4 В лотерее 100 билетов. Разыгрывается 8 вещей по 5 р., 4 вещи по 10 р. и одна по 20 р. Составить закон распределения суммы выигрыша для владельца лотерейного билета. Найти $M(X)$, $D(X)$, функцию распределения. Нарисовать ее график.

5 В ящике 3 белых шара и 6 черных. Шары достают до тех пор, пока не появится белый шар. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа испытаний. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$.

Вариант 24

1 $D(X)$ =4. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X+5)$.

2 Вероятность выигрыша одного лотерейного билета равна 0,2. Составить таблицу распределения случайной величины X – числа выигрышей для владельца трех лотерейных билетов. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-1	0	6	7	8
P	0,1	p	p	0,2	0,1

4 Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет. Вычислить таблицу случайных величин – число бросков каждого баскетболиста, если вероятность попадания первого равна 0,4, а второго – 0,6.

5 В партии из 9 деталей 5 стандартных. Наудачу отбираются для проверки 2 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа бракованных деталей среди отобранных. Найти $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$.

Вариант 25

1 X и Y – независимы. $D(X)$ =6, $D(Y)$ =3. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X+3Y)$.

2 В партии приборов 60% изделий повышенного качества. Наудачу взято 3 прибора. Составить таблицу распределения X – числа приборов повышенного качества среди отобранных. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-2	-1	0	3
P	0,3	0,2	p	0,1

4 Два баскетболиста по очереди забрасывают мяч в корзину с вероятностью попадания для первого 0,9, для второго – 0,7. Составить таблицу распределения случайной

величины X – числа попаданий в корзину, если каждый баскетболист делает по одному броску. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

5 В партии из 8 деталей – 6 стандартных. Наудачу отбирают 3 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X, числа стандартных деталей, среди отобранных. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Вариант 26

1 $M(X) = 6$, $M(Y) = 6$. Используя свойства математического ожидания, найдите $M(2X+3Y)$.

2 Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,7. Составить таблицу распределения числа появления события при 4 испытаниях. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-5	6	7	8
P	0,3	0,5	p	0,1

4 В связке 5 ключей, из которых один подходит к двери. Дверь открывается путем опробований (предполагается, что опробованный ключ в дальнейших опробованиях не участвует). Составить таблицу распределения случайной величины X – числа опробований. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

5 В коробке 6 теннисных мячей, из которых два окрашенных. Наудачу достают два мяча. Составить закон распределения случайной величины X – числа окрашенных мячей, попавших в выборку. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

Вариант 27

1 $D(X)$ =6. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X+5)$.

2 Вероятность попадания в мишень для данного стрелка равна 0,8. За каждое попадание стрелку зачитываются 5 очков. Составить таблицу распределения дискретной случайной величины X – числа выбитых очков при четырех выстрелах. Найти $M(X)$, $D(X)$, построить $F(x)$.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	3	4	5	6	10
P	0,3	p	0,2	0,1	0,3

4 Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого – 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,75, для четвертого – 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию числа станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа.

5 В партии из 6 деталей 4 стандартных. Наудачу для проверки выбираются 3 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа брако-

ванных деталей среди отобранных. Найти математическое ожидание, дисперсию, третий центральный момент и функцию распределения.

Вариант28

1 X и Y – независимы. $D(X)$ =6, $D(Y)$ =5. Используя свойства дисперсии, найдите $D(2X+3Y)$.

2 В некотором цехе брак составляет 5% всех изделий. Составить таблицу распределения числа бракованных изделий из 6 взятых наудачу деталей. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	-1	0	1	3	7
P	0,1	0,5	p	0,1	0,2

4 В урне 5 белых шаров и 25 черных. Вынули 1 шар. Случайная величина X – число вынутых белых шаров. Найти таблицу распределения и функцию распределения величины X. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

5 В партии 7 деталей 3 бракованные. Контролер наудачу достает 4 детали. Составить закон распределения случайной величины X – числа годных деталей в выборке. Найти математическое ожидание и дисперсию X. Построить график функции распределения.

Вариант 29

1 $M(X)$=6. Используя свойства математического ожидания, найдите $M(2X+5)$.

2 Монету подбрасывают 7 раз. Найти математическое ожидание и дисперсию числа появлений герба. Составить таблицу распределения X – числа появлений герба.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	2	4	6	7	9
P	0,3	p	0,3	0,05	0,05

4 Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8. Составить закон распределения случайной величины X – числа попаданий в мишень. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

5 Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8. Составить закон распределения случайной величины Х – числа попаданий в мишень. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

Вариант 30

1 $D(X)$ =4. Используя свойства дисперсии, найдите $D(4X-5)$.

2 Игральную кость бросили 12 раз. Найти математическое ожидание и дисперсию числа появлений единицы.

3 Случайная величина X задана таблицей распределения. Найти: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(X \geq 2)$, A_x, E_x. Построить полигон и график функции распределения.

X	0	4	5	6	7
P	0,1	p	0,3	0,2	0,1

4 Игральный кубик брошен два раза. Составить закон распределения X – числа выпавших очков. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$.

5 В урне 5 белых шаров и 25 черных. Вынули 1 шар. Случайная величина X – число вынутых белых шаров. Найти таблицу распределения и функцию распределения величины X. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

4. Непрерывная случайная величина

4.1. Плотность и функция распределения

Случайная величина называется *непрерывной* (НСВ), если ее функция распределения $F(x) = P(X < x)$ непрерывна при любом x и имеет производную $F'(x)$ везде, кроме, может быть, конечного числа точек.

Свойства функции распределения непрерывной СВ аналогичны свойствам 1-4 функции распределения дискретной СВ, а свойство 5 заменяем на свойство кусочно-дифференцируемости $F(x)$ при всех $x \in R$.

Производная от функции распределения (при условии, что она существует при всех $x \in R$, за исключением, может быть, конечного числа точек) называется *плотностью распределения* и обозначается $f(x)$:

$$f(x) = F'(x) \tag{4.1}$$

Свойства плотности распределения.

1) Т.к. плотность распределения является производной неубывающей функции $F(x)$, то она неотрицательна, то есть $f(x) \geq 0$.

2) Основное свойство плотности распределения любой непрерывной СВ выражается формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{4.2}$$

3) Для нахождения функции распределения по известной плотности используется формула:

$$F(x) = P\left(X < x\right) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{4.3}$$

4) $P(x < X < x + \Delta x) \approx f(x)\Delta x$.

5) Если $P(a < X < b) = 1$, то $f(x) = 0$ вне $[a,\ b]$.

Пример 1. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ A\sin 2x, 0 < x \leq \dfrac{\pi}{4} \\ 1, x > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Найти постоянную A, функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение.

Для нахождения постоянной A, используем условие непрерывности функции распределения $F(x)$:

с одной стороны $F(\pi/4) = A \cdot \sin 2\frac{\pi}{4} = A \cdot \sin\frac{\pi}{2} = A$,

а с другой стороны $F(\pi/4) = 1$.

Следовательно, A=1 и

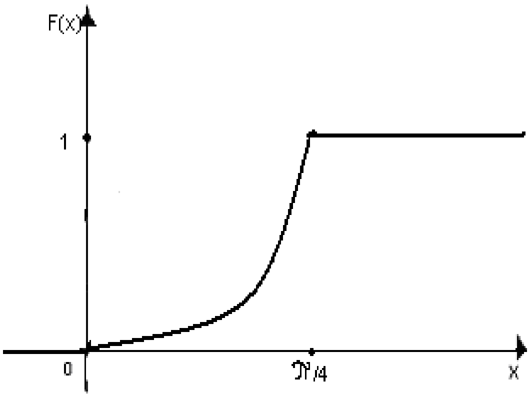
$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \sin 2x, 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ 1, x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

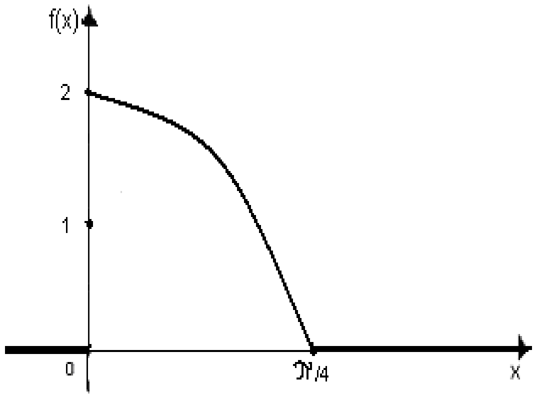
Для нахождения функции плотности распределения, используем формулу (1).

Продифференцируем функцию $F(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 2\cos 2x, 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, x > \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$.





Пример 2.

Дана функция плотности вероятности непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 \cdot e^{-x}, x \ge 0 \\ 0, \qquad x < 0 \end{cases}$$

Найти коэффициент *a* и функцию распределения СВ *X*.

Решение.

Коэффициент *a* определим с помощью основного свойства функции *f*(*x*) по формуле (2). В нашем случае $\int_0^{\infty} ax^2e^{-x}dx = 1$. Отсюда $a = \dfrac{1}{\int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx}$

Дважды воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx = \begin{Bmatrix} u = x^2, & du = 2xdx \\ dv = e^{-x}dx, & v = -e^{-x} \end{Bmatrix} = -x^2e^{-x}\Big|_0^{\infty} +$$

$$+2\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \begin{Bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^{-x}dx, & v = -e^{-x} \end{Bmatrix} = \lim_{x\to\infty}\left(-x^2e^{-x}\right) + 0 +$$

$$+2\left(-xe^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}dx\right) = 0 + 2\left(\lim_{x\to\infty}\left(-xe^{-x}\right) + 0\right) -$$

$$-2e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 0 - 2\lim_{x\to\infty} e^{-x} - \left(-2e^0\right) = 0 + 2 = 2.$$

Следовательно, $a = \frac{1}{2}$ и плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 \cdot e^{-x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Функция распределения *F*(*x*) случайной величины *X* определяется по формуле (3): $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Получаем:

Если $x < 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$.

Если $x \ge 0$, то:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^{x} \frac{1}{2}x^2e^{-x}dx = -\frac{x^2 + 2x + 2}{2}e^{-x}\Big|_0^{x} = 1 - \frac{x^2 + 2x + 2}{2}e^{-x}.$$

Итак, получаем результат и для *a*, и для *F*(*x*):

Ответ: $a = \frac{1}{2}$, $F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2 + 2x + 2}{2}e^{-x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$.

Пример 3.

Задана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ b(1-x), & 0<x\le 1,\\ 1/2x^2, & x>1.\end{cases}$$ Найти b, $F(x)$.

Решение.

Найдем b из свойства (2.3):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\int_{0}^{1} b(1-x)dx+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{2x^2}dx=0-b\left.\frac{(1-x)^2}{2}\right|_0^1-$$

$$-\left.\frac{1}{2x}\right|_1^{+\infty}=-\frac{b}{2}(0-1)-\frac{1}{2}(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-1)=\frac{b}{2}+\frac{1}{2},\quad\Rightarrow\quad \frac{b}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

откуда $b=1$.

Следовательно,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-x, & 0<x\le 1,\\ \dfrac{1}{2x^2}, & x>1.\end{cases}\quad \text{или}\quad f(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ 1-t, & 0<t\le 1,\\ \dfrac{1}{2t^2}, & t>1.\end{cases}$$

Найдем $F(x)$:

Используем формулу (3).

Если $x\le 0$, то:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0.$$

Если $0<x\le 1$, то:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{x}(1-t)dt=\left.\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\right|_0^x=x-\frac{x^2}{2},$$

Если $x>1$, то:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{1}(1-t)dt+\int_{1}^{x}\frac{1}{2t^2}dt=\left.(t-\frac{t^2}{2})\right|_0^1-\left.\frac{1}{2t}\right|_1^x=1-\frac{1}{2x}.$$

Ответ: $b=1$, $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x-x^2/2, & 0<x\le 1,\\ 1-\dfrac{1}{2x}, & x>1.\end{cases}$

4.2. Вероятность попадания в некоторый интервал значения НСВ.

Если случайная величина X непрерывна, то ее возможные значения заполняют целиком некоторый конечный или бесконечный интервал, и вероятность того, что X примет конкретное значение x_0, равна нулю, т.е. $P(X = x_0) = 0$.

Поэтому для непрерывной СВ *вероятности попадания в интервал* можно вычислить по формулам:

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) =$$
$$= P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (4.4)$$

Из двух вариантов формулы, разумеется, проще тот, где вероятность попадания непрерывной СВ в интервал выражается через функцию распределения $F(x)$: гораздо легче вычислить $F(b) - F(a)$, чем интегрировать. Но это при условии, что функция распределения $F(x)$ известна! Если же известна только плотность распределения $f(x)$, то нахождение функции распределения $F(x)$ является, как отмечено выше, достаточно непростой задачей – во всяком случае, явно более сложной, чем вычисление интеграла в формуле (4).

В случае нахождения вероятности попадания непрерывной СВ в бесконечный интервал по формуле $F(b) - F(a)$ будут возникать конструкции, условно записываемые как $F(+\infty)$ и $F(-\infty)$. Понимать их нужно следующим образом: $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

4.3 Числовые характеристики НСВ

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется число, которое вычисляется по формуле:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \qquad (4.5)$$

Дисперсией непрерывной случайной величины называется число $DX = M(X - MX)^2$, которое удобно вычислять по формуле

$$DX = MX^2 - (MX)^2, \qquad (4.6)$$

где

$$MX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx. \qquad (4.7)$$

Среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma_X = \sqrt{DX}. \qquad (4.8)$$

Свойства математического ожидания MX и дисперсии DX для непрерывной случайной величины совпадают с аналогичными свойствами дискретной случайной величины.

Мода Mo непрерывной случайной величины – такое значение случайной величины, при которой плотность распределения имеет максимум $f(M_0) = \max$.

Медианой M_D случайной величины X называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины: $P(X < M_D) = P(X > M_D)$. Для непрерывной СВ геометрически медиана – абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой плотности распределения, делится пополам

Начальный момент порядка k для непрерывной случайной величины:

$$m_k = MX^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx. \tag{4.9}$$

Центральный момент порядка k для непрерывной случайной величины:

$$\mu_k = M(X - m_1)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^k f(x)dx. \tag{4.10}$$

Коэффициенты асимметрии и эксцесса для непрерывной случайной величины вычисляются также как и для дискретной случайной величины.

Пример 4

Дана функция распределения $F(x)$ НСВ X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax^2, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти: a, $f(x)$, MX, DX, $P(0 < X \le 1)$, $P(X > 1/2)$.

Решение.

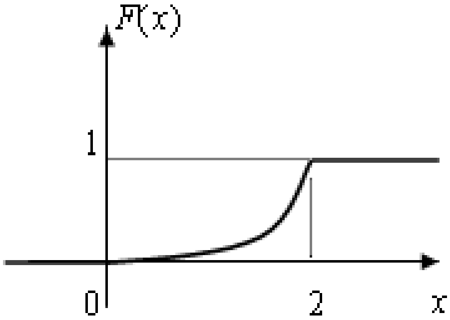
Определим a из условия непрерывности $F(x)$ при любых значениях x. Ясно, что внутри каждого из интервалов $F(x)$ непрерывна, поэтому осталось использовать непрерывность в точках $x = 0$ и $x = 2$. Заметим, что условие непрерывности в точке $x = 0$ выполняется при всех a, т.к. $\lim\limits_{x \to 0-} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} F(x) = \lim\limits_{x \to 0+} ax^2 = 0$, $F(0) = 0$, т. е. $\lim\limits_{x \to 0-} F(x) = \lim\limits_{x \to 0+} F(x) = F(0) = 0$.

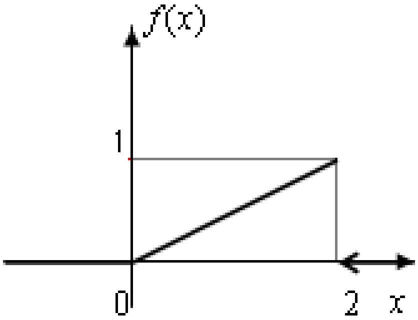
Используем условие непрерывности в точке $x = 2$, вычислив в этой точке оба односторонних предела и приравняв их: $\lim\limits_{x \to 2-} F(x) = \lim\limits_{x \to 2-} ax^2 = a \cdot 4$; $\lim\limits_{x \to 2+} F(x) = \lim\limits_{x \to 2+} 1 = 1$. Отсюда следует, что функция $F(x)$ будет непрерывна при $x = 2$, если $4a = 1$, то есть, если $a = 1/4$.

Итак, $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{1}{4}x^2, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

Из (1) следует, что $f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{1}{2}x, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

Заметим, что $f(x)$ имеет разрыв при $x=2$.





Согласно (5) и (7)

$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}dx=\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2=\frac{4}{3},$$

$$MX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^2 x^2\cdot\frac{x}{2}dx=\left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2=2.$$

Согласно (6)

$$DX=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}.$$

Из (4) имеем:

$$P(0<X\le 1)=F(1)-F(0)=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4};$$

$$P(X>1/2)=P(1/2<X<+\infty)=F(+\infty)-F(1/2)=1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}..$$

Ответ: $a=1/4$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{1}{2}x, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$, $MX=4/3$, $DX=2/9$,

$P(0<X\le 1)=1/4$, $P(X>1/2)=15/16$.

Пример 5. НСВ X задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\cdot x^2, \text{при} & -1<x<1\\ 0 \quad , \text{при} & x\le -1,\ x\ge 1.\end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения;

б) числовые характеристики;

в) вероятность $P(|X-MX|<\sigma)$;

г) вероятность того, что в 10 независимых наблюдениях СВ X ровно 7 раз примет положительные значения.

Решение.

а) Связь между плотностью и функцией распределения устанавливается использованием определения плотности, отражённом в свойстве (3):

$$F(x)=P(X<x)=P(-\infty<X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Для нашей задачи имеем:

1) при $x\le -1$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dx=0;$

2) при $-1<x<1$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{1} 0dx+\int_{-1}^{x} kx^2dx=k\dfrac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{x}=\dfrac{(x^3+1)}{2};$

3) при $x>1$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{-1} 0dx+\int_{-1}^{1} kx^2dx+\int_{1}^{x} 0dx=1.$

Итак, получили:

$$F(x)=\begin{cases}0, \quad \text{при} \quad x\le -1,\\ 0,5(x^3+1), \quad \text{при} \quad -1<x\le 1\\ 1, \quad \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

б) Находим числовые характеристики:

Математическое ожидание: $M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx=\int_{-1}^{1} x\,k\,x^2dx=\dfrac{kx^4}{4}\Bigg|_{-1}^{1}=0.$

Дисперсия: $D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-M(x)\right]^2 f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} x^2kx^2dx=\dfrac{kx^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1}=0,6.$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=0,775.$

Коэффициент вариации: $V(x)=\dfrac{\sigma(x)}{M(x)}$ – не существует.

Асимметрия: $A(x)=\dfrac{1}{\sigma^3(x)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M(x))^3 f(x)\,dx=0{,}6^{\frac{-3}{2}}\int\limits_{-1}^{1}x^3kx^2dx=0.$

Эксцесс: $E(x)=\dfrac{1}{\sigma^4(x)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M(x))^4 f(x)\,dx-3=0{,}6^{-2}\int\limits_{-1}^{1}x^4kx^2dx-3=-1{,}810$

Мода для НСВ – это точка максимума плотности распределения. В нашей задаче такой точки нет, а есть, напротив, точка минимума: x = 0. Такое распределение называют антимодальным. Оно является и мультимодальным распределением, так как $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to+1-0} f(x)=\dfrac{3}{2}$.

Медиана μ формально находится из равенства:

$$\int\limits_{-\infty}^{\mu} f(x)dx=\int\limits_{\mu}^{+\infty} f(x)dx.$$

В нашем примере:

$$\int\limits_{-1}^{\mu} kx^2dx=\int\limits_{\mu}^{1} kx^2dx.$$

Геометрически медиана – это точка, в которой площадь под плотностью делится пополам. Т.к. наше распределение симметрично относительно x = 0, то медиана μ = 0. Кстати, равенство $M(x)$ = 0 также следует из этой симметрии.

в) $P(|X-0|<0{,}775)=P(-0{,}775<X<0{,}775)=\int\limits_{-0{,}775}^{0{,}775} kx^2dx=0{,}775^3=0{,}465.$

г) Каждое из 10 наблюдений СВ X – это испытание, в котором может появиться событие $A=\{x>0\}$. Вероятность этого события:

$$p=P(X>0)=\int\limits_{0}^{1} kx^2dx=0{,}5.$$

Тогда искомая вероятность семи положительных значений в 10 наблюдениях определяется по формуле Бернулли, то есть:

Ответ:

а) $P(10;7)=P_{10}\left(7\right)=C_{10}^{7}\cdot 0{,}5^7\cdot(1-0{,}5)^{10-7}=0{,}117;$

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le -1,\\ 0{,}5(x^3+1), & \text{при} \quad -1<x\le 1,\\ 1, & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

б) $M(x)=0$, $D(x)=0{,}6$, $\sigma(x)=0{,}775$, $A(x)=0$, $E(x)=-1{,}810$, антимодальное распределение, медиана равна математическому ожиданию $M(x)=0$.

в) $P(|X-0|<0{,}775)=0{,}465$,

г) $P(10;7)=0{,}117$.

4.5. Наиболее распространенные законы распределения непрерывных случайных величин.

4.5.1. Равномерное распределение.

Непрерывная случайная величина X называется распределенной *равномерно* на интервале $[a,b]$, если ее плотность $f(x)$ имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases} \tag{4.11}$$

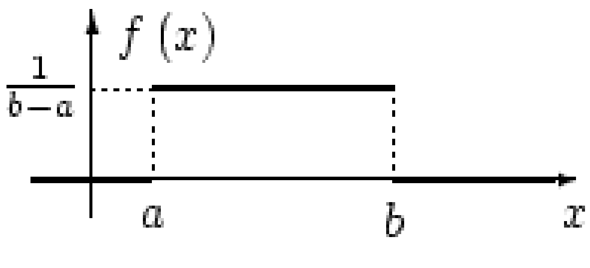
Очевидно,

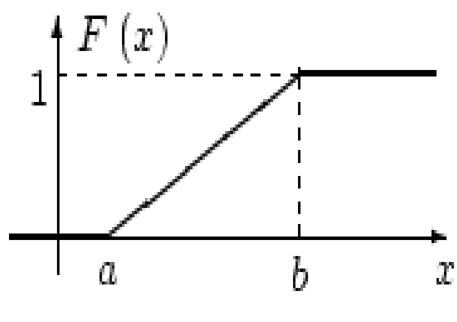
$$f(x)\ge 0 \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_a^b \frac{dx}{b-a}=1,\; MX=\frac{a+b}{2},\; DX=\frac{(a-b)^2}{12}. \tag{4.12}$$

Функция распределения равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$ случайной величины имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases} \tag{4.13}$$

Графики плотности распределения и функции распределения равномерной СВ имеют вид:





Пример 6. Случайная величина X задана с плотностью

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & \text{при } x\in[4;8],\\ 0 & \text{при } x\notin[4;8].\end{cases}$$

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение.

Это равномерное распределение на отрезке $[4,8]$.

Параметры распределения: $a=4$, $b=8$.

Математическое ожидание и дисперсию найдем через параметры по формулам (12):

$$MX=\frac{a+b}{2}=\frac{8+4}{2}=6,$$

$$DX=\frac{(a-b)^2}{12}=\frac{(4-8)^2}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}.$$

Ответ: $MX=6$, $DX=\dfrac{4}{3}$.

4.5.2. Показательное распределение

Случайная величина X называется распределенной по *показательному* (или *экспоненциальному*) закону с параметром λ, если ее плотность имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0.\end{cases} \tag{4.14}$$

где λ – любое положительное число.

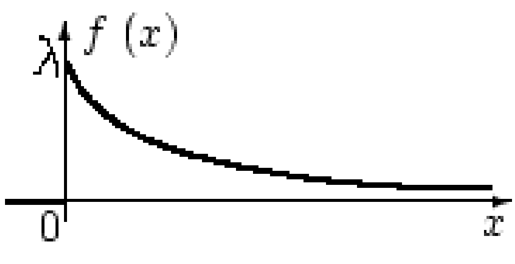
Легко проверить, что

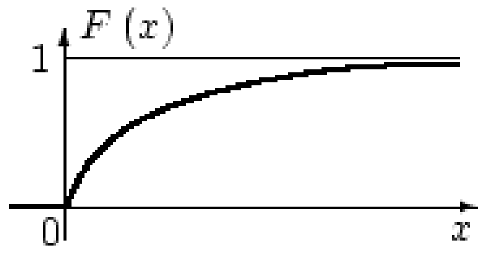
$$MX=\frac{1}{\lambda},\quad DX=\frac{1}{\lambda^2}. \tag{4.15}$$

Функция распределения показательной СВ имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0.\end{cases} \tag{4.16}$$

Графики плотности распределения и функции распределения показательной с. в. имеют вид:





Пример 7

Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ C\cdot e^{-0,5x} \text{ при } x\ge 0.\end{cases}$$

Решение.

Это показательное распределение с параметром $\lambda=0{,}5$.

Значит $C=\lambda=0{,}5$ и плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ 0{,}5\cdot e^{-0,5x} \text{ при } x\ge 0\end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсию найдем через параметр по формулам (15):

$$MX=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0{,}5}=2,$$

$$DX=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{0{,}5^2}=4.$$

Ответ: $C=0{,}5$, $MX=2$, $DX==4$.

4.5.3. Нормальное распределение.

Случайная величина X называется распределенной по *нормальному* закону с параметрами a и σ, если ее плотность имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (4.17)$$

Вероятностный смысл параметров a и σ следующий: a есть математическое ожидание, а σ – среднеквадратичное отклонение нормально распределенной СВ:

$$MX=a,\ \ DX=\sigma^2. \qquad (4.18)$$

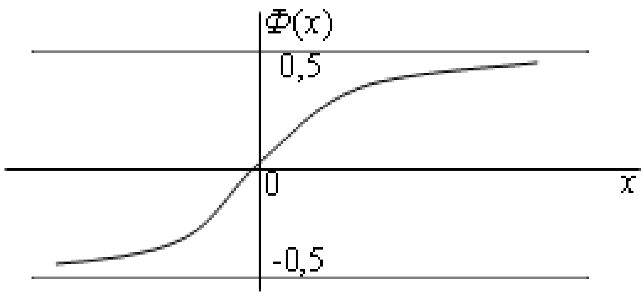
Функция распределения нормальной СВ X с параметрами a и σ, или как принято записывать в сокращенном виде, $X\sim N(a;\sigma)$, согласно общей формуле (3), находится следующим образом:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt. \qquad (4.19)$$

Интеграл (19) не вычисляется в элементарных функциях! Но поскольку нормально распределенные СВ являются самыми распространенными, то большинство задач, связанных с этими СВ, требуют для своего решения знания функции распределения. Выход из положения был найден следующим образом. Была подробно изучена неэлементарная функция, называемая *функцией Лапласа*, обозначаемая $\Phi(x)$ и задаваемая формулой:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du. \tag{4.20}$$

Для функции Лапласа были составлены подробные таблицы, исследованы ее свойства, построен график:



Свойства функции Лапласа $\Phi(x)$.

1) Области определения, $D(\Phi) = R$, и значений, $E(\Phi) = (-0,5; 0,5)$;

2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ (функция Лапласа нечетная);

3) $\Phi(x)$ монотонно возрастает на R;

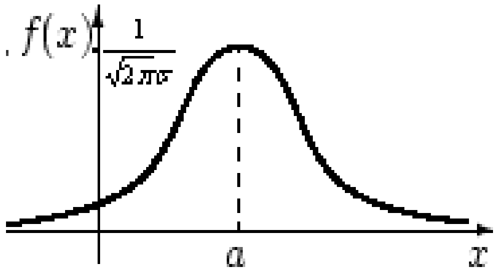
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0,5$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x) = -0,5$;

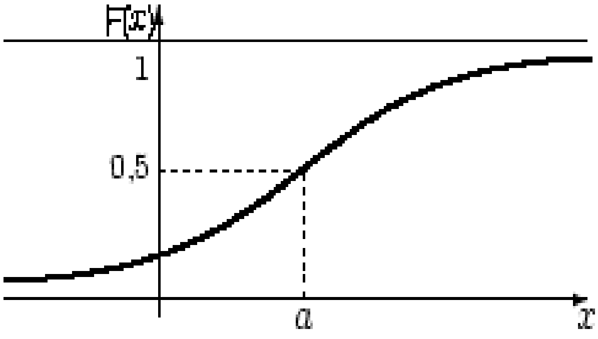
5) $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x)$.

Функция распределения нормально распределенной СВ. X с параметрами a и σ может быть выражена через функцию Лапласа:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \tag{4.21}$$

Графики плотности распределения и функции распределения нормальной с. в. X имеют следующий вид:





Вероятность попадания СВ $X \sim N(a;\sigma)$ *в заданный интервал* $[b,c]$ вычисляется по формуле:

$$P(b \le X \le c) = \Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{b-a}{\sigma}\right). \qquad (4.22)$$

Вероятность отклонения СВ $X \sim N(a;\sigma)$ от математического ожидания a по абсолютной величине на величину ε вычисляется по формуле:

$$P(|X-a| < \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \qquad (4.23)$$

Математические ожидания и *дисперсии* для определенных выше наиболее распространённых случайных величин даны в следующей таблице:

Название распределения	Математическое ожидание	Дисперсия
равномерное	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{2}$
Показательное (экспоненциальное)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
нормальное	a	σ^2

Пример 8.

Случайная величина X, имеющая нормальное распределение, задана плотностью: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2-4x-4}{8}}$. Найти MX, DX, $P(-3 \le X \le 1)$.

Решение.

Это нормальное распределение. Найдем значения параметров a и σ.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2-4x-4}{8}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Решим систему, которая следует из записанного равенства,

$\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi}} \\ \dfrac{-(x-a)^2}{2\sigma^2} = \dfrac{-x^2-4x-4}{8} \end{cases}$. Она верна для: $\begin{cases} \sigma = \dfrac{\sqrt{8\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 2; \\ a = -2. \end{cases}$, Зная параметры, вычисляем математическое ожидание и дисперсию по формулам (18):

$$MX = a = -2,$$

$$DX = \sigma^2 = 2^2 = 4.$$

Вероятность попадания СВ в заданный интервал $[-3, 1]$ найдем по формуле (22):

$$P(-3 \le X \le 1) = \Phi\left(\frac{1+2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-3+2}{2}\right) = \Phi(1,5) - \Phi(-0,5) =$$

$$= \Phi(1,5) + \Phi(0,5) = 0,4332 + 0,1915 = 0,6247$$

Ответ: $MX = -2, DX = 4, P(-3 \le X \le 1) = 0.6247$.

Пример 9.

Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 100\,м$. Найти: 1) вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150м; 2) вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной.

Решение.

Обозначим через X измеренную дальность. Вследствие наличия систематической случайной ошибки, математическое ожидание величины X равно: a=MX= –50м. Следовательно, плотность вероятности случайных ошибок, связанных с отклонением X от математического ожидания a, имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{100\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+50)^2}{20000}}.$$

1) Согласно формуле (22) имеем

$$P(-150 < X < 150) = \Phi\left(\frac{150+50}{100}\right) - \Phi\left(\frac{-150+50}{100}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) = 0,4772 + 0,3413 =$$

$$= 0,8185$$

2) Вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной, равна: $P(-\infty < X < 0) = \Phi(0,5) + \Phi(\infty)$..

Так как $\Phi(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} \Phi(x) = 0,5$, а из таблицы находим $\Phi(0,5) = 0,1915$, то $P(-\infty < X < 0) = 0,6915$.

Ответ: 1) $P(-150 < X < 150) = 0,8185$, 2) $P(-\infty < X < 0) = 0,6915$

4.6. Упражнения для самостоятельной работы

В задачах 1-3 по заданной функции распределения $F(x)$ найти постоянные A, B, C, $f(x)$, MX, DX и вероятности попадания в указанные промежутки. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

1. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ A(x^2+4x+3), & -1<x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

Найти $P(-1/6<X<0)$, $P(X\ge -1/2)$.

2. $$F(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{x^2}, & x<-1,\\ Bx+\dfrac{3}{4}, & -1\le x\le 1,\\ C, & x>1.\end{cases}$$

Найти, $P(0<X<\pi/6)$, $P(X\ge \pi/4)$, $P(X<-2)$.

3. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ A(x-1), & 1<x\le 4,\\ \dfrac{x^2-1}{x^2}, & x>4.\end{cases}$$

Найти $P(-1<X<5)$, $P(-1<X<1)$, $P(X\le 0)$.

В задачах 4-7 по заданной плотности распределения $f(x)$ найти постоянную k, функцию распределения $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$ и вероятности попадания в указанные промежутки. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

4. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^4}, & x\le -3,\\ k, & -3<x<-1,\\ 0, & x\ge -1.\end{cases}$$

Найти $P(-2{,}5<\xi\le -2)$, $P(\xi<0)$, $P(\xi>1)$.

5. $$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ k(1-\dfrac{x}{3}), & 0\le x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Найти $P(\xi \geq 1)$, $P(1{,}5 \leq \xi < 3)$.

6. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/2, \\ k\cos x, & -\pi/2 \leq x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$

Найти $P(-\pi/4 < \xi < 0)$, $P(\xi > -\pi/6)$.

7. $f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x < 0, \\ k\sin 2x, & 0 \leq x \leq \pi/4, \\ 0, & x > \pi/4. \end{cases}$

Найти $P(\xi \geq \pi/6)$, $P(\xi < \pi/3)$.

8. Дана функция $y = tgx$ на интервале $[0, \pi/6]$.

а) Может ли эта функция быть функцией распределения случайной величины?

б) Доопределить эту функцию так, чтобы она могла быть функцией распределения.

9. Могут ли следующие функции быть плотностями распределения? Если нет, то какое свойство плотности распределения не выполнено?

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\pi/2, \\ \sin x, & -\pi/2 < x < \pi/2, \\ 0, & x \geq \pi/2. \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, г) $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

10. Найти функцию распределения, MX и DX случайной величины ξ, распределенной равномерно на: а) отрезке $[1{,}3]$; б) отрезке $[-1{,}1]$; в) отрезке $[-6{,}3]$. Вычислить для каждого случая $P(-4 \leq X \leq 0)$.

11. Случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 2$. Найти $f(x)$, $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P(\xi < 0{,}5)$, $P(-1 \leq \xi \leq 1)$.

12. Случайная величина ξ распределена по закону Коши, т.е. ее плотность распределения имеет вид $f(x) = \dfrac{B}{1+x^2}$, $x \in R$. Найти B, $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P(-1 < \xi < 1)$, $P(\xi > -\sqrt{3})$.

13. $f(x) = \dfrac{2A}{e^x + e^{-x}}$ – плотность распределения случайной величины X.

Найти A, $F(x)$, $P(0 < X < 2)$.

14. Найти среднюю скорость молекул газа и дисперсию скорости, подчиненной закону Максвелла:

$$f(v)=\begin{cases}0, & v<0,\\ \dfrac{4h^3}{\sqrt{\pi}}v^2e^{-h^2v^2}, & v\ge 0, \quad h>0\end{cases}$$

15. Для СВ $Y \sim N(2;1)$ найти вероятности:

а) $P(Y<1)$; б) $P(Y>2{,}3)$, в) $P(-1<Y<5)$, г) $P(0\le Y<3)$.

16. Для СВ $\xi \sim N(-1;2)$ найти число x из условий:

а) $P(\xi<x)=0{,}5$; б) $P(x<\xi)=0{,}3$, в) $P(x<\xi<0)=0{,}4$,

4.7. Индивидуальные задания

Вариант 1

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4} \text{ при } 0<x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}c\cdot\cos x \text{ , при } |x|\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0 \text{ , при } |x|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

3 Случайная величина *X* имеет равномерное распределение на отрезке от [0,6]. Написать выражение плотности. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $F(x)$.

4 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент С, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ c\,e^{-3X} \text{ при } x\ge 0.\end{cases}$$

5 Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=2,\ \sigma=3.$ Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $-1\le X\le 11$, а также вероятность неравенства $|X-2|<6$.

6 Пусть вероятность того, что выпущенный экземпляр часов имеет точность хода в пределах стандарта, равна 0,97. Найти вероятность того, что среди имеющихся 1000

часов доля часов с точности хода и пределах нормы отклониться (по абсолютной величине) от вероятности 0,97 не более, чем на 0,02.

Вариант 2

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0\ ,\text{при }\ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{100}\ \ ,\text{при }\ 0<x\le 10,\\ 1\ ,\text{при }\ x>10.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0,\ \text{при }\ x<0,\\ c\cdot arctg\left(x\right),\ \text{при }\ x\ge 0.\end{cases}$$

3 Случайная величина *X* имеет равномерное распределение на отрезке от [2,6]. Написать выражение плотности и функции распределения. Найти $P(X<M(X))$.

4 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент С, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0,\ \text{при }\ x<0,\\ c\cdot e^{-4x},\ \text{при }\ x\ge 0.\end{cases}$$

5 Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=10,\ \ \sigma=2.$ Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $0\le X\le 12$, а также вероятность неравенства $|X-10|<6$.

6 Диаметр выпускаемой детали - случайная величина, подчинённая нормальному закону с математическим ожиданием 5 см и стандартным отклонением 0.9 см. Определить вероятность того, что наудачу взятая деталь имеет диаметр в пределах от 4 до 7 см.

Вариант 3

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \text{при }\ x\le 0,\\ \sin x,\ \text{при }\ 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1,\ \text{при }\ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 0,\\ c\cdot x^2, & \text{при } 0<x\le 1,\\ 0, & \text{при } x>1.\end{cases}$$

3 Случайная величина X равномерно распределения на отрезке [-2;2]. Найти $M(X)$, $D(X)$, $P(-1\le X\le 1)$.

4 Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=8$. Написать выражение плотности и функции распределения.

5 Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m=7,\ \sigma=4$. Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $3\le X\le 19$, а также вероятность неравенства $|X-7|<8$.

6 Случайная величина X (измерение диаметра вала) подчинена нормальному закону с параметрами (0, 20). Найти вероятность того, что в трех независимых измерениях х ошибка двух измерений по абсолютной величине не менее 4 мм.

Вариант 4

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{81}, & \text{при } 0<x\le 9,\\ 1, & \text{при } x>9.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C,* математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ c\cdot x^3, & \text{при } 0<x\le 1,\\ 0, & \text{при } x>1.\end{cases}$$

3 Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке [-5;5]. Найти $M(X)$, $D(X)$, третий начальный момент и третий центральный момент.

4 Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=3$. Найти $M(X)$, $D(X)$ и вероятность $P(|X-M(X)|<2\sigma)$.

5 Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m=1,\ \sigma=5$. Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $-4\le X\le 16$, а также вероятность неравенства $|X-1|<10$.

6 Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением 20 мм и математическим ожиданием $a=0$. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолютной величине 4 мм.

Вариант 5

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность

распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \sin 2x, \text{ при } 0<x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 1, \text{ при } x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ c\cdot x^5, \text{ при } 0<x\le 1,\\ 0, \text{ при } x>1.\end{cases}$$

3 Случайная величина *X* имеет равномерное распределение на отрезке [0;2]. Найти $M(X)$, $D(X)$, асимметрию и эксцесс.

4 Случайная величина *X* имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=2$. Написать выражение плотности $f(x)$. Найти функцию распределения. Найти $M(X)$ и начальный момент пятого порядка.

5 Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=5,\ \sigma=1.$ Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $2\le X\le 8$, а также вероятность неравенства $|X-5|<3$.

6 Автомат штампует детали. Контролируется длина детали , которая распределена нормально с проектной длиной 75 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 60 мм и не более 90 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: 1) больше 80 мм; 2) меньше 65 мм.

Вариант 6

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{64}, \text{ при } 0<x\le 8,\\ 1, \text{ при } x>8.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ \dfrac{c}{x^4}, \text{ при } ,x>1.\end{cases}$$

3 Случайная величина *X* имеет равномерное распределение на отрезке [-2;2]. Найти асимметрию и эксцесс.

4 Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 5$. Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$.

5 Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m = 0,\ \ \sigma = 6$. Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $-6 \le X \le 12$, а также вероятность неравенства $|X| < 2$.

6 Автоматически изготовленные детали по длине распределены нормально и расположены в интервале от 29,7 до 30,3 см. Какой длины проектировалась деталь и с каким допуском?

Вариант 7

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le -2, \\ 0,25x + 0,5 \ , \text{при } \ -2 < x \le 2, \\ 1, \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ c \cdot \cos(x), \text{ при } -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \text{ при } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

3 Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [2;10]. Написать выражение плотности и найти $P(3 \le X \le 5)$.

4 Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 4$. Найти $f(x)$, $F(x)$, $M(X)$, $P(X < M(X))$.

5 Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m = -1,\ \ \sigma = 2$. Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $-5 \le X \le 9$, а также вероятность неравенства $|X+1| < 4$.

6 Длина изготовляемой детали является нормально распределенной случайной величиной со средним значением a=100 мм и средним квадратическим отклонением 2 мм. Каких деталей окажется в большой партии больше – тех, у кого длина превосходит 103 мм или тех, у кого она заключается в пределах от 101 до 102 мм

Вариант 8

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{49}, & \text{при } 0<x\le 7,\\ 1, & \text{при } x>7.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *С*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ c\cdot\sin(x), & \text{при } 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

3 Случайная величина *X* задана с плотностью

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & \text{при } x\in[4;8],\\ 0, & \text{при } x\notin[4;8].\end{cases}$$

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

4 Случайная величина *X* имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=5$. Найти функцию распределения $F(x)$ и вероятность $P(|X-M(X)|<3\sigma)$.

5 Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=3,\ \sigma=3.$ Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $0\le X\le 15$, а также вероятность неравенства $|X-3|<6$.

6 Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением 1 мм и математическим ожиданием 0. Найти вероятность того, что из двух независимых наблюдений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет 1,28 мм (по абсолютной величине).

Вариант 9

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 1,\\ 0,25(x-1), & \text{при } 1<x\le 5,\\ 1, & \text{при } x>5.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *С*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ c\cdot\cos(2x), \text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 0, \text{ при } x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

3 Случайная величина X задана с плотностью

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, \text{ при } x\in[4;8],\\ 0, \text{ при } x\notin[4;8].\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

4 Случайная величина *X* имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=5$. Найти $P(X<M(X))$.

5 Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=4,\ \sigma=2.$ Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $-4\le X\le 10$, а также вероятность неравенства $|X-4|<8$.

6 Коробки с мармеладом упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 900г. Известно, что 1% коробок имеют массу, большую 1 кг. Каков % коробок, масса которых не превышает 850 г., если вес коробок - случайная величина, распределенная по нормальному закону?

Вариант 10

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{36}, \text{ при } 0<x\le 6,\\ 1, \text{ при } x>6.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0 \ \ \text{при } x\le 2,\\ c \ \ \text{при } 2<x\le 4,\\ 0 \ \ \text{при } x>4.\end{cases}$$

3 Случайная величина *X* задана плотностью

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, \text{ при } x\in[-1;1],\\ 0, \text{ при } x\notin[-1;1].\end{cases}$$

Найти асимметрию.

4 Случайная величина *X* задана с плотностью

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0,\\ 3\cdot e^{-3x}, \text{ при } x\ge 0.\end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной величины *X* на интервал [1;3].

5 Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=-2,\ \sigma=5.$ Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $-12\le X\le 8$, а также вероятность неравенства $|X+2|<10$.

6 Изготавливается деталь трала. Ее длина – случайная величина, распределенная по нормальному закону. Среднее значение длины равно 20 м, дисперсия 0,04 м2. Найти вероятность того, что длина детали будет заключена между 19,7 и 20,3 м., т.е. отклонение от среднего значения не превзойдет 0,3 м.

Вариант 11

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ при } 1<x\le 5,\\ 1, \text{ при } x>5.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}c\cdot\cos 2x, \text{ при } -\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 0, \text{ при } x<-\dfrac{\pi}{4},\\ 0, \text{ при } x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

3 Случайная величина *X* имеет равномерное распределение на отрезке [-5;5]. Найти $M(X)$, $D(X)$, третий начальный момент и третий центральный момент.

4 Случайная величина *X* имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, \text{ при } x\ge 0,\\ 0, \text{ при } x<0.\end{cases}$$

Найти функцию распределения.

5 Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=6,\ \sigma=2.$ Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $0\le X\le 8$, а также вероятность неравенства $|X-6|<6$.

6 Срок службы прибора представляет собой случайную величину, подчиненную за-

кону нормального распределения со средним сроком службы в 10 лет и средним квадратическим отклонением 1,5 года. Определить вероятность того, что прибор прослужит: 1) до 15 лет; 2) от 8 до 18 лет; 3) свыше 16 лет.

Вариант 12

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{25}, \text{ при } 0<x\le 5,\\ 1, \text{ при } x>5.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}Cx^2e^{-x^3}, \text{ при } x\ge 0,\\ 0, \text{ при } x<0.\end{cases}$$

3 Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [2;10]. Написать выражение плотности и найти $P(3\le X\le 5)$.

4 Функция распределения случайной величины *X* равна $F(x)=1-e^{-4x}$. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

5 Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=1,\ \sigma=8.$ Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $-7\le X\le 17$, а также вероятность неравенства $|X-1|<8$.

6 Средняя масса плодов в одном ящике равна 10 кг. Фактическая масса плодов в ящике – случайная величина со средним квадратическим отклонением 0,6 кг. Найти вероятность, что фактическая масса отклонится от средней не более, чем на 1 кг.

Вариант 13

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ x-1, \text{ при } 1<x\le 2,\\ 1, \text{ при } x>2.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}C\cdot x\cdot e^{-x^2}, \text{ при } x\ge 0,\\ 0, \text{ при } x<0.\end{cases}$$

3 Случайная величина X равномерно распределения на отрезке [-2;2]. Найти $M(X)$, $D(X)$, $P(-1 \le X \le 1)$.

4 Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 3$. Найти $M(X)$, $D(X)$ и вероятность $P(|X - M(X)| < 2\sigma)$.

5 Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m = 6,\ \sigma = 1$. Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $0 \le X \le 12$, а также вероятность неравенства $|X - 6| < 4$.

6 Норма высева на 1 га. равна 150 кг. Фактический расход – нормально распределенная случайная величина со среднеквадратическим отклонением 10 кг. Найти вероятность, что фактический расход не превзойдет 155 кг.

Вариант 14

1 Задана функция распределения случайной величины X. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{16}, \text{ при } 0 < x \le 4, \\ 1, \text{ при } x > 4. \end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент C, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0, \\ cx^5, \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 0, \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

3 Случайная величина X задана с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, \text{ при } x \in [4;8], \\ 0, \text{ при } x \notin [4;8]. \end{cases}$$

Найти функцию распределения.

4 Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 4$. Найти $f(x)$, $F(x)$, $M(X)$, $P(X < M(X))$.

5 Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m = 7,\ \sigma = 3$. Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $-2 \le X \le 10$, а также вероятность неравенства $|X - 7| < 6$.

6 Длина заготовки распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 1 м и средним квадратическим отклонением 9 мм. Найти вероятность того, что в партии из 10 деталей не будет ни одной детали длиной более 105 см.

Вариант 15

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ \ln x, \text{ при } 1<x\le e,\\ 1, \text{ при } x>e.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0,\\ c\cdot x, \text{ при } 0\le x\le 3,\\ 0, \text{ при } x>3.\end{cases}$$

3 Случайная величина *X* задана плотностью

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, \text{ при } x\in[-1;1],\\ 0, \text{ при } x\notin[-1;1].\end{cases}$$

Найти асимметрию.

4 Случайная величина *X* имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=5$. Найти $P(X<M(X))$.

5 Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=8,\ \sigma=5.$ Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $3\le X\le 18$, а также вероятность неравенства $|X-8|<15$.

6 Ошибка измерений прибора распределена нормально с дисперсией 0,16 мм^2. Систематическая ошибка прибора отсутствует. Найти вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по модулю 0,6 мм.

Вариант 16

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{9}, \text{ при } 0<x\le 3,\\ 1, \text{ при } x>3.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ c\cdot x, \text{ при } 0<x\le 2,\\ 0, \text{ при } x>2.\end{cases}$$

3 Случайная величина *X* имеет равномерное распределение на отрезке [-2;2]. Найти асимметрию и эксцесс.

4 Случайная величина *X* задана с плотностью

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0,\\ 3\cdot e^{-3x}, \text{ при } x\ge 0.\end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной величины *X* на интервал [1;3].

5 Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=9,\ \sigma=2.$ Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $-1\le X\le 11$, а также вероятность неравенства $|X-9|<8$.

6 Объем продаж в течение месяца – это случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения с параметрами a = 500 и σ =120. Найти вероятность того, что объем товара в данном месяце заключен в границах от 480 до 600.

Вариант 17

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{81}, \text{ при } 0<x\le 9,\\ 1, \text{ при } x>9.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0,\\ c\cdot x, \text{ при } 0\le x\le 4,\\ 0, \text{ при } x>4.\end{cases}$$

3 Случайная величина *X* задана с плотностью

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & \text{при } x\in[4;8],\\ 0, & \text{при } x\notin[4;8].\end{cases}$$

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

4 Функция распределения случайной величины *X* равна $F(x)=1-e^{-4x}$. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

5 Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=5$ и $\sigma=2$. Написать выражение плотности и найти $P(X<M(X))$ и $P(|X-M(X)|<2\sigma)$.

6 Ошибка взвешивания – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным a = 0, и среднеквадратическим отклонением, равным σ =8 грамм. Найти вероятность того, что взвешивание проведено с ошибкой, не превышающей по модулю N = 16 грамм.

Вариант 18

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ \frac{x^2}{64}, & \text{при } 0<x\le 8,\\ 1, & \text{при } x>8.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ c\cdot x, & \text{при } 0<x\le 5,\\ 0, & \text{при } x>5.\end{cases}$$

3 Случайная величина *X* имеет равномерное распределение на отрезке от [0,6]. Написать выражение плотности. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $F(x)$.

4 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент С, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0,\\ c\cdot e^{-3x}, & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$$

5 Случайная величина *X* распределена нормально с параметрами $m=0$ и $\sigma^2=16$. Найти интервал симметричный относительно $M(X)$, в который с вероятностью

0,9973 попадает величина X в результате испытания.

6 Срок работы прибора подчиняется нормальному закону распределения со средней продолжительностью 100 ч. и средним квадратическим отклонением 20 ч. Производитель заменяет сломанные приборы без ремонта, если они проработали менее 60 ч. Какую часть от общего выпуска составляет эта продукция (в %)?

Вариант 19

1 Задана функция распределения случайной величины X. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \sin x, \text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1, \text{ при } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

2 Случайная величина X задана плотностью

$$f(x)=\begin{cases}2xe^{-x^2}, \text{ при } x\ge 0,\\ 0, \text{ при } x<0.\end{cases}$$

Найти функцию распределения.

3 Случайная величина X равномерно распределения на отрезке [-2;2]. Найти $M(X)$, $D(X)$, $P(-1\le X\le 1)$.

4 Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=5$. Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$.

5 Случайная величина X нормально распределена с $M(X)=10$. Вероятность попадания в интервал (10,20) равна 0,3. Найти $P(0\le X\le 10)$.

6 Автомат изготавливает подшипники, которые считаются годными, если отклонение X от проектного размера не превышает 0.7 мм. Каково наиболее вероятное число годных подшипников из 200, если X распределена нормально с σ =0.5 мм?

Вариант 20

1 Задана функция распределения случайной величины X. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le -2,\\ 0,25\cdot x+0,5, \text{ при } -2<x\le 2,\\ 1, \text{ при } x>2.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент

C, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ c\cdot x^5, \text{при } 0<x\le 1,\\ 0, \text{ при } x>1.\end{cases}$$

3 Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке от [2,6]. Написать выражение плотности и функции распределения. Найти $P(X<M(X))$.

4 Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, \text{ при } x\ge 0,\\ 0, \text{ при } x<0.\end{cases}$$

Найти функцию распределения.

5 Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m=2$ и $\sigma=5$. Найти асимметрию и эксцесс.

6 Ошибка при измерении размера обуви подчинена закону нормального распределения со средним квадратическим отклонением 0,1 см. Определить вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 0,2 см.

Вариант 21

1 Задана функция распределения случайной величины X. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{36}, \text{ при } 0<x\le 6,\\ 1, \text{ при } x>6.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент C, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}c\cdot\cos 2x, \text{ при } -\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 0, \text{ при } x<-\dfrac{\pi}{4},\\ 0, \text{ при } x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

3 Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке [0;2]. Найти $M(X)$, $D(X)$, асимметрию и эксцесс.

4 Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=8$.

Написать выражение плотности и функции распределения.

5 Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m = 3$ и $\sigma = 4$. Найти $P(X < 3)$, $P(|X - 3| \le 8)$.

6 Известно, что диаметр шариков для подшипников описывается нормальным законом с параметрами $N(5;\ 0.005)$. При контроле бракуются все шарики, диаметр которых отличается от среднего больше чем на 0.01. Определить, какой процент шариков в среднем бракуется

Вариант 22

1 Задана функция распределения случайной величины X. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{2}, \text{ при } 1 < x \le 5, \\ 1, \text{ при } x > 5. \end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент C, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0, \\ c \cdot x, \text{ при } 0 \le x \le 4, \\ 0, \text{ при } x > 4. \end{cases}$$

3 Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке [5;5]. Найти $M(X)$, $D(X)$, третий начальный момент и третий центральный момент.

4 Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 3$. Найти $M(X)$, $D(X)$ и вероятность $P(|X - M(X)| < 2\sigma)$.

5 Случайная величина X нормально распределена с параметрами $m = 5$ и $\sigma = 2$. Найти $P(X < M(X))$ и нарисовать график плотности.

6 Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50 мм. Фактическая длина изготовленных деталей не менее 32 мм и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали более 55 мм.

Вариант 23

1 Задана функция распределения случайной величины X. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ x-1, \text{ при } 1<x\le 2,\\ 1, \text{ при } x>2.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}C\cdot x\cdot e^{-x^2}, \text{ при } x\ge 0,\\ 0, \text{ при } x<0.\end{cases}$$

3 Случайная величина *X* имеет равномерное распределение на отрезке [-2;2]. Найти асимметрию и эксцесс.

4 Случайная величина *X* имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=5$. Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$.

5 Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=-2,\ \sigma=5.$ Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $-12\le X\le 8$, а также вероятность неравенства $|X+2|<10$.

6 Ошибка измерителя дальности подчинена нормальному закону с систематической ошибкой 20 м и средним квадратическим отклонением 60 м. Найти вероятность того, что измеренное значение дальности будет отклоняться от истинного не более чем на 30 м.

Вариант 24

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ \ln x, \text{ при } 1<x\le e,\\ 1, \text{ при } x>e.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0,\\ c\cdot x, \text{ при } 0\le x\le 3,\\ 0, \text{ при } x>3.\end{cases}$$

3 Случайная величина *X* задана с плотностью

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, \text{ при } x\in[4;8],\\ 0, \text{ при } x\notin[4;8].\end{cases}$$

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

4 Случайная величина X задана с плотностью

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & \text{при } x\in[4;8],\\ 0, & \text{при } x\notin[4;8].\end{cases}$$

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

5 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент С, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0,\\ c\cdot e^{-4x}, & \text{при } x\geq 0\end{cases}$$

6 Дневная добыча угля в некоторой шахте распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 785 тонн и стандартным отклонением 60 тонн. Найти вероятность того, что в данный день добыча угля упадет ниже 665 тонн.

Вариант 25

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\leq 0,\\ \dfrac{x^2}{100}, & \text{при } 0<x\leq 10,\\ 1, & \text{при } x>10.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0,\\ c\cdot x, & \text{при } 0\leq x\leq 3,\\ 0, & \text{при } x>3.\end{cases}$$

3 Случайная величина *X* имеет равномерное распределение на отрезке от [0,6]. Написать выражение плотности. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $F(x)$.

4 Случайная величина *X* имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=5$. Найти функцию распределения $F(x)$ и вероятность $P(|X-M(X)|<3\sigma)$.

5 Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=1,\ \sigma=8.$ Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $-7\leq X\leq 17$, а также вероятность неравенства $|X-1|<8$.

6 Коробки с шоколадом упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 1,06 кг. Известно, что 5% коробок имеют массу, меньшую 1 кг. Каков процент коробок, масса которых превышает 940 г?

Вариант 26

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \sin 2x \text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 1 \text{ при } x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 2,\\ c \text{ при } 2<x\le 4,\\ 0 \text{ при } x>4.\end{cases}$$

3 Случайная величина *X* задана с плотностью

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} \text{ при } x\in[4;8],\\ 0 \text{ при } x\notin[4;8].\end{cases}$$

Найти функцию распределения.

4 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент С, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ c\,e^{-3X} \text{ при } x\ge 0.\end{cases}$$

5 Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=9,\ \sigma=2.$ Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $-1\le X\le 11$, а также вероятность неравенства $|X-9|<8$.

6 Средняя дальность полета снаряда – 1000 м. Предполагая, что рассеяние распределено по нормальному закону с σ =80 м, найти какой процент снарядов дает перелет от 120 до 160 м.

Вариант 27

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, мо-

ду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4}, \text{ при } 0<x\le 2,\\ 1, \text{ при } x>2.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ c\cdot x, \text{ при } 0<x\le 5,\\ 0, \text{ при } x>5.\end{cases}$$

3 Случайная величина *X* имеет равномерное распределение на отрезке [0;2]. Найти $M(X)$, $D(X)$, асимметрию и эксцесс.

4 Случайная величина *X* имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=2$. Написать выражение плотности $f(x)$. Найти функцию распределения. Найти $M(X)$ и начальный момент пятого порядка.

5 Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=7,\ \sigma=3$.Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $-2\le X\le 10$, а также вероятность неравенства $|X-7|<6$.

6 Ошибка взвешивания – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 0 и среднеквадратическим отклонением, равным 9 грамм. Найти вероятность того, что взвешивание проведено с ошибкой, не превышающей по модулю 19 грамм.

Вариант 28

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{49}, \text{ при } 0<x\le 7,\\ 1, \text{ при } x>7.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ c\cdot\cos(2x), & \text{при } 0<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 0, & \text{при } x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

3 Случайная величина *X* задана плотностью

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{при } x\in[-1;1],\\ 0, & \text{при } x\notin[-1;1].\end{cases}$$

Найти асимметрию.

4 Случайная величина *X* имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=8$. Написать выражение плотности и функции распределения.

5 Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с параметрами $m=8,\ \sigma=5.$ Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $3\le X\le 18$, а также вероятность неравенства $|X-8|<15$.

6 Известно, что вес клубня картофеля подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием 125 г и σ=15 г. Найти вероятность того, что вес наудачу взятого плода будет: не менее 200 г.

Вариант 29

1 Задана функция распределения случайной величины *X*. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{25}, & \text{при } 0<x\le 5,\\ 1, & \text{при } x>5.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент *C*, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ c\cdot\sin(x), & \text{при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

3 Случайная величина *X* равномерно распределена на отрезке [2;10]. Написать выра-

жение плотности и найти $P(3 \le X \le 5)$.

4 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент С, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0,\\ c\cdot e^{-4x}, \text{ при } x\ge 0\end{cases}$$

5 Случайная величина X нормально распределена с $M(X)=10$. Вероятность попадания в интервал (10,20) равна 0,3. Найти $P(0 \le X \le 10)$.

6 Масса зерна - нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием 0,18 г и среднеквадратическим отклонением 0,05 г. Найти процент семян, масса которых больше чем 0,15 г.

Вариант 30

1 Задана функция распределения случайной величины X. Требуется найти плотность распределения, математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану. Построить графики функций плотности и функции распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1,\\ 0,25\cdot(x-1), \text{ при } 1<x\le 5,\\ 1, \text{ при } x>5.\end{cases}$$

2 Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти коэффициент C, математическое ожидание и дисперсию. Найти $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ c\cdot x \text{ при } 0<x\le 2,\\ 0, \text{ при } x>2.\end{cases}$$

3 Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке от [2,6]. Написать выражение плотности и функции распределения. Найти $P(X < M(X))$.

4 Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 2$. Написать выражение плотности $f(x)$. Найти функцию распределения. Найти $M(X)$ и начальный момент пятого порядка.

5 Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m=6,\ \sigma=2.$ Написать выражение плотности распределения, нарисовать график плотности. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $0 \le X \le 8$, а также вероятность неравенства $|X-6|<6$.

6 Средний вес расфасованных пакетов со стиральным порошком 930 г, а стандартное отклонение 20 г. Какая доля пакетов имеет вес до 900 г?

5. ФУНКЦИЯ ОДНОГО СЛУЧАЙНОГО АРГУМЕНТА

5.1 Закон распределения

Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y, то Y называют *функцией случайного аргумента* X:

$$Y = \varphi(X). \tag{5.1}$$

Выясним, как найти закон распределения функции случайной величины X по известному закону распределения аргумента.

1) Пусть аргумент X – дискретная случайная величина, причем различным значениям X соответствуют различные значения Y. Тогда вероятности соответствующих значений X и Y равны.

Пример 5.1.

Ряд распределения для X имеет вид:

x_k	1	3	5	7
p_k	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти закон распределения функции $Y = 2X^2 - 3$.

Решение:

При вычислении значений Y в формулу, задающую функцию, подставляем возможные значения X, а вероятности оставляем прежними.

y_k	-1	15	47	95
p_k	0,2	0,1	0,3	0,4

Ответ: результат представлен в полученной таблице.

2) Если же разным значениям X могут соответствовать одинаковые значения Y, то вероятности значений аргумента, при которых функция принимает одинаковые значения, складываются.

Пример 5.2

Ряд распределения для X имеет вид:

x_k	-3	-1	3	5
p_k	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти закон распределения функции $Y = X^2 - 4X$.

Решение:

y_k	-3	5	21
p_k	0,3	0,5	0,2

Ответ: результат представлен в полученной таблице, ряд распределения Y получился короче распределения СВ X, так как $Y = 5$ и при $X = -1$, и при $X = 5$, поэтому $P(Y = 5) = P(X = -1) + P(X = 5) = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$.

3) Если X – непрерывная случайная величина, имеющая плотность распределения $f(x)$, и $Y = \varphi(X)$, где $\varphi(X)$ – монотонная и дифференцируемая функция, а $x = \psi(y)$ – функция, обратная к функции $y = \varphi(x)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной функции Y равна:

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|. \tag{5.2}$$

Если на интервале возможных значений СВ X обратная функция $\psi(y)$ неоднозначна, т.е. одному значению y соответствует несколько значений x: $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$,…, $\psi_n(y)$, каждая из которых монотонная, то плотность СВ Y определяется формулой:

$$g(y) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\psi_k(y)\right)\left|\psi_k'(y)\right|. \tag{5.2′}$$

Пример 5.3

Случайная величина X задана плотностью $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найти плотность случайной величины $Y = X^3$.

Решение:

Обратная функция к $\varphi(X) = X^3$:

$$x = \psi(y) = \sqrt[3]{y},$$

$$\psi'(y) = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}.$$

Получаем:

$$g(y) = \frac{1}{\pi(1+y^{\frac{2}{3}})} \cdot \left(\frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3\pi \cdot y^{\frac{2}{3}}(1+y^{\frac{2}{3}})}.$$

Ответ: $g(y) = \dfrac{1}{3\pi \cdot y^{\frac{2}{3}}(1+y^{\frac{2}{3}})}$, при $-\infty < y < \infty$.

Пример 5.4 СВ X имеет показательное распределение с параметром a. Найти плотность СВ $Y = AX + B$.

Решение:

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = Ax+B$. Это монотонная функция, если $A \neq 0$.

Чтобы найти обратную функцию $\psi(y)$, достаточно решить уравнение $y=Ax+B$ относительно x: $x = (y - B)/A$. Итак, $\psi(y) = (y - B)/A$, а $\psi'(y) = 1/A$. По условию задачи плотность СВ X:

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, \text{ при } x > 0, \\ 0, \text{ если } x \le 0. \end{cases}$$

Находим плотность СВ Y:

$g(y) = ae^{-a(y-B)/A} \cdot |A^{-1}|$, при $x = (y-B)/A > 0$, то есть при $y > B$.

Для остальных y плотность $g(y) = 0$.

Ответ: $g(y) = \begin{cases} ae^{-a(y-B)/A}\left|A^{-1}\right|, \text{ при } y > B, \\ 0, \text{ если } y \le B. \end{cases}$

Пример 5.5 Через точку $M(0, l)$ проведена наудачу прямая. Найти плотность абсциссы точки пересечения этой прямой с осью Ох.

Решение:

Пусть непрерывная СВ (НСВ) Y – угол, который прямая, проведенная через точку M, составляет с положительным направлением оси Оу. Проведение этой прямой наугад означает, что СВ Y имеет равномерное распределение в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$, то есть ее плотность имеет вид

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, \text{ при } |y| < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \text{ если } |y| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Если $N(X, 0)$ – точка пересечения прямой с осью Ох, то $X = \varphi(Y) = l\cdot \mathrm{tg}Y$. Обратной к функции $x = \varphi(y) = l\cdot \mathrm{tg}y$ на интервале $(-\pi/2 < y < \pi/2)$ является функция $y = \psi(x) = \mathrm{arctg}(x/l)$, где $(-\infty < x < \infty)$. Тогда плотность СВ X, как функции СВ Y, $X = l\cdot\mathrm{tg}Y$, определяем по формуле $g(x) = f(\psi(x))\cdot|\psi'(x)|$ (5,2):

$$g(x) = f\left(arctg\left(\frac{x}{l}\right)\right)\left|\left(arctg\left(\frac{x}{l}\right)\right)'\right| = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\left(x/l\right)^2}\frac{1}{l} = \frac{1}{\pi}\frac{l}{l^2+x^2},\ x \in (-\infty; +\infty).$$

Ответ: $g(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{l}{l^2+x^2}$, $x \in (-\infty; +\infty)$, – это распределение Коши.

Пример 5.6 НСВ X имеет распределение $N(0; 1)$ – нормальное распределение с параметрами: $a = 0$, $\sigma = 1$. Найти плотность СВ $Y = X^2$.

Решение: Функция $y = x^2$ – немонотонная на (–∞; +∞) и поэтому ее обратная функция $\psi(y)$ – неоднозначная: $x_1 = \psi_1(y) = \sqrt{y}$ и $x_2 = \psi_2(y) = -\sqrt{y}$. Находим по формуле (5.2′) плотность СВ Y:

$$g(y) = f\left(\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} + f\left(-\sqrt{y}\right)\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|.$$

Здесь $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ – плотность СВ X.

После подстановки $x_{1,2} = \pm\sqrt{y}$ и преобразований получим плотность $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{\frac{-y}{2}}$, $0 < y < +\infty$, и $g(y) = 0$ для не положительных значений y.

Ответ: $g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{\frac{-y}{2}}, \text{ при } 0 < y < +\infty; \\ 0, \quad \text{если } y \le 0. \end{cases}$

5.2 Числовые характеристики

Пусть $Y = \varphi(X)$ – функция случайного аргумента X, и требуется найти ее математическое ожидание и дисперсию, зная закон распределения X.

5.2.1 Математическое ожидание и дисперсия функции одного дискретного случайного аргумента.

Если X – дискретная случайная величина, то её математическое ожидание соответственно равны:

$$MY = M(Y) = M(\varphi(x)) = \sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k)\cdot p_k\ . \tag{5.3}$$

$$DY = D(Y) = M(\varphi(X) - M(\varphi(X)))^2 = \sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k) - M(Y))^2\cdot p_k\ . \tag{5.3′}$$

Пример 5.7

Найти $M(Y)$ для примера 3.2.

Решение: $M(Y)$ = (–1)·0,2 + (–3)·0,1 + 3·0,3 + 5·0,4 = 2,4.

Ответ: 2,4.

5.2.2 Математическое ожидание и дисперсия функции одного непрерывного случайного аргумента.

Если X – непрерывная случайная величина, то $M(Y)$ можно искать поразному. Если известна плотность распределения $g(y)$, то

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y) dy. \tag{5.4}$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - M(Y))^2 \cdot g(y) dy. \tag{5.4′}$$

Если же $g(y)$ найти сложно, то можно использовать известную плотность распределения $f(x)$:

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot f(x) dx. \tag{5.5}$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - M(Y))^2 \cdot f(x) dx. \tag{5.5′}$$

В частности, если все значения X принадлежат промежутку (a, b), то

$$M(Y) = \int_{a}^{b} \varphi(x) \cdot f(x) dx. \tag{5.6}$$

$$D(Y) = \int_{a}^{b} (\varphi(x) - M(Y))^2 \cdot f(x) dx. \tag{5.6}$$

5.3 Задачи для самостоятельного решения

1. По данному закону распределения случайной величины X найти закон распределения случайной величины $Y = X^2 + X$.

x_k	-1	0	1	2	3	4	5
p_k	0,15	0,05	0,25	0,1	0,2	0,1	0,15

Найти MY и DY.

2. По данному закону распределения случайной величины X найти закон распределения случайной величины $Y = 6|X| - 1$

x_k	-1	1	3	4	5
p_k	0,25	0,15	0,3	0,2	0,1

Найти MY и DY.

3. По данному закону распределения случайной величины X найти закон распределения случайной величины $Y = \min(X; 2)$

x_k	-2	-1	2	3	5
p_k	0,05	0,3	0,25	0,35	0,05

Найти MY и DY.

4. По данному закону распределения случайной величины X найти закон распределения случайной величины $Y = \max(X;1)$

x_k	-3	-1	1	2	4
p_k	0,2	0,2	0,3	0,25	0,05

Найти MY и DY.

5. По данному закону распределения случайной величины X найти закон распределения случайной величины $Y = X^2 - 1$

x_k	-1	0	1	2	3
p_k	0,15	0,2	0,35	0,2	0,1

Найти MY и DY.

6. На интервале [0; $\frac{\pi}{4}$] случайная величина X имеет равномерное распределение. Найти плотность распределения случайной величины $Y = tgX$. Найти MY и DY.

7. На интервале [0; $\frac{\pi}{2}$] случайная величина X имеет равномерное распределение. Найти плотность распределения случайной величины $Y = \sin X$. Найти MY и DY.

8. Случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале [0; 8]. Найти плотность распределения случайной величины $Y = \sqrt[3]{X}$. Найти MY и DY.

9. Случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале [0; $\frac{\pi}{2}$]. Найти функцию распределения случайной величины $Y = \cos X$.

10. Случайная величина X задана на интервале [-1; 1], распределение равномерное. Найти функцию распределения случайной величины $Y = X^3$.

6. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Практика изучения случайных явлений показывает, что хотя отдельные значения случайной величины, наблюдаемые даже в одинаковых условиях, могут сильно отличаться друг, в то же время средние результаты для достаточно большого числа наблюдений, проведенных в одинаковых условиях, устойчивы и слабо зависят от результатов отдельных наблюдений.

Теоретическим обоснованием этого замечательного свойства случайных явлений является закон больших чисел. Названием "закон больших чисел" объединена группа теорем, устанавливающих устойчивость средних результатов большого количества случайных явлений и объясняющих причину этой устойчивости.

6.1 Неравенство Чебышева

В основе качественных и количественных утверждений закона больших чисел лежит неравенство Чебышева. Оно оценивает верхнюю границу вероятности того, что случайная величина отклоняется от ее математического ожидания не меньше заданного числа ε, $|X - MX| \geq \varepsilon$. Оно определяет также и нижнюю границу вероятности для противоположного события, оценивая вероятность того, что отклонение значения случайной величины от ее математического ожидания меньше заданного числа $|X - MX| < \varepsilon$. Замечательно, что неравенство Чебышева дает оценку вероятности события для случайной величины, когда для неё само распределение неизвестно, известны лишь ее математическое ожидание и дисперсия.

Неравенство Чебышева.

Если случайная величина X имеет дисперсию, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \qquad (6.1)$$

или

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \qquad (6.2)$$

где $M(X)$ и $D(X)$ – математическое ожидание и дисперсия случайной величины X.

Пример 6.1

Вероятность наступления события A в каждом независимом испытании равна 0,3. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что в 10000 испытаниях отклонение относительной частоты появления события A

от его вероятности не превзойдет по абсолютной величине $0{,}01$.

Решение.

Пусть СВ X – число появлений события A в n испытаниях. СВ X имеет биномиальное распределение с параметрами $n=10000$ и $p=0{,}3$.

$q=1-p=0{,}7$.

Нужно найти $P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<\varepsilon\right)$,

Где $\frac{X}{n}$ - относительная частота для события A, при $\varepsilon=0{,}01$.

Найдем математическое ожидание и дисперсию СВ X через параметры:

$MX=np=10000\cdot 0{,}3=3000$,

$DX=npq=10000\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7=2100$

Оценка снизу вероятности отклонения относительной частоты появления события A в n испытаниях от вероятности на величину, не превышающую $\varepsilon=0{,}01$, равна:

$$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=P\left(\left|X-np\right|<n\varepsilon\right)=$$

$$=P\left(\left|X-3000\right|<100\right)\geq 1-\frac{2100}{100^2}=1-0{,}21=0{,}79$$

Здесь использовано неравенство Чебышева (1.2) при $\varepsilon_1=n\cdot\varepsilon=100$.

Ответ: 0,79.

6.2 Теорема Чебышева

Если случайные величины X_1, X_2, …, X_n … попарно независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию, $D(X_i)=C_i<\infty$, то, как бы мало ни было положительное число ε, вероятность неравенства

$$\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon, \qquad (6.3)$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин, n, достаточно велико.

Другими словами, в условиях теоремы верна сходимость по вероятности

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1. \qquad (6.4)$$

Таким образом, теорема Чебышева утверждает, что если рассматривается достаточно большое число независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым.

Частный случай теоремы: если X_1, X_2, …, X_n … – попарно независимые случайные величины, имеющие одно и то же математическое ожидание a, и если дисперсии этих величин равномерно ограничены, то, как бы мало ни было положительное число $\varepsilon > 0$, вероятность неравенства

$$\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon \qquad (6.5)$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами, в условиях теоремы будет иметь место равенство:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)=1. \qquad (6.6)$$

Сущность теоремы Чебышева такова: хотя отдельные независимые случайные величины могут принимать значения, далекие от своих математических ожиданий, среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин с большой вероятностью принимает значения, близкие к определённому постоянному числу, а именно к числу $(M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n))/n$ (или к числу a в *частном случае*). Иными словами, отдельные случайные величины могут иметь значительный разброс, а их среднее арифметическое рассеянно мало.

6.3 Неравенство Маркова

Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения, то для любого положительного числа A верно неравенство

$$P(X \ge A) \le \frac{M(X)}{A}, \qquad (6.7)$$

Рассмотрим обоснование неравенства (6.3) для дискретной случайной величины. Расположим все её значения в порядке возрастания. Часть из них, x_1, x_2, …, x_k, будут меньше числа A, а другие значения, x_{k+1}, x_{k+2}, …, x_n, будут не меньше A, то есть: $x_1 < A$, $x_2 < A$, …, $x_k < A$ и $x_{k+1} \ge A$, $x_{k+2} \ge A$, …, $x_n \ge A$.

В выражении для математического ожидания $M(X)$:

$$x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_k \cdot p_k + x_{k+1} \cdot p_{k+1} + \ldots + x_n \cdot p_n = M(X), \qquad (6.8)$$

$p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_n$ – вероятности того, что случайная величина X примет значения соответственно $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$. Отбрасывая в (6.4) первые k неотрицательных слагаемых с учётом того, что все $x_i \geq 0$, получим:

$$x_{k+1} \cdot p_{k+1} + \ldots + x_n \cdot p_n \leq M(X),$$

Заменяя в этом неравенстве значения $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ меньшим числом A, получим более сильное неравенство: $A \cdot (p_{k+1} + \ldots + p_n) \leq M(X)$, что равносильно: $(p_{k+1} + \ldots + p_n) \leq \dfrac{M(X)}{A}$. Сумма вероятностей в левой части этого неравенства представляет собой сумму вероятностей событий $X = x_{k+1}$, $X = x_{k+2}, \ldots, X = x_n$, то есть она равна вероятности события $X \geq A$. Поэтому это неравенство можно переписать в форме (6.7).

Сумма вероятностей $P(X \geq A)$ и $P(X < A)$ равна 1, как для противоположных событий $X \geq A$ и $X < A$. Поэтому, заменяя $P(X \geq A)$ на $1 - P(X < A)$, получим другую форму неравенства Маркова:

$$P(X < A) \geq 1 - \frac{M(X)}{A}, \qquad (6.9)$$

Замечания: 1) неравенства Маркова применимы к любым неотрицательным случайным величинам; 2) неравенства Маркова (6,3) и (6,5) не дают ограничений в случае, когда $M(X) > A$. Тогда остаются следующие из определения вероятности тривиальные оценки: $P(X \geq A) \leq 1$ и $P(X < A) \geq 0$.

Следствия: Неравенства Чебышева были получены раньше неравенств Маркова. Но первые непосредственно следуют из вторых. Докажем это, применив неравенство Маркова (6.3) к функции $Y(X) = (X - a)^2$ случайной величины (СВ) X. Все её значения положительны. Если в качестве положительного числа A взять $A = \varepsilon^2$, $\varepsilon > 0$, а в качестве постоянной a – математическое ожидание СВ X, $a = M(X)$, тогда:

$$P\left((X - a)^2 \geq A\right) = P\left((X - M(X))^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{M(X - a)^2}{\varepsilon^2}. \qquad (6.10)$$

Так как неравенство $(X - a)^2 \geq \varepsilon^2$ равносильно неравенству $|X - a| \geq \varepsilon$, а

$M\left(X-a\right)^2$ – это дисперсия $D\left(X\right)$, то (6.6) принимает форму неравенства Чебышева (6.1). Другая форма (6.2) записи неравенства Чебышева следует из того, что события $\left|X-a\right|\geq\varepsilon$ и $\left|X-a\right|<\varepsilon$ противоположны, как в (6,9).

Пример 6.2 Среднее количество вызовов, поступающих на автоматическую телефонную станцию (АТС) в течение часа, равно 3000. Используя неравенства Маркова, оцените вероятность того, что в течение следующего часа число вызовов на АТС: а) превысит 4000; б) будет не более 5000.

Решение.

а) Учитывая частотное определение вероятности, будем считать, что заданное в условии среднее количество вызовов равно математическому ожиданию $M\left(X\right)=3000$. По формуле (6.7) $P\left(X\geq 4000\right)\leq\dfrac{3000}{4000}=\dfrac{3}{4}$. В итоге, вероятность, что число вызовов, поступивших на АТС, не превысит 4000, не более 0,75 < 1.

б) Формула (6,9) даёт оценку $P\left(X<5000\right)\geq 1-\dfrac{3000}{5000}=0,4$. Отсюда следует, что с вероятностью не менее 0,4 > 0 число вызовов меньше 5000.

Ответ: а) 0,75; б) 0,40.

Пример 6.3 Количество осадков, выпадающих в любой местности в течение года, является случайной величиной X, $X \geq 0$. В данной местности $M(X)$ = 850 мм. а) Оценить вероятность, что в этой местности осадков выпадет не более 1700 мм.; б) Оценить ту же вероятность, если известно и $\sigma(X)$ = 150 мм.

Решение.

а) Так как в этом случае о дисперсии СВ X мы ничего не знаем, используем первую форму неравенства Маркова (6.7):

$$P(X \geq 1700) < 850/1700 = 0{,}500.$$

Отсюда по (6.9) получаем оценку снизу для искомой вероятности:

$$P(X < 1700) = 1 - P(X > 1700) > 1 - 0{,}50 = 0{,}500.$$

б) Информация о дисперсии СВ X позволяет использовать первую форму неравенства Чебышева (6.1) и получить более точную оценку:

$$P(X \geq 1700) = P(X - 850 \geq 1700 - 850) = P(|X - M(X)| > 850) < 150^2/850^2 = 0{,}031.$$

Отсюда, согласно формуле (6.2), получаем: P(X < 1700) > 0,969.

Ответ: а) 0,500; б) 0,969.

Пример 6.4 Сумма всех вкладов в отделение Международного банка составляет три млн. Евро, а вероятность того, что случайно взятый вклад меньше 10 тыс. Евро, равна 0,5. Что можно сказать о числе вкладчиков?

Решение.

Пусть случайная величина (СВ) X – размер наудачу взятого вклада, а n – число всех вкладов (вкладчиков). Тогда из условия задачи с учётом частотного определения вероятности следует, что средний размер вклада можно считать математическим ожиданием СВ X, $M(X)=\dfrac{3000000}{n}$ Евро. Согласно неравенству Маркова (1,5): $P(X<10000)\ge 1-\dfrac{M(X)}{10000}=1-\dfrac{3000000}{10000\cdot n}$. Так как согласно условию задачи $P(X<10000)=0,5$, то получим $0,5\ge 1-\dfrac{3000000}{10000\cdot n}$. Отсюда следует, что $n\le 600$. То есть число вкладчиков не более 600.

Ответ: не более 600.

6.4 Теорема Бернулли

Простейшая форма закона больших чисел – теорема Бернулли, утверждающая, что если вероятность события одинакова во всех испытаниях, то с увеличением числа испытаний частота события стремится к постоянной вероятности события и перестает быть случайной.

Теорема Бернулли.

Пусть m_n- число успехов в n испытаниях Бернулли и p – вероятность успеха в отдельном испытании. Тогда при любом $\varepsilon>0$ справедливо:

$$P\left(\left|\frac{m_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}, \tag{6.11}$$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1. \tag{6.12}$$

Теорема Бернулли следует из неравенства Чебышева (6.2) для СВ X – числа появлений случайной величины A в n независимых испытаниях при постоянной вероятности p её появления в отдельном испытании. Для неё $M\left(\dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=\dfrac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}=\dfrac{np}{n}=p$ и $D(\bar{X})=D\left(\dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=\dfrac{D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)}{n^2}=\dfrac{n\cdot pq}{n^2}=\dfrac{pq}{n}$ и значение СВ $\dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ равно $\dfrac{m_n}{n}$.

Пример 6.5 Монету подбрасывают 1000 раз. Оценить вероятность отклонения частоты появления герба от вероятности его появления меньше чем на 0,1.

Решение.

Вероятность появления герба p = 0,5, тогда q = 1 – 0,5 = 0,5; n = 1000, $\varepsilon = 0{,}1$. Используем теорему Бернулли (1.7):

$$P\left(\left|\frac{m_n}{1000} - 0{,}5\right| < 0{,}1\right) > 1 - \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{1000 \cdot 0{,}1^2} = 1 - 0{,}025 = 0{,}975.$$

Ответ: 0,975.

6.5 Центральная предельная теорема

Центральная предельная теорема объясняет широкое распространение нормального закона распределения. Теорема утверждает: «всегда, когда случайная величина образуется в результате сложения большого числа независимых случайных величин с конечными дисперсиями, закон распределения этой случайной величины оказывается практически нормальным законом.»

Центральная предельная теорема (ЦПТ). Если случайные величины X_1, X_2, …, X_n … попарно независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию, $D(X_i) = C_i < \infty$, то при $n \to \infty$ равномерно по $x \in (-\infty, \infty)$ распределение средней нормированной случайной величины приближается к нормальному закону

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}}\right| < \varepsilon\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (6.13)$$

Пример 6.6 Участник лотереи вычеркивает 5 чисел из 36 (5 из которых выигрышные). При совпадении 3-х чисел выигрыш составляет 3 $, 4-х – 50 $ и 5-ти – 500 $. Найти границы практически возможных выплат по лотереи, если в ней участвуют n = 10000 человек.

Решение.

Обозначим через X_k – выплаты k-му участнику. Возможные значения этой дискретной случайной величины (ДСВ): 0; 3; 50; 500. Соответствующие им вероятности можно найти, используя классическое определение вероятности, например, $p_2 = P(X_k = 50) = P(\text{совпало 4 числа}) = \dfrac{C_5^4 C_{31}^1}{C_{36}^5} = 0{,}000411.$

Тогда для закона распределения и числовых характеристик ДСВ X_k имеем:

X_k	0	3	50	500
P	p_0	0,0123345	0,0004112	0,0000027

$$a = M(X_k) = \sum_{i=0}^{3} x_i p_i = 0,0589,$$

$$\sigma^2 = D(X_k) = \sum x_i^2 p_i - m^2 = 1,81054129, \ \sigma = 1.3456.$$

В силу Ц.П.Т. суммарные выплаты по лотерее $Y = \Sigma X_k$ имеют приближенно нормальное распределение с параметрами: $M(Y) = a{\cdot}n$ = 589 \$ и $\sigma(Y)$ = $\sigma(X_k)\sqrt{n}$ = 134,6 \$. Отличительным признаком нормального распределения является “правило 3-х сигм”. Поэтому его можем применить к СВ Y, чтобы определить границы практически возможных выплат:

верхняя граница = 589 + 3·134,6 = 992б8 \$,
нижняя граница = 590 – 3·134,6 = 185,2 \$.

Ответ: 185,2 \$ $\le Y \le$ 992б8 \$.

Пример 6.7 В условии предыдущего примера определить минимальное число участников, при котором лотерея не принесет убытка организаторам, если стоимость одного билета 0,3\$.

Решение.

Учитывая “правило 3-х сигм”, практически достоверно, что для искомого числа верно неравенство: $0,3n \ge mn + 3\sigma\sqrt{n}$, где a и σ найдены ранее. В результате: $0,3n \ge 0,0589n + 4,038\sqrt{n}$ или $\sqrt{n} \ge 16,75, \quad n \ge 280,6.$

Итак, уже 281 участника обеспечат организаторам отсутствие убытков.

Ответ: 281.

6.6 Закон больших чисел

Теорема, приведенная ниже под названием "Закон больших чисел" утверждает, что при определенных, достаточно общих, условиях, с увеличением числа случайных величин их среднее арифметическое стремится по вероятности к среднему арифметическому математических ожиданий и перестает быть случайным.

Закон больших чисел.

Если случайные величины X_1, X_2, …, X_n … попарно независимы и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\left(X_k\right) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ верно

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M\left(X_1\right) + M\left(X_2\right) + \ldots + M\left(X_n\right)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (6.14)$$

Это интерпретация теоремы Чебышева (6.4). Предел в (6.14) означает сходимость по вероятности к 1. Отклонение среднего значения случайных величин от среднего значения их математических ожиданий на сколь угодно малую величину $\varepsilon > 0$ с ростом n становится практически невозможным событием.

Пример 6.8 Дана последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$, причем СВ X_n имеет равномерное распределение на интервале ($-\sqrt{\ln(n)}$, $\sqrt{\ln(n)}$). Подчиняется ли она закону больших чисел (ЗБЧ)?

Решение.

Воспользуемся известным фактом, что любая СВ Z, имеющая равномерное распределение на интервале (a,b), имеет численные характеристики:

$$M(Z) = (a+b)/2, \qquad D(Z) = (b-a)^2/12.$$

Таким образом $M(X_n) = 0$, $D(X_n) = \ln(n)/3$.

Теорему Чебышева применять нельзя, так как нет ограниченности дисперсии. Но можно применить неравенство Чебышева к СВ $Y = \sum_k \frac{X_k}{n}$. Её числовые характеристики:

$$M(Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{M(X_k)}{n} = 0; \; D(Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{D(X_k)}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{3n^2} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n)}{3n^2} = \frac{\ln(n)}{3n}.$$

Неравенство Чебышева:

$$P(|Y - M(Y)| \ge \varepsilon) \le \frac{D(Y)}{\varepsilon^2} \le \frac{\ln(n)}{\varepsilon^2 3n}.$$

Так как $\ln(n) = o(n)$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$, то эта вероятность стремится к 0 при увеличении n. Другими словами

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

т.е. последовательность $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ подчиняется закону больших чисел.

Ответ: да, последовательность $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ подчиняется ЗБЧ.

6.7 Теорема Ляпунова

Теорема Ляпунова объясняет широкое распространение нормального закона распределения и поясняет механизм его образования. Теорема позволяет утверждать, что всегда, когда случайная величина образуется в результате сложения большого числа независимых случайных величин, дисперсии которых малы по сравнению с дисперсией суммы, закон распределения этой случайной величины оказывается практически нормальным законом. А поскольку случайные величины всегда порождаются бесконечным количеством причин, и чаще всего ни одна из них не имеет дисперсии, сравнимой с дисперсией самой случайной величины, то большинство встречающихся в практике случайных величин подчинено нормальному закону распределения.

Теорема Ляпунова. Пусть X_1, X_2, …, X_n … – неограниченная последовательность независимых случайных величин с математическими ожиданиями a_1, a_2, …, a_n … и дисперсиями σ_1^2, σ_2^2, …, σ_n^2, … . Обозначим $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $M_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$, $Z_n = \dfrac{Y_n - M_n}{S_n^2}$. Тогда, если выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} M\left(\left|X_k - a_k\right|^3\right)}{\left(S_n^2\right)^{3/2}} = 0, \qquad (6.15)$$

то закон распределения случайной величины Z_n с ростом *n* приближается к стандартному нормальному распределению, для которого вероятность попадания в интервал, $\alpha < Z_n < \beta$, вычисляется по формуле:

$$\lim_{n\to\infty} P(\alpha < Z_n < \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha). \qquad (6.16)$$

Она верна для любых действительных чисел α и β, в (6.12) $\Phi(x)$ – функция распределения нормального закона.

6.8 Задачи для самостоятельного решения

1. Для новогоднего праздника Петя должен сделать гирлянду из 400 электрических лампочек. Он решает включить их параллельно. Лампочки оказались очень низкого качества – вероятность того, что какая-либо из них погаснет во время праздника, составляет 0,5. С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность того, что число горящих лампочек будет заключено между 100 и 300.
2. Инвестор покупает ценные бумаги за счёт кредита, взятого с процентной ставкой r под залог своей недвижимости. Доходность ценных бумаг X представляет собой случайную величину с математическим ожиданием $a > r$ и средним квадратичным отклонением σ. Оценить вероятность того, что инвестор не сможет вернуть кредит: а) не имея никаких сведений о характере закона распределения случайной величины X, зная только, что она положительна; б) предполагая случайную величину X распределённой по нормальному закону.
3. По статистическим данным в среднем 87% новорождённых доживают до 50 лет (т. е. вероятность дожития до 50 лет равна 0,87). С помощью нера-

венства Чебышёва оценить вероятность того, что из 1000 новорождённых доля (относительная частота) доживших до 50 лет будет отличаться от вероятности не более, чем на 0,04 (по модулю).

4. Банкомат выдаёт стандартные суммы в 500, 100 и 50 долл., причём первые составляют 10%, а последние – 60% всех выдач. В среднем банкомат производит 100 выдач в сутки. Определить размер денежной суммы, которую необходимо заложить в банкомат утром, чтобы этой суммы с вероятностью 0,9 хватило для выдачи наличности вкладчикам до следующего утра.
5. Мера длины «*фут*», как видно из названия, имеет прямое отношение к ноге: это – длина ступни (сейчас примерно 30 см). Но, как известно, размеры ног бывают разные. Немцы в XVI в. выходили из положения так. В воскресный день ставили рядом 16 первых вышедших из церкви мужчин, сумма длин их левых ступней делилась на 16 – средняя длина и была «*правильным и законным футом*». Известно, что размер стопы взрослого мужчины того времени описывается случайной величиной с математическим ожиданием 262,5 мм и средним квадратичным отклонением 12 мм. Найти вероятность того, что два «*правильных и законных фута*», рассчитанных указанным способом в разные дни, отличаются друг от друга более, чем на 5 мм. Сколько нужно было бы взять мужчин для того, чтобы с вероятностью, большей 0,99, средний размер их ступней отличался бы от 262,5 мм менее, чем на 0,5 мм?
6. Строительная фирма для привлечения инвестиций в строительство нового дома собирается воспользоваться банковским кредитом. Вероятность того, что какой-либо банк в ответ на поступление бизнес-плана примет положительное решение о кредитовании фирмы, равна 0,3. Строительная фирма обратилась в 100 банков. Найти вероятности того, что решения о предоставлении кредитов этой фирме примут: а) один банк; б) 15 банков; в) 30 банков; г) 50 банков.
7. В страховой компании 10000 клиентов. Взнос каждого из них составляет 250 грн. Вероятность наступления страхового случая равна (по оценкам экспертов компании) 0,005, а страховая выплата при наступлении страхового случая составляет 25000 грн. Определить, на какую прибыль может рассчитывать страховая компания с вероятностью 0,99. Определить минимальный размер страховой премии, при котором страховая компания получит прибыль, не меньшую 250000 грн., с вероятностью 0,999.
8. Во время каникул Петя работал в предвыборном штабе кандидата в депутаты, который проводил выборочный опрос избирателей. Примерное распределение голосов было известно: по 40% избирателей «*за*» и «*против*»

кандидата, остальные воздержались. Сколько нужно опросить людей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, гарантировать отклонение процента голосов, отданных за кандидата при выборочном опросе, от истинного мнения избирателей не более, чем на 2% от всего электората?

9. В дачном посёлке 2500 жителей, каждый из которых примерно шесть раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок случайным образом и независимо от других жителей. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд ходит раз в сутки).
10. Радиотелеграфная станция передает цифровой текст. В силу наличия помех каждая цифра независимо от других может быть неправильно принята с вероятностью 0.01. Найти вероятности событий: в принятом тексте из 1100 цифр будет меньше 20 ошибок; будет ровно 7 ошибок.
11. Вероятность рождения мальчика 0.512. Найти вероятности событий: из 100 новорожденных будет ровно 51 мальчик; разница между количеством мальчиков и девочек из 100 новорожденных не превысит 10.
12. Отдел технического контроля проверяет наудачу качество отобранных 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0.9. Найти наименьший интервал, симметричный относительно 810 деталей, в котором с вероятностью, не меньшей 0.9544, будет заключено число стандартных деталей.
13. В страховой компании застраховано 5000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате аварии равна 0.009. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 30 $ страховых и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании 500$. Найти вероятность того, что по истечении года компания потерпит убыток.
14. В условии предыдущей задачи найти вероятность того, что по истечении года компания получит прибыль не менее m$, где m=20000; 80000.
15. Сколько раз нужно подбросить монету (N), чтобы с вероятностью, не меньшей 0.975, утверждать, что число выпадения герба попадет в интервал (0.4N; 0.6N)?
16. Вероятность того, что интересующая селекционеров ценная культура не прорастает в данных условиях, равна 0.2. Какое количество семян этой культуры (N) следует посадить, чтобы с вероятностью 0.8664 ожидать, что отклонение числа не проросших культур от 0.2N по абсолютной величине не превзошло 0.05N.

17. Сколько раз (N) нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью 0.6 ожидать, что отклонение числа выпадения герба от 0.5N оказалось по абсолютной величине менее 0.01N.
18. Вероятность глагола в тексте 0.09. С вероятностью 0.91 оценить интервал, симметричный относительно наиболее вероятного значения, в котором находится количество появления глаголов в тексте из 900 слов.
19. Вероятность того, что наудачу выбранная деталь содержит дефект, равна 0.02. Какова вероятность того, что при случайном осмотре 600 деталей этой партии число появления нестандартных деталей отличается по абсолютной величине от наиболее вероятного значения не более чем на 30?
20. Известно, что для некоторой профессии вероятность проф. заболевания 0.06. Проведено медицинское обследование 625 сотрудников редприятия. Найти вероятность того, что число выявленных заболеваний будет не менее 40; не более 60; от 40 до 60.
21. Вероятность неисправного кинескопа марки "Электрон" - 0.15. Найти интервал, симметричный относительно наиболее вероятного значения, в котором с Р.=0.95 находится число неисправных, если объем партии 10000 штук.

7. Многомерная случайная величина

Если в результате измерения случайной величины (СВ) определяются два, три или более чисел, случайно принимающих определённые допустимые значения, и какие из них появятся в очередном случайном эксперименте (СЭ) зависит от случайных обстоятельств, то её называют случайной величиной с двумя, тремя или с большим числом измерений. Для обозначения такой СВ используют столько больших букв одновременно, сколько в ней измерений. Например, трёхмерную СВ, состоящую из трёх составляющих (компонент) или из системы трёх совместных, зависимых или независимых случайных величин X, Y и Z, обозначают СВ (X, Y, Z).

7.1. Основные определения и формулы для двухмерной СВ (ДСВ)

Если результат СЭ (случайного эксперимента) описывается двумя случайными величинами X и Y, то принято говорить о двумерной СВ или о системе СВ (X, Y). Ее интерпретируют, как случайную точку $(X; Y)$ с координатами (x, y) на плоскости xOy или как случайный радиус-вектор такой точки.

Совместной функцией распределения системы (X, Y) называют функцию $F(x; y)$ двух переменных, определяемую равенством:

$$F(x; y) = P\{(X < x)\cap(Y < y)\}. \tag{7.1}$$

Геометрически $F(x; y)$ представляет собой вероятность попадания случайной точки $(x; y)$ в бесконечный квадрат с вершиной $(x; y)$, лежащий левее и ниже её (этой вершины).

Совместная функция распределения $F(x, y) = P\{(X < x)\cap(Y < y\}$ двухмерной СВ (X, Y), обладает следующими основными свойствами:

1. $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$, как для невозможного события;
2. $F(x, y)$ – неубывающая функция по каждому из аргументов;
3. $F(x, +\infty) = F_1(x) = P(X < x)$ – функция распределения СВ X;
4. $F(+\infty, y) = F_2(y) = P(Y < y)$– функция распределения СВ Y;
5. $F(+\infty, +\infty) = 1$ – достоверное событие: точка принадлежит бесконечной плоскости.
6. $P\{(x_1 < X < x_2)\cap(Y < y)\} = F(x_2; y) - F(x_1; y)$ – вероятность попадания точки в ∞-ую полуполосу с $x_1 < X < x_2$ и $Y < y$.
7. $P\{(X < x)\cap(y_1 < Y < y_2)\} = F(x; y_2) - F(x; y_1)$ – вероятность попадания точки в ∞-ую полуполосу с $X < x$ и $y_1 < Y < y_2$.
8. $P\{(x_1<X< x_2)\cap(y_1<Y< y_2\} = F(x_2; y_2) - F(x_1; y_2) - F(x_2; y_1) + F(x_1; y_1)$ – вероятность попадания точки внутрь прямоугольника с вершинами, имеющими координаты: $A(x_1; y_1)$, $B(x_1; y_2)$, $C(x_2; y_2)$, $D(x_2; y_1)$,
9. $F(x; y) = F_1(x)\ F_2(y)$ – необходимое и достаточное условие независимости

компонент X и Y двумерной СВ (X, Y); оно эквивалентно тождеству $P\{(X < x)\cap(Y < y)\} = P(X < x)\ P(Y < y)$, следующему из теоремы умножения вероятностей для независимых СВ.

7.1.1. Дискретная ДСВ

Пусть компоненты дискретной двухмерной СВ (ДСВ) X и Y принимают значения x_1, x_2, … и y_1, y_2, … соответственно. Её совместный закон распределения можно задавать матрицей (P_{ij}) с элементами $p_{ij} = P\{(X = x_i)\cap(Y = y_j)\}$, удовлетворяющими очевидному условию: $\sum\limits_i \sum\limits_j p_{ij} = 1$.

Суммируя вероятности p_{ij} по элементам i-ой строки, получим вероятность p_i, $\sum\limits_j p_{ij} = p_i$, для значения x_i ряда распределения дискретной СВ X, а суммируя вероятности p_{ij} по элементам j-го столбца, получим вероятности p_j, $\sum\limits_i p_{ij} = p_j$, для значения y_j ряда распределения дискретной СВ Y.

По теореме умножения вероятностей (ТУ) $p_{ij} = p_i{\cdot}p_{j|i}$, где $p_{j|i}$ – условная вероятность наступления значения y_j для СВ Y, если значение x_i случайной величины X уже наступило. Тогда по определению условная вероятность равна $p_{j|i} = p_{ij}\,/p_i$. (Для всех значений независимых компонент X и Y двумерной ДСВ верно $p_{ij} = p_i{\cdot}p_j$).

Каждая из компонент ДСВ имеет соответствующее математическое ожидание m и среднее квадратическое отклонение σ. Они вычисляются согласно определению соответствующей численной характеристики для одномерной СВ. Но полезны и старшие перекрёстные моменты. Один из них – это коэффициент ковариации ρ_{xy} или коэффициент корреляции $r = \rho_{xy}/\sigma_x\sigma_y$.

7.1.1.1 Коэффициент корреляции компонент дискретной ДСВ

Пусть m_x и m_y – математические ожидания, а σ_x и σ_y – средние квадратические отклонения случайных величин X и Y, соответственно. Коэффициентом ковариации системы дискретной ДСВ (X; Y) называют число:

$$\rho_{xy} = \left(\sum_{i,j} (x_i - m_x)\cdot(y_j - m_y)\, p_{ij} \right) = \left(\sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} - m_x m_y \right). \qquad (7.2)$$

Если коэффициент ковариации равен нулю, $\rho_{xy} = 0$, то говорят: «СВ X и СВ Y являются не коррелированными». А если ковариационный момент ρ_{xy} не равен нулю, $\rho_{xy} \neq 0$, то «СВ X и СВ Y являются коррелированными». Две коррелированные величины также и зависимые. Обратное предположение не всегда имеет место, т.е. если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и не коррелированными. Но если две величины коррелированные, $\rho_{xy} \neq 0$, то они обязательно и зависимые.

Коэффициентом корреляции системы ДСВ (X; Y) называют число:

$$r = \frac{\rho_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \left(\sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} - m_x m_y \right) \Big/ \sigma_x \sigma_y \,. \tag{7.2}$$

Свойства коэффициента корреляции:

1. $-1 \leq r \leq 1$;
2. если компоненты X и Y – независимы, то $r = 0$;
3. если компоненты X и Y – зависимы, то $r \neq 0$;
4. если $r = 0$, то компоненты X и Y не коррелированные, но могут быть и зависимыми;
5. если $r \neq 0$, то компоненты X и Y коррелированные и зависимые
6. если $Y = aX + b$, где a и b – неслучайны, то $r = \pm 1$ (знак “+” соответствует $a > 0$, знак “–” соответствует постоянной $a < 0$).

Пример 7.1.

Из колоды карт наудачу извлекают по одной *с возвращением* две карты, X – число карт черного цвета, Y – число карт пиковой масти среди извлеченных карт. Найти совместный закон распределения (X, Y) и коэффициент корреляции.

Решение.

Возможные значения величин X и Y – это 0, 1, 2. Обозначим вероятности совместного появления этих значений $p_{ij} = P\{(X=\text{i}) \cap (Y=\text{j})\}$, i, j = 0, 1, 2. (Замечание: при последовательном извлечении карт с возвращением вероятность появления любой карты не зависит от её появления или не появления при предыдущем извлечении карты и для независимых событий $p_{ij} = p_i \cdot p_j$).

Так как карта пиковой масти и карта черная – события зависимые, то $p_{01} = p_{02} = p_{12} = 0$. Остальные вероятности найдем, используя теоремы сложения и умножения вероятностей:

$p_{00} = P(X=0, Y=0) = P$(обе карты красные) = ½·½.

$p_{10} = P(X=1, Y=0) = P$(только одна черная, но не пика) = P(одна трефа и одна красная или одна красная и одна трефа) = ¼·½ + ½·¼.

$p_{11} = P(X=1, Y=1) = P$(одна пика и одна красная) = 2·¼·½.

$p_{20} = P$(обе черные, но не пики) = ¼·¼.

$p_{21} = P$(одна пика и одна трефа) = 2·¼·¼.

$p_{22} = P$(обе пики) = ¼·¼.

Итак, совместный закон распределения имеет вид:

X \ Y	0	1	2
0	0,25	0	0
1	0,25	0,25	0
2	0,0625	0,125	0,0625

Суммируя вероятности по строкам и столбцам, найдём для каждой компоненты, X и Y, ДСВ соответствующий закон распределения и вычислим по ним математические ожидания и среднеквадратические отклонения.

Закон распределения компоненты X ДСВ:

X	0	1	2
p_i	0,25	0,5	0,25

Закон распределения компоненты Y ДСВ:

Y	0	1	2
p_j	0,5625	0,375	0,0625

Анализируя условия проведения повторного СЭ, приходим к выводу, что и СВ X, и СВ Y имеют биномиальное распределения с параметрами: $n = 2$ и соответственно $p_1 = 0,5$ для X и $p_2 = 0,25$ для Y – *пиковая карта чёрная*. Поэтому математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение для них можно найти, не прибегая к полученным законам распределения, а воспользоваться известными результатами: $m = M(A) = np$, $\sigma_1 = \sqrt{D(X)} = \sqrt{npq}$,

$$m_1 = M(X) = np_1 = 1; \quad m_2 = M(Y) = np_2 = 0,5;$$

$$\sigma_1 = \sqrt{D(X)} = \sqrt{np_1(1-p_1)} = 0,707; \quad \sigma_2 = \sqrt{D(Y)} = 0,612;$$

Убедитесь, что применение закона распределения СВ даст тот же результат.

Далее находим $M(X \cap Y)$:

$$M(X, Y) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = 0\cdot0\cdot0,25 + 0\cdot1\cdot0 + 0\cdot2\cdot0 + 1\cdot0\cdot0,25 + 1\cdot1\cdot0,25 +$$
$$+ 1\cdot2\cdot0 + 2\cdot0\cdot0,0625 + 2\cdot1\cdot0,125 + 2\cdot2\cdot0,0625 = 0,75.$$

Теперь можно найти коэффициент корреляции:

$$r = \frac{0,75 - 1\cdot 0,5}{0,707\cdot 0,612} = 0,578.$$

Ответ: закон распределения ДСВ построен выше;

r = 0,578.

Пример 7.2.

Производятся три независимых выстрела по мишени, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна p, X – число попаданий, Y – число промахов. Найти закон распределения системы (X, Y) и вычислить коэффициент корреляции.

Решение.

Возможные значения случайных величин X и Y – это 0, 1, 2, 3. Очевидно, если i + j ≠ 3, i, j = 0, 1, 2, 3, то $p_{ij} = P\{(X{=}i)\cap(Y{=}j)\} = 0$. Остальные четыре вероятности находим по формуле Бернулли (n = 3, p = P(числа попаданий)):

$p_{03} = P(X{=}0;\ Y{=}3) = P_3(0) = (1 - p)^3$;

$p_{12} = P_3(X{=}1;\ Y{=}2) = P_3(1) = C_3^1 p^1 (1-p)^2$;

$p_{21} = P_3(X{=}2;\ Y{=}1) = P_3(2) = C_3^2 p^2 (1-p)^1$;

$p_{30} = P_3(X{=}3;\ Y{=}0) = P_3(3) = p^3$.

Здесь важно, что СВ X и СВ Y связаны линейной функциональной зависимостью $Y = -X + 3$. Поэтому коэффициент корреляции равен $r = -1$. Формула (7.2) для коэффициент корреляции СВ X и СВ Y даёт то же.

Ответ: равны нулю все совместные вероятности, кроме

$$p_{i,\,3-i} = C_3^i p^i (1-p)^{3-i};\ i = 0, 1, 2, 3;\ r = -1$$

7.1.2. Непрерывная ДСВ

Основные определения и формулы, связанные с непрерывной ДСВ.

Совместная функция распределения $F(x, y) = P\{(X < x)(Y < y)\}$ является кусочно-непрерывной функцией своих аргументов и поэтому дифференцируема. Следовательно для непрерывных СВ X и Y совместный закон распределения можно задавать совместной плотностью $f(x,y)$ системы СВ (X, Y):

$$f(x,y) = F''_{xy}(x,y)\ . \qquad (7.3)$$

Плотность $f(x,y)$ – это вероятность для случайной точки плоскости попасть в квадрат единичной площади, в центре которого точка (x,y).

Плотность $f(x,y)$ обладает следующими свойствами:

1) $f(x,y) \geq 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = F(x,y)$ – совместная функция распределения;

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = f_1(x)$ – плотность СВ X;

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = f_2(y)$ – плотность СВ Y;

5) $\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = F_1(x)$ – функция распределения СВ X;

$\int\limits_{-\infty}^{y} f(s)ds = F_2(y)$ – функция распределения СВ Y;

6) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в произвольную область D выражается формулой:

$$P\{(X,Y) \in D\} = \iint\limits_{D} f(x,y) \cdot dx \cdot dy. \tag{7.4}$$

Отношения $f(x,y)/f_2(y) = f_1(x/y)$ и $f(x,y)/f_1(x) = f_2(y/x)$ определяют условные плотности вероятности случайных величин X и Y соответственно.

СВ X и СВY называют *независимыми*, если условные плотности равны соответствующим безусловным плотностям, $f_1(x/y) = f_1(x)$ и $f_2(y/x) = f_2(y)$.

Теорема: Для того, чтобы СВ X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы совместная плотность системы СВ (X, Y) была равна произведению плотностей её компонент, X и Y, то есть равносильны равенства:

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y); \tag{7.5}$$

$$F(x, y) = F(x) \cdot F(y). \tag{7.5′}$$

7.1.2.1 Коэффициент корреляции непрерывной ДСВ

Коэффициент ковариации непрерывной ДСВ (X, Y) равен:

$$\rho_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f(x,y) \cdot dx \cdot dy - M(X) \cdot M(Y), \tag{7.6}$$

где $f(x,y)$ – совместная плотность непрерывной ДСВ (X, Y).

Коэффициентом корреляции компонент X и Y непрерывной ДСВ (X, Y), как и для дискретной ДСВ, называют безразмерную величину r:

$$r = \frac{\rho_{xy}}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}. \qquad (7.7)$$

Все свойства коэффициента ковариации и коэффициента корреляции дискретной ДСВ остаются верными и для компонент непрерывной ДСВ.

Пример 7.3. Система СВ (X, Y) задана совместной плотностью:

$$f(x,y) = \begin{cases} A\cdot x\cdot e^{-(3+y)x}, \text{ при } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0, \\ 0, \text{ если иначе.} \end{cases}$$

Найти: а) параметр A; б) совместную функцию распределения $F(x,y)$; в) одномерные функции: $f_1(x)$, $f_2(y)$, $F_1(x)$, $F_2(y)$; г) условные плотности $f_1(x/y)$ и $f_2(y/x)$; д) коэффициент ковариации (корреляции).

Решение:

а) Параметр A находим, используя свойство 2) плотности ДСВ (X, Y):

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} Axe^{-3x-yx}dxdy = A\int_{0}^{+\infty} xe^{-3x}\int_{0}^{+\infty} e^{-yx}dy =$$

$$= A\int_{0}^{+\infty} xe^{-3x}\left(-\frac{1}{x}e^{-yx}\Bigg|_{0}^{+\infty}\right)dx = A\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx = \frac{A}{3}, \text{ отсюда } A = 3.$$

б) Совместная функция распределения $F(x, y)$ отлична от 0 только в первом квадранте, в котором $x > 0$ и $y > 0$. В нём по свойству 3) она равна:

$$F(x,y) = \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} 3xe^{-3x-yx}dydx = 3\int_{0}^{x} xe^{-3x}\left(-\frac{1}{x}e^{-yx}\Bigg|_{0}^{y}\right) = 3\int_{0}^{x} e^{-3x}\left(1-e^{-yx}\right)dx =$$

$$= 3\left(-\frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3+y}e^{-x(3+y)}\right)\Bigg|_{0}^{x} = 1 - e^{-3x} + \frac{3}{3+y}\left(e^{-x(3+y)} - 1\right), \ (x \geq 0, y \geq 0);$$

$F(x,y) = 0,$ если иначе.

в) Используя свойство 4), находим плотности $f_1(x)$ и $f_2(y)$:

$$f_1(x)=\int_0^{+\infty}3xe^{-3x-yx}dy=3xe^{-3x}\lim_{M\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}e^{-yx}\right)\Bigg|_0^{y=M}=3e^{-3x},\ \text{при } x>0.$$

$$f_2(y)=\int_0^{+\infty}3xe^{-x(3+y)}dx=\begin{bmatrix}u=3x,\ du=3dx\\ dv=e^{-x(3+y)}dx,\ v=-\dfrac{1}{3+y}e^{-x(3+y)}\end{bmatrix}=$$

$$=-\lim_{M\to+\infty}\left(\frac{3x}{3+y}e^{-x(3+y)}\right)\Bigg|_0^{x=M}+\frac{3}{3+y}\int_0^{+\infty}e^{-x(3+y)}dx=$$

$$0+\frac{3}{3+y}\cdot\lim_{M\to+\infty}\left(-\frac{1}{3+y}e^{-x(3+y)}\right)\Bigg|_0^{x=M}=\frac{3}{(3+y)^2},\ \text{при } y\ge 0.$$

(Здесь использовалось известное соотношение $x = o(e^x)$ при $x \to +\infty$).

Для отрицательных значений аргументов плотности $f_1(x)$, $f_2(y)$ равны 0, так как равна 0 совместная плотность $f(x,y)$ для ДСВ (X, Y).

Функции распределения $F_1(x)$, $F_2(y)$ находим, используя свойство 5) одномерных плотностей:

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x}f_1(t)dt=\int_0^x 3e^{-3t}dt=-e^{-3t}\Big|_0^x=1-e^{-3x},\ \text{при } x\ge 0.$$

$$F_2(y)=\int_{-\infty}^{y}f_2(s)ds=\int_0^y\frac{3}{(3+s)^2}ds=-\frac{3}{3+s}\Bigg|_0^y=1-\frac{3}{3+y},\ \text{при } y\ge 0.$$

г) Условные плотности:

$$f_1(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=x(3+y)^2e^{-x(3+y)},\ \text{при } x\ge 0.$$

Она определена лишь для $y \ge 0$, когда $f_2(y) \ne 0$.

$$f_2(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=xe^{-yx},\ \text{при } y\ge 0.$$

Эта плотность определена лишь для $x \ge 0$, когда $f_2(y) \ne 0$.

Поскольку безусловные и условные вероятности не совпадают, можем сделать вывод, что компоненты этой непрерывной ДСВ зависимые.

д) найдем числовые характеристики СВ X и СВ Y. Плотность $f_1(x)$ для СВ X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 3$. Поэтому:

$M(X) = 1/\lambda = 1/3$; $D(X) = (1/\lambda)^2 = 1/9$.

Вид плотности $f_2(y)$ говорит о том, что $M(Y) = +\infty$, так как интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_2(y) \cdot dy = \int_{0}^{+\infty} y \cdot \frac{3}{(3+y)^2} \cdot dy$$ расходится.

Оказалось, что подынтегральная функция на $+\infty$ эквивалентна функции 3/у, интеграл от которой расходится.

Таким образом, коэффициент ковариации не существует.

Ответ: компоненты этой непрерывной ДСВ зависимые, но коэффициент ковариации и коэффициент корреляции для неё не существуют.

8. Функция от двух случайных величин

8.1. Основные определения и формулы

Когда СВ Z, являющаяся функцией случайного аргумента, зависит от многомерной СВ, говорят о её зависимости от нескольких случайных величин. В этом случае удобнее сначала искать для СВ Z функцию распределения, а затем плотность распределения определять дифференцированием.

Так, если непрерывная СВ Z есть функция от двух случайных аргументов X и Y: $Z = \varphi(X, Y)$, то ее функция распределения имеет вид:

$$P(Z < z) = G(z) = \iint\limits_{(x,y)\in D(z)} f(x,y)dxdy, \tag{8.1}$$

где $f(x, y)$ – совместная плотность системы случайных величин (X, Y), а двойной интеграл берется по области $D(z)$ плоскости xOy, для которой $\varphi(x,y) < z$.

Тогда плотность распределения получается её дифференцированием

$$g(z) = G'(z) = \frac{d}{dz}\left(\iint\limits_{(x,y)\in D(z)} f(x,y)dxdy\right), \tag{8.2}$$

Пример 8.1. Найти функцию и плотность распределения СВ $Z = Y - X$, где X и Y – независимые СВ, причем СВ X равномерно распределена в интервале (–1; 1), а СВ Y – имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$.

Решение:

Выпишем плотности СВ X и СВ Y:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0.5, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-1\cdot y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

Так как X и Y – независимы, то совместная плотность системы (X, Y) есть произведение их плотностей:

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y) = \begin{cases} 0.5\cdot e^{-1\cdot y}, & \text{если } |x| < 1 \text{ и } y > 0, \\ 0, & \text{если или } |x| \geq 1, \text{ и/или } y \leq 0. \end{cases}$$

Плотность $f(x, y) \neq 0$ в полуполосе $K = \{(x,y): -1 < x < 1, 0 < y < +\infty\}$ и $f(x,y) = 0$ вне полуполосы K.

Множество возможных значений СВ Z – это интервал $(-1; +\infty)$. Поэтому $F(z) = P(Z < z) = 0$ при $z \leq -1$. Для вычисления $F(z)$ при других значениях z рассмотрим множество $D(z)$, по которому интегрируется совместная плотность. Это часть полуполосы K, удовлетворяющая условию $y - x < z$, т.е.

часть *К*, лежащая ниже прямой $y = x + z$. Форма $D(z)$ и пределы интегрирования в повторном интеграле зависят от значения z:

1) При $z > 1$ получим $D(z) = \{(x, y): -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x + z\}$ и тогда:

$$F(z) = P(Y - X < z) = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{x+z} 0{,}5e^{-y}dy = 0{,}5(2 + e^{-1-z} - e^{1-z}) = 1 - e^{-z}sh1.$$

2) При $-1 < z \le 1$ имеем $D(z) = \{(x, y): -z \le x \le 1,\ 0 \le y \le x + z\}$, когда:

$$F(z) = \int_{-z}^{1} dx \int_{0}^{x+z} 0{,}5 \cdot e^{-y}dy = 0{,}5 \cdot (z + e^{-z-1}).$$

Согласно формуле (8,2) плотность распределения $f(z)$ для СВ $Z = Y - X$ получается дифференцированием функции распределения $F(z)$:

$$f(z) = F'(z) = \begin{cases} 0{,}5 \cdot (1 - e^{-z-1}), \text{ при } -1 < z \le 1\ ; \\ e^{-z}sh1, \quad \text{если } z > 1. \end{cases}$$

Ответ: $F(z) = \begin{cases} 0{,}5 \cdot (z + e^{-z-1}), \text{ при } -1 < z \le 1\ ; \\ 1 - e^{-z}sh1, \quad \text{если } z > 1; \end{cases}$

$$f(z) = \begin{cases} 0{,}5 \cdot (1 - e^{-z-1}), \text{ при } -1 < z \le 1\ ; \\ e^{-z}sh1, \quad \text{если } z > 1. \end{cases}$$

Пример 8.2. В прямоугольник *K* с вершинами (0;0), (*a*;0), (0;*b*), (*a*;*b*) наудачу ставят точку (*X*; *Y*) и опускают из нее перпендикуляры на оси координат. Найти закон распределения, плотность распределения, площади многоугольника *T*, образованного этими перпендикулярами и осями координат.

Решение:

Условие, что точка ставится в прямоугольник *К* наудачу, означает, что двумерная СВ (*X*;*Y*) имеет равномерное распределение в *K*, т.е. ее совместная плотность $f(x, y) = C$ в прямоугольнике *K* и $f(x, y) = 0$ вне К, тогда $C = 1/(a \cdot b)$. Функциональная зависимость СВ: $T = X \cdot Y$, т.е. $t = \varphi(x, y) = x \cdot y$. Область интегрирования в формуле для функции распределения:

$$D(t) = \{(x, y): x \cdot y < t\} = \{(x, y): y < t/x\}.$$

Учитывая вид плотности $f(x, y) = 1/(a \cdot b)$, получим:

$$F(t) = P(T < t) = \iint_{\{y < \frac{t}{x}\}} f(x, y)dxdy = \frac{1}{a \cdot b} \iint_{G(t)} dxdy.$$

Здесь $G(t)$ – это часть прямоугольника K, лежащая ниже гиперболы $y = t/x$, а интеграл по области $G(t)$ – это не что иное, как её площадь:

$$\iint\limits_{G(t)} dxdy = (\frac{t}{b}) \cdot b + \int\limits_{t/b}^{a} \frac{t}{x} \cdot dx = t + t \cdot \ln x\Big|_{t/b}^{a} = t\left(1 + \ln\frac{ab}{t}\right).$$

Здесь $x=t/b$ – координата точки пересечения гиперболы с верхней стороной $y = b$ прямоугольника, а $(t/b)\cdot b$ – это площадь его части с основанием (t/b) и высотой b. Итак, окончательно функция распределения площади, оказавшейся ниже гиперболы, имеет вид:

$$F(t) = \begin{cases} 0, \text{ при } t < 0; \\ \dfrac{t}{ab}\left(1 - \ln\dfrac{t}{ab}\right), \text{ при } 0 \le t \le ab; \\ 1, \text{ при } t \ge ab. \end{cases}$$

(Это следует из общих свойств функции распределения). Дифференцируя эту функцию, находим плотность:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{ab}\left(1 - \ln\dfrac{t}{ab}\right) + \dfrac{t}{ab}\left(-\dfrac{ab}{t}\right)\dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{ab}\ln\dfrac{ab}{t}, \text{ если } t \in [0, ab]; \\ 0, \text{ если } t \notin [0, ab]. \end{cases}$$

Ответ: $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{ab}\ln\dfrac{ab}{t}, \text{ если } t \in [0, ab]; \\ 0, \text{ если } t \notin [0, ab]. \end{cases}$

Пример 8.3. Найти закон распределения суммы двух независимых непрерывных СВ X и Y, т. е. закон распределения случайной величины $Z= X+Y$. (Когда СВ X и СВ Y независимы, говорят о композиции, свёртке, законов их распределения.) Решить задачу в общем виде.

Решение:

Запишем сначала функцию распределения СВ Z от двух случайных аргументов X и Y: $Z = \varphi(X, Y)$. Согласно формуле (8.1) она равна:

$$P(Z < z) = G(z) = \iint\limits_{(x,y)\in D(z)} f(x, y)dxdy. \qquad (8.1')$$

В ней $f(x, y)$ – совместная плотность системы случайных величин (X, Y), а двойной интеграл берется по области $D(z)$, для которой $\varphi(x,y) = x + y < z$.

Так как X и Y – независимы, то совместная плотность системы (X, Y) есть произведение их плотностей:

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Плотность $f(x, y) \neq 0$ при всех значениях x и y, для которых ненулевые значения имеют плотности $f_1(x)$ для СВ X и $f_2(y)$ для СВ Y. В общем случае это вся плоскость xOy: $K = \{(x,y)$: $-\infty < x < +\infty 1$, $-\infty < y < +\infty\}$.

Тогда множество возможных значений СВ Z – это все действительные числа, $-\infty < z < +\infty$. Для вычисления $F(z)$ рассмотрим множество $D(z)$, по которому интегрируется совместная плотность. Это часть плоскости K, удовлетворяющая условию $y + x < z$, т.е. часть K, лежащая ниже прямой $y = z - x$, и пределы интегрирования в повторном интеграле (8.1′) зависят от значения z:

$$F(z) = P(X+Y<z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx \int_{-\infty}^{z-x} f_2(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)\,dy \int_{-\infty}^{z-y} f_1(x)\,dx.$$

Согласно формуле (8,2) плотность распределения $f(z)$ для СВ $Z= X+Y$ получается дифференцированием функции распределения $F(z)$:

$$f(z) = F'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\, f_2(z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y)\, f_2(y)\,dy. \qquad (8.3)$$

Замечание: формулу (8.3) называют *формулой композиции* двух распределений, $f_1(x)$ и $f_2(y)$, или *формулой свёртки*.

Ответ: $f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\, f_2(z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y)\, f_2(y)\,dy.$

9. Литература

1. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 543 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1998. – 479 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задачпо теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2008. – 404 с.
4. Теория вероятностей: методическое пособие: в 2 ч./сост. Бархатова И.В., Кравец Т.Н., Грамотина О.В., Габриэль Л.А. /Изд. 2-е, перераб. – Донецк: ІПШІ «Наука і освіта», 2010. – Ч.1. – 112 с.
5. Вентцель В.С. Теория вероятностей / Учебник для вузов / 6-е изд. стер. – М.: Высшая школа, 1999. – 576 с.
6. Бобик О.І., Берегова Г.І., Копитко Б.І. Теорія ймовірностей і математична статистика./ Підручник – К.: ВД «Професіонал», 2007. – 560 с.
7. Дрибан В.М., Пенина Г.Г. Теория вероятностей / Учебное пособие. – Донецк: ДонГУЭТ, 2003. – 519 с.