Расчетное задание № 2: *"МНОЖЕСТВА И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ"*

Замечание: Понятие ***множества*** считают *первоначальным* и *не определяемым*. Под ***ним*** понимают любое собрание определенных и отличных друг от друга объектов (нашей интуиции или интеллекта), мыслимое как единое целое. Создатель теории множеств немецкий математик Георг Кантор (1845–1918) говорил так: "Множество есть многое, мыслимое нами как целое". С не достаточно четким понятием ***множества*** нужно обращаться осторожно. Рекомендуется рассматривать только такие множества, возможные элементы которых были бы достаточно четко очерченными и неизменными объектами. Например, вряд ли разумно рассматривать множество хороших идей, множество капель воды в стакане и т. д.

Принято считать, что пустое множество, Ø, введено в математике для удобства и единообразия языка и является подмножеством любого множества. Так, если при исследовании множества объектов, обладающих определенным свойством, выясняется, что такие объекты не существуют, то удобно сказать, что "исследуемое множество пусто", а не объявлять его "несуществующим".

Задача 1. Для множеств A, B и C определить:

а) $A \cup C = ?$; б) $A \cap B = ?$; в) $A \cup B \setminus C = ?$; г) $\overline{\left(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}\right)} = ?$.

Варианты:

1.1. $A = \{x \mid x \in [1;5)\}; B = \{x \mid x \in (2;5]\}; C = \{x \mid x \in [4;7]\}$.

1.2 $A = \{x \mid x \in (-1;5)\}; B = \{x \mid x \in [0;4]\}; C = \{x \mid x \in (3;7]\}$.

1.3 $A = \{x \mid x \in (2;5]\}; B = \{x \mid x \in [3;6)\}; C = \{x \mid x \in [5;9]\}$.

1.4 $A = \{x \mid x \in (-5;2)\}; B = \{x \mid x \in [0;1]\}; C = \{x \mid x \in [1;9)\}$.

1.5 $A = \{x \mid x \in [-9;0)\}; B = \{x \mid x \in [-5;-1]\}; C = \{x \mid x \in [-1;7)\}$.

1.6 $A = \{x \mid x \in (0;4]\}; B = \{x \mid x \in [3;5]\}; C = \{x \mid x \in [4;8)\}$.

1.7 $A = \{x \mid x \in [1;3]\}; B = \{x \mid x \in (2;5)\}; C = \{x \mid x \in [3;9)\}$.

1.8 $A = \{x \mid x \in (-2;2)\}; B = \{x \mid x \in [-1;1]\}; C = \{x \mid x \in [1;5)\}$.

1.9 $A = \{x \mid x \in (-5;3]\}; B = \{x \mid x \in [-4;2)\}; C = \{x \mid x \in [(-7;-4])\}$.

1.10 $A = \{x \mid x \in (-2;5]\}; B = \{x \mid x \in [2;6)\}; C = \{x \mid x \in [5;8]\}$.

1.11. $A = \{x \mid x \in (-5;2)\}; B = \{x \mid x \in [-2;-1]\}; C = \{x \mid x \in [-1;9)\}$.

1.12 $A = \{x \mid x \in (0;4]\}; B = \{x \mid x \in [3;5]\}; C = \{x \mid x \in [4;8)\}$.

1.13 $A = \{x \mid x \in [-1;3]\}; B = \{x \mid x \in (-2;5)\}; C = \{x \mid x \in [3;8)\}$.

1.14 $A = \{x \mid x \in (-2;3)\}; B = \{x \mid x \in [-1;2]\}; C = \{x \mid x \in [2;4)\}$.

1.15 $A = \{x \mid x \in (-2;5]\}; B = \{x \mid x \in [0;6)\}; C = \{x \mid x \in [5;7]\}$.

1.16 $A = \{x \mid x \in (2;4]\}; B = \{x \mid x \in [3;6)\}; C = \{x \mid x \in [4;6]\}$.

1.17 $A = \{x \mid x \in (-5;3)\}; B = \{x \mid x \in [0;2]\}; C = \{x \mid x \in [2;9)\}$.

1.18 $A = \{x \mid x \in [-9;0)\}; B = \{x \mid x \in [-5;-1]\}; C = \{x \mid x \in [-1;7)\}$.

1.19 $A = \{x \mid x \in (0;4]\}; B = \{x \mid x \in [3;5]\}; C = \{x \mid x \in [4;8)\}$.

1.20 $A = \{x \mid x \in [1;3]\}; B = \{x \mid x \in (2;5)\}; C = \{x \mid x \in [3;9)\}$.

1.21. $A = \{x \mid x \in (-2;2)\}; B = \{x \mid x \in [-1;1]\}; C = \{x \mid x \in [1;5)\}$.

1.22 $A=\{x \mid x\in(2;5]\};B=\{x \mid x\in[3;6)\};C=\{x \mid x\in[5;9]\}.$

1.23 $A=\{x \mid x\in(-5;1)\};B=\{x \mid x\in[-2;0]\};C=\{x \mid x\in[0;9)\}.$

1.24 $A=\{x \mid x\in[-9;2)\};B=\{x \mid x\in[-5;1]\};C=\{x \mid x\in[1;7)\}.$

1.25 $A=\{x \mid x\in(0;5]\};B=\{x \mid x\in[3;5]\};C=\{x \mid x\in[5;8)\}.$

1.26 $A=\{x \mid x\in[-1;3]\};B=\{x \mid x\in(-2;5)\};C=\{x \mid x\in[3;6)\}.$

1.27 $A=\{x \mid x\in(-2;3)\};B=\{x \mid x\in[-1;2]\};C=\{x \mid x\in[2;5)\}.$

1.28 $A=\{x \mid x\in(2;5]\};B=\{x \mid x\in[3;6)\};C=\{x \mid x\in[-5;3]\}.$

1.29 $A=\{x \mid x\in[0;1)\};B=\{x \mid x\in(-1;1)\};C=\{x \mid x\in[-2;0]\}.$

1.30 $A=\{x \mid x\in(-5;-2)\};B=\{x \mid x\in[-3;1]\};C=\{x \mid x\in[1;3)\}.$

1.31 $A=\{x \mid x\in[-7;0)\};B=\{x \mid x\in[-5;-1]\};C=\{x \mid x\in[-1;5)\}.$

Задача 2. Какие выводы можно сделать относительно множеств А и В (соответствующую ситуацию, для наглядности, желательно изобразить с помощью кругов Эйлера), если для них верно приведенное равенство.

Варианты:

2.1. $A\cup B=A.$

2.2 $A\cap B=A.$

2.3 $A\setminus B=A.$

2.4 $A\setminus B=B\setminus A.$

2.5 $A\cap B=B; B\setminus A=\varnothing.$

2.6 $A\setminus B=B\setminus A=\varnothing.$

2.7 $A\cup B=A; A\setminus B=A.$

2.8 $A\setminus B=A; B\setminus A=B.$

2.9 $A\cap B=A; A\setminus B=\varnothing.$

2.10 $A\cup B=B; B\setminus A=B.$

2.11 $A\cup B=A.$

2.12 $A\cap B=A.$

2.13 $A\setminus B=A.$

2.14 $A\setminus B=B\setminus A.$

2.15 $A\cap B=B; B\setminus A=\varnothing.$

2.16 $A\setminus B=B\setminus A=\varnothing.$

2.17 $A\cup B=A; A\setminus B=A.$

2.18 $A\setminus B=A; B\setminus A=B.$

2.19 $A\cap B=A; A\setminus B=\varnothing.$

2.20 $A\cup B=B; B\setminus A=B.$

2.21. $A\cup B=A.$

2.22 $A\cap B=A.$

2.23 $A\setminus B=A.$

2.24 $A\setminus B=B\setminus A.$

2.25 $A\cap B=B; B\setminus A=\varnothing.$

2.26 $A\setminus B=B\setminus A=\varnothing.$

2.27 $A\cup B=A; A\setminus B=A.$

2.28 $A\setminus B=A; B\setminus A=B.$

2.29 $A\cap B=A; A\setminus B=\varnothing.$

2.30 $A\cup B=B; B\setminus A=B.$

2.31. $A\cup\overline{B}=A; B\cup\overline{A}=B.$

Правило приоритета для операций с множествами, в порядке его убывания, от максимального до наименьшего: 1) $\overline{A}$; 2) $A\cap B$; 3) $A\cup B$; 4) $A\setminus B$.

Задача 3. Применив правила приоритета операций с множествами, расставьте скобки в заданном выражении.

Варианты:

3.1. $\left(A\setminus B\cup\overline{A}\cap D\right)\setminus B\cup\overline{D}=?.$

3.2 $\left(\overline{B}\setminus A\cap D\cup\overline{C}\right)\setminus C\cap D=?.$

3.3 $\left(A\setminus\overline{A}\cap D\cup\overline{C}\right)\setminus B\cup C=?.$

3.4 $\left(\overline{B}\setminus A\cap D\cup C\right)\setminus C\cap\overline{D}=?.$

3.5 $\left(A\cap\overline{B}\setminus B\cap D\cup\overline{C}\right)\setminus B=?.$

3.6 $\left(A\cap B\setminus B\cup\overline{A}\cap D\right)\setminus\overline{D}=?.$

3.7 $\left(A\cap\overline{B}\setminus\overline{A}\cap D\cup C\right)\setminus C=?.$

3.8 $\left(\overline{B}\setminus B\cup\overline{A}\cap D\right)\setminus B\cup C=?.$

3.9 $\left(A\setminus B\cup A\cap\overline{C}\right)\setminus C\cap\overline{D}=?.$

3.10 $\left(A\cap\overline{B}\setminus A\cap D\cup\overline{C}\right)\setminus B=?.$ 3.11 $\left(B\setminus B\cup\overline{A}\cap D\right)\setminus C\cap\overline{D}=?.$

3.12 $\left(B\setminus B\cup\overline{A}\cap\overline{C}\right)\setminus B\cap D=?.$ 3.13 $\left(\overline{A}\setminus A\cap D\cup C\right)\setminus B\cup\overline{D}=?.$

3.14 $\left(B\setminus B\cup\overline{A}\cap C\right)\setminus C\cup\overline{D}=?.$ 3.15 $\left(A\setminus\overline{A}\cap D\cup\overline{C}\right)\setminus B\cup D=?.$

3.16 $\left(A\cap\overline{B}\setminus\overline{A}\cap D\cup C\right)\setminus D=?.$ 3.17 $\left(\overline{A}\cap B\setminus B\cup D\cup\overline{C}\right)\setminus C=?.$

3.18 $\left(A\cup\overline{B}\setminus B\cup\overline{A}\cap D\right)\setminus B=?.$ 3.19 $\left(A\cap\overline{B}\setminus\overline{B}\cup A\cap D\right)\setminus C=?.$

3.20 $\left(B\setminus B\cup D\cup\overline{C}\right)\setminus C\cap\overline{D}=?.$ 3.21. $\left(D\setminus B\cap D\cup\overline{C}\right)\setminus B\cap\overline{D}=?.$

3.22 $\left(A\setminus B\cup\overline{A}\cup C\right)\setminus A\cup\overline{D}=?.$ 3.23 $\left(\overline{B}\setminus B\cup\overline{A}\cap C\right)\setminus B\cup D=?.$

3.24 $\left(C\setminus\overline{A}\cap D\cup\overline{C}\right)\setminus A\cap D=?.$ 3.25 $\left(B\setminus B\cup A\cap C\right)\setminus\overline{C}\cap\overline{D}=?.$

3.26 $\left(D\setminus B\cup\overline{A}\cap D\right)\setminus\overline{B}\cup C=?.$ 3.27 $\left(A\setminus B\cup\overline{A}\cap\overline{C}\right)\setminus B\cup C=?.$

3.28 $\left(A\cap\overline{B}\setminus\overline{A}\cap D\cup\overline{C}\right)\setminus B=?.$ 3.29 $\left(A\cup\overline{B}\setminus B\cup\overline{A}\cap D\right)\setminus\overline{D}=?.$

3.30 $\left(C\cap\overline{B}\setminus B\cap D\cup\overline{C}\right)\setminus C=?.$ 3.31. $\left(\overline{A}\cap\overline{B}\setminus A\cap D\cup C\right)\setminus D=?.$

Определение: Множество $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ – симметрическая разность

Замечание: Действия $A\setminus B$ и $A\cup B$ с множествами A и B независимые. Пересечение множеств, $A\cap B=A\cup B\setminus\left(A\Delta B\right)=A\setminus\left(A\setminus B\right)=B\setminus\left(B\setminus A\right)=U\setminus\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)$, и дополнение, $\overline{A}=U\setminus A$ или $\overline{B}=U\setminus B$, определяются через них. Универсальное множество U содержит все элементы решаемого типа задач. Его дополнение равно пустому множеству, $\overline{U}=U\setminus U=\varnothing$. В множестве $\varnothing$ нет ни одного элемента.

Законы алгебры множеств:

1*. Законы идемпотентности:

1.1. $A\cup A=A;$ 1.2. $A\cap A=A;$

2*. Коммутативные законы:

2.1. $A\cup B=B\cup A;$ 2.2. $A\cap B=B\cap A.$

3*. Ассоциативные законы:

3.1. $A\cup\left(B\cup C\right)=\left(A\cup B\right)\cup C;$ 3.2. $A\cap\left(B\cap C\right)=\left(A\cap B\right)\cap C.$

4*. Дистрибутивные законы:

4.1. $A\cap\left(B\cup C\right)=\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap C\right);$

4.2. $A\cup\left(B\cap C\right)=\left(A\cup B\right)\cap\left(A\cup C\right);$

5*. Закон поглощения или восстановления:

5.1. $A\cap\left(A\cup B\right)=A;$ 5.2. $A\cup\left(A\cap B\right)=A.$

6*. Свойства пустого и универсального множеств:

6.1. $A\cup\varnothing=A;$ 6.2. $A\cap\varnothing=\varnothing;$

6.3. $A\cup U=U;$ 6.4. $A\cap U=A;$

7*. Закон противоречия:

$$A\cap\overline{A}=\varnothing.$$

8*. закон исключения третьего или свойство дополнения:

$$A\cup\overline{A}=U.$$

9*. Закон инволютивности или закон “двойного отрицания”:

$$\overline{\overline{A}}=A.$$

10*. Законы де Моргана:

10.1. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};$ 10.2. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$

11. Тождества с разностями:

11.1. $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$;   11.2. $A\setminus B=A\cap\overline{B}$;

11.3. $A\setminus(A\setminus B)=B\setminus(B\setminus A)=A\cap B$;   11.4. $A\setminus A=A\cap\overline{A}=\varnothing$;

11.5. $A\Delta B\doteq(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\cup B\setminus A\cap B$ – симметрическая разность.

11.6. $A\Delta B\doteq A\cup B\setminus A\cap B$;   11.7. $A\cap B=A\cup B\setminus A\Delta B$;

11.8. $A\cap(B\setminus C)=A\cap B\setminus B\cap C=A\cap B\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$;

11.9. $A\cap B\setminus C=B\cap A\setminus C=A\cap B\setminus A\cap C=B\cap(A\setminus C)$, учтёно 11.8;

11.10 $A\cup B\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

12. Примеры эквивалентности:

12.1. $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases}A\setminus B=A\ ;\\ B\setminus A=B\ .\end{cases}$ 12.2. $B\subset A\Leftrightarrow\begin{cases}A\cup B=A;\\ A\cap B=B;\\ B\setminus A=\varnothing.\end{cases}$

Замечание к тождествам 11*: Нельзя определить разность множеств через их объединение и пересечение* (*с сохранением объёма понятия “разность”*(!)).

Законы алгебры множеств часто напоминают известные законы алгебры чисел. Например, законы 6* – 8* *для пустого и универсального множеств напоминают действия с нулем и единицей в алгебре чисел. Но вследствие законов идемпотентности,* 1.1 *и* 1.2, *и законов поглощения или восстановления,* 5.1 *и* 5.2, *степени множеств и численные коэффициенты при множествах не нужны.*

Задача 4. Применив графический метод кругов Эйлера, докажите указанный в Вашем варианте закон алгебры множеств.

Варианты:				4.1.	закон 1.1;
4.2	закон 1.2;	4.3	закон 2.1;	4.4	закон 2.2;
4.5	закон 3.1;	4.6	закон 3.2;	4.7	закон 4.1;
4.8	закон 4.2;	4.9	закон 12.1;	4.10	закон 12.2;
4.11	закон 5.1;	4.12	закон 5.2;	4.13	закон 6.1;
4.14	закон 7.1;	4.15	закон 8.;	4.16	закон 9.1;
4.17	закон 9.2;	4.18	закон 10.1;	4.19	закон 10.2;
4.20	закон 11.1;	4.21.	закон 11.2;	4.22	закон 11.3;
4.23	закон 6.2;	4.24	закон 6.3;	4.25	закон 7.2;
4.26	закон 7.3;	4.27	закон 10.3;	4.28	закон 10.4;
4.29	закон 12.1;	4.30	закон 12.2;	4.31.	закон 10.5 .

Законы алгебры множеств позволяют ряд действий с множествами заменять эквивалентным выражением. При этом исходное выражение упрощается.

Задача 5. Применяя законы алгебры множеств, упростите Ваше выражение.

Варианты:

5.1 $\overline{(\overline{A}\cup B\cup C)}\cap(A\cap(B\cup C))\cap\overline{B}=?$

5.2 $\overline{\overline{A}\cup C}\cup(B\cup B\cap C)\cap(\overline{B}\cap\overline{B\cup C})=?$

5.3 $(A\cap\overline{B}\cup C)\cap(A\cup B)\cap\overline{C}=?$

5.4 $A\cap(((B\cap\overline{C}\cup\overline{C\cup B})\cap\overline{C})\cup\overline{A})=?$

5.5 $A\cap(B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C\cup\overline{B})=?$

5.6 $(\overline{A}\cap B\cap C)\cap(A\cap(B\cup C))\cap\overline{B}=?$

5.7 $\overline{A}\cap C\cup(B\cup B\cap C)\cap(\overline{B}\cap\overline{B\cup C})=?$

5.8 $(\overline{A}\cup B\cap\overline{C})\cap(A\cup B)\cap\overline{C}=?$

5.9 $\overline{A}\cup\left(\left(\left(B\cap\overline{C}\cup\overline{C\cup B}\right)\cap\overline{C}\right)\cup\overline{A}\right)=?$

5.10 $\left(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cup\overline{B}\right)=?$

5.11 $\overline{\left(\overline{A}\cup B\cup C\right)}\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B\cup C}\right)\cap\overline{B}=?$

5.12 $\overline{\overline{A}\cup C}\cup\left(\overline{B}\cap\overline{B\cap C}\right)\cap\left(\overline{B}\cap\overline{B\cup C}\right)=?$

5.13 $\left(\left(A\cup\overline{B}\right)\cup C\right)\cap\left(\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cap\overline{C}\right)=?$

5.14 $A\cap B\cap C\cup\left(A\cup\overline{B}\right)\cap\left(C\cup\overline{B}\right)=?$

5.15 $A\cap\left(\left(\left(\left(\overline{B}\cup C\right)\cap(C\cup B)\right)\cap\overline{C}\right)\cup\overline{A}\right)=?$

5.16 $\overline{\left(\overline{A}\cup B\cup C\right)}\cap\left(\overline{A}\cup\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right)\right)\cap\overline{B}=?$

5.17 $\overline{\left(\overline{A}\cup B\cup C\right)}\cap\left(A\cap(B\cup C)\right)\cap B=?$

5.18 $\overline{\overline{A}\cup C}\cup(B\cup B\cap C)\cap\left(B\cup\overline{B}\cap\overline{C}\right)=?$

5.19 $\left(A\cap\overline{B}\cup C\right)\cap(A\cup B)\cap C=?$

5.20 $A\cap\left(\left(\left(B\cap\overline{C}\cup\overline{C\cup B}\right)\cap\overline{C}\right)\cup A\right)=?$

5.21 $A\cap(B\cap C)\cup\left(\overline{A}\cap B\cap C\cup B\right)=?$

5.22 $\left(\overline{A}\cap B\cap C\right)\cap\left(A\cap(B\cup C)\right)\cap B=?$

5.23 $\overline{A}\cap C\cup(B\cup B\cap C)\cap\left(B\cup\overline{B\cap C}\right)=?$

5.24 $\left(\overline{A}\cup B\cap\overline{C}\right)\cap(A\cup B)\cap C=?$

5.25 $\overline{A}\cup\left(\left(\left(B\cap\overline{C}\cup\overline{C\cup B}\right)\cap\overline{C}\right)\cap A\right)=?$

5.26 $\left(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\cap C\cup B\right)=?$

5.27 $\overline{\left(\overline{A}\cup\overline{B}\cup C\right)}\cap\left(\overline{A}\cup\overline{\overline{B}\cup C}\right)\cap B=?$

5.28 $\overline{\overline{A}\cup C}\cup\left(\overline{B}\cap\overline{B\cap C}\right)\cap\left(B\cap(B\cup C)\right)=?$

5.29 $\left(\left(A\cup\overline{B}\right)\cup\overline{C}\right)\cap\left(\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cap C\right)=?$

5.30 $\overline{A}\cap\left(\left(\left(\left(\overline{B}\cup C\right)\cap(C\cup B)\right)\cap\overline{C}\right)\cup A\right)=?$

5.31 $A\cap\overline{B}\cap C\cup(A\cup B)\cap(C\cup B)=?$