

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКАХ О ПРИРОДЕ И ОБЩЕСТВЕ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
Основан в октябре 2011 года

№1(8) - 2(9)'2015

Донецк





Спят курганы тёмные,
Солнцем опалённые,
И туманы белые
Ходят чередой.
Через рощи шумные
И поля зелёные
Вышел в степь донецкую
Парень молодой.

Взорвано, уложено, сколото черное надежное золото

Донецкий национальный технический университет родился девяносто пять лет назад в непростое время завершения гражданской войны и начала возрождения Донбасса. Это был период повсеместной разрухи всего народного хозяйства страны. Вся последующая история ДонНТУ была неразрывно связана с индустриализацией Донецкого края и подготовкой кадров для промышленности и экономики. Так было в годы первых пятилеток, когда в феврале 1941 года Донецкий индустриальный институт за свои достижения в деле подготовки высококвалифицированных кадров получил орден Трудового Красного Знамени. Так было и в период восстановления Донбасса после Великой Отечественной войны, так будет и сейчас при возрождении Донбасса после нынешних событий. ДонНТУ был, есть и будет одним из лидеров высшего профессионального образования в Восточной Европе. Об этом свидетельствуют все 95 лет его истории, а также тот факт, что в нынешнее непростое время университет сохранил свой потенциал и уверенно смотрит в будущее.

*А.Я. Аноприенко
И.о. ректора ДонНТУ*

УДК 001.5:004.9

Системный анализ и информационные технологии в науках о природе и обществе (САИТ-2015). № 1(8)–2(9)'2015. – Донецк: ДонНТУ, 2015. – 165 с.

Публикуется по решению Ученого совета Государственного высшего учебного заведения «Донецкий национальный технический университет» (протокол № 7 от 23.10.2015).

Настоящий сборник научных трудов посвящен междисциплинарным исследованиям в науках о природе и обществе. Публикации охватывают широкий спектр проблем – от фундаментальных вопросов системного анализа до прикладных разработок в области информационных технологий.

Материалы сборника предназначены для научных сотрудников, преподавателей, инженерно-технических работников, аспирантов и студентов, научные интересы которых связаны с системным анализом и моделированием, междисциплинарными исследованиями и информационными технологиями в науках о природе и обществе.

Выпуск сборника научных трудов осуществлен факультетом компьютерных наук и технологий Донецкого национального технического университета.

System analysis and information technology in environmental and social sciences (SAIT-2015). no.1(8)–2(9)'2015. Donetsk, DonNTU, 2015: 165 p. (in Russian)

This journal issue is devoted to interdisciplinary research in environmental and social sciences. Publications cover the broad scope of problems – from fundamental questions of system analysis to applied developments in information technology.

The journal is for researchers, teachers, engineers, students whose research interests are related to the system analysis and modeling, interdisciplinary research and information technology in environmental and social sciences.

The issue of the journal was carried out by the computer science and technology department of Donetsk National Technical University.

Учредитель и издатель – ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет».

Сборник научных трудов основан в октябре 2011 года, выходит 2 раза в год.

Редакционная коллегия: Аноприенко А.Я., канд. техн. наук, проф. (главный редактор); Аверин Г.В., д-р техн. наук, проф. (заместитель главного редактора); Звягинцева А.В., канд. техн. наук, доц. (отв. секретарь сборника); Андрюхин А.И., канд. техн. наук, доц.; Беловодский В.Н., канд. техн. наук, доц.; Белоусов В.В., д-р техн. наук, проф.; Глушак А.В., д-р физ.-мат. наук, проф. (РФ, НИУ «БелГУ»); Голубева О.В., канд. физ.-мат. наук, доц. (Республика Беларусь, ПГУ); Григорьев А.В., канд. техн. наук, доц.; Губенко Н.Е., канд. техн. наук, доц.; Ехилевский С.Г., д-р техн. наук, проф. (Республика Беларусь, ПГУ); Жиликов Е.Г., д-р техн. наук, проф. (РФ, НИУ «БелГУ»); Карабчевский В.В., канд. техн. наук, доц.; Константинов И.С., д-р техн. наук, проф. (РФ, НИУ «БелГУ»); Недопекин Ф.В., д-р техн. наук, проф.; Павлий В.А., канд. техн. наук; Скобцов Ю.А., д-р техн. наук, проф.; Толстых В.К., д-р техн. наук, проф.; Фельдман Л.П., д-р техн. наук, проф.

Сборник научных трудов зарегистрирован в Министерстве юстиции Украины. Свидетельство о государственной регистрации печатного средства массовой информации. Серия КВ № 17409-6179 Р от 05.01.2011 г. Сборник зарегистрирован в Министерстве информации ДНР. Свидетельство о регистрации средства массовой информации №310 от 06.08.2015.

© Авторы статей
© ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет»

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И
ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В
НАУКАХ О ПРИРОДЕ И ОБЩЕСТВЕ**

Сборник научных трудов

Основан в октябре 2011 года

Выходит 2 раза в год

№1(8)–2(9)'2015

**Выпуск сборника посвящен 95-летию
Донецкого национального технического университета**

ДОНЕЦК

СО Д Е Р Ж А Н И Е

К юбилею Донецкого национального технического университета

Аноприенко А.Я., Струнилин В.Н., Звягинцева А.В., Хоруженко А.С.
ДонНТУ: 55 лет научной и образовательной деятельности в области информатики
и вычислительной техники..... 8

Фундаментальные проблемы системного анализа и теории систем

Аверин Г.В.
О принципе существования и законе возрастания энтропии в свете
общесистемных представлений системодинамики 15

Аноприенко А.Я.
Системодинамика техносферы: как измерить технический прогресс..... 45

Прикладной системный анализ и моделирование

Достлев Ю.С., Чередникова О.Ю.
Событийная модель технологического объекта в системах реального времени..... 68

Звягинцева А.В., Аверин Г.В.
Применение естественнонаучных методов при разработке феноменологических
моделей в общественно-гуманитарных науках..... 73

Андрюхин А.И., Судаков С.Н.
Компьютерные эксперименты с задачей взаимодействия двух жидких
гравитирующих тел..... 81

Пометун Е.Д., Лебедев В.Н.
Исследование функций аппроксимации градуировочной характеристики
термоанемометра в неизотермическом газовом потоке..... 88

Информационные технологии и программное обеспечение

Ехилевский С.Г., Голубева О.В., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.
Математическая обработка двумерных изображений и подавление шума
геометрическими фильтрами типа медианной фильтрации..... 93

<i>Бельков Д.В., Едемская Е.Н.</i> Система формирования трафика компьютерной сети на основе самоорганизованной критичности	99
<i>Польщиков К.А.</i> Алгоритм нейро-нечеткого выбора тайм-аута повторной передачи в самоорганизующейся сети.....	106
<i>Руденко М.П.</i> Способы виртуальной реконструкции памятников архитектуры.....	110
Актуальные вопросы современной математики	
<i>Куртова Л.Н.</i> Об одном обобщении бинарной аддитивной задачи с квадратичными формами.....	119
<i>Полунин В.А., Солдатов А.П.</i> Редукция задачи Римана-Гильберта для системы Моисила-Теодореску.....	124
<i>Тарасова О.А., Чернова О.В.</i> О разрешимости системы Ламе теории упругости в изотропной среде	129
<i>Флоринский В.В.</i> О численном решении линейной задачи быстрогодействия с двумерным управлением.....	136
<i>Шевцова М.В.</i> О числе простых чисел в арифметической прогрессии с разностью специального вида.....	142
Сведения об авторах на русском языке.....	147
Сведения об авторах на украинском языке.....	153
Сведения об авторах на английском языке.....	159

Системний аналіз та інформаційні технології

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

ЗАСНОВАНО У ЖОВТНІ 2011 РОКУ

№1(8)-2(9)'2015

З М І С Т

До ювілею Донецького національного технічного університету

Анопрієнко О.Я., Струнілін В.М., Звягінцева Г.В., Хоруженко А.С.
ДонНТУ: 55 років наукової та освітньої діяльності в галузі інформатики та
обчислювальної техніки..... 8

Фундаментальні проблеми системного аналізу та теорії систем

Аверін Г.В.
Про принцип існування та закон зростання ентропії в світлі загальносистемних
уявлень системодинаміки..... 15

Анопрієнко О.Я.
Системодинаміка техносфери: як виміряти технічний прогрес..... 45

Прикладний системний аналіз та моделювання

Достлев Ю.С., Череднікова О.Ю.
Подієва модель технологічного об'єкта у системах реального часу..... 68

Звягінцева Г.В., Аверін Г.В.
Застосування природничо-наукових методів при розробці феноменологічних
моделей в суспільно-гуманітарних науках..... 73

Андрюхін О.І., Судаков С.Н.
Комп'ютерні експерименти з задачею взаємодії двох гравітуючих рідких тіл..... 81

Пометун К.Д., Лебєдев В.М.
Дослідження функцій апроксимації градууювальної характеристики
термоанемометра в неізотермічному газовому потоці..... 88

Інформаційні технології та програмне забезпечення

Єхилевський С.Г., Голубєва О.В., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.
Математична обробка двовимірних зображень та пригнічення шуму
геометричними фільтрами типу медіанної фільтрації..... 93

<i>Бельков Д.В., Єдемська Є.М.</i> Система формування трафіку комп'ютерної мережі на основі самоорганізованої критичності.....	99
<i>Польщіков К.О.</i> Алгоритм нейро-нечіткого вибору тайм-аута повторної передачі в мережі, яка самоорганізується.....	106
<i>Руденко М.П.</i> Способи віртуальної реконструкції пам'ятників архітектури.....	110
Актуальні питання сучасної математики	
<i>Куртова Л.М.</i> Про одне узагальнення бінарної адитивної задачі з квадратичними формами.....	119
<i>Полунін В.А., Солдатов А.П.</i> Редукція задачі Рімана-Гільберта для системи Моїсіла-Теодореску.....	124
<i>Тарасова О.А., Чернова О.В.</i> Про можливості розв'язання системи Ламі теорії пружності в ізотропному середовищі.....	129
<i>Флоринський В.В.</i> Про чисельне рішення лінійної задачі швидкодії з двовимірним управлінням.....	136
<i>Шевцова М.В.</i> Про число простих чисел в арифметичній прогресії з різницею спеціального вигляду.....	142
Відомості про авторів російською мовою	147
Відомості про авторів українською мовою.....	153
Відомості про авторів англійською мовою.....	159

CONTENTS

To the jubilee of Donetsk national technical University

- Anopriyenko A.Y., Strunlyyn V.N., Zviagintseva A.V., Khoruzhenko A.S.*
DonNTU: 55 years of scientific and educational activities in the field Informatics and computer engineering..... 8

Fundamental problems of systems analysis and systems theory

- Averin G.V.*
On the principle of existence and the law of increase of entropy in the context of general-system representations of a systemdynamics..... 15

- Anopriyenko A.Y.*
Systemdynamics of tehnosphere: how to measure the technical progress..... 45

Applied systems analysis and modeling

- Dostlev Y.S., Cherednikova O.Y.*
Event model of technological object in real-time systems..... 68

- Zviagintseva A.V., Averin G.V.*
The use of natural science methods for phenomenological models development in the social and human sciences..... 73

- Andruckin A.I., Sudakov C.N.*
Computer experiments with the problem of interaction of two gravitating liquid bodies.. 81

- Pometun E.D., Lebedev V.N.*
Investigation of the approximation functions of calibration characteristics thermoanemometer in non-isothermal gas flow..... 88

Information technologies and software

- Ehilevskiy S.G., Golubeva O.V., Pastuhov D.F., Pastuhov Y.F.*
Mathematical processing the two-dimensional scenes and suppression of the noise geometric filter type median filtering..... 93

<i>Belkov D.V., Edemskay E.N.</i> The traffic from a computer network formed system based self-organized criticality.....	99
<i>Polshchykov K.A.</i> Neuro-fuzzy algorithm selection timeout retransmission in ad hoc network.....	106
<i>Rudenko M.P.</i> Techniques of the architectural monuments virtual reconstruction.....	110
Actual issues of modern mathematics	
<i>Kurtova L.N.</i> About one generality of the binary additive problem with quadratic forms.....	119
<i>Polunin V.A., Soldatov A.P.</i> Riemann-Hilbert problem for Moisil- Teodorescu system.....	124
<i>Tarasova O.A, Chernova O.V.</i> On the solvability of the system of Lamé elasticity in isotropic medium.....	129
<i>Florinsky V.V.</i> On the numerical solution of linear time-optimal problem with two-dimensional control.	136
<i>Shevtsova M.V.</i> On the number of primes in arithmetic progression with difference of a special type.....	142
Information about the Authors in Russian.....	147
Information about the Authors in Ukrainian.....	153
Information about the Authors in English.....	159

К юбилею Донецкого национального технического университетаVIVAT, CRESORAT, GLORAT
Пусть живёт, растёт и славится**ДонНТУ: 55 лет научной и образовательной деятельности в области информатики и вычислительной техники**

Аноприенко А.Я., Струнилин В.Н., Звягинцева А.В., Хоруженко А.С.

Донецкий национальный технический университет (ДонНТУ) отмечает 95-летие своей образовательной и научной деятельности. Осталось всего пять лет до того знаменательного дня, когда университет подойдет к своему столетнему юбилею.



Квартал ДПИ. г. Сталино. Фото с самолета, ориентировочно 1950-е годы. 1 – памятник Сталину на месте Торгового центра «Планета»; 2 – 1-й учебный корпус; 3 – 2-й учебный корпус, бывшее Коммерческое училище; 4 – спортивный зал; 5 – строительство 4-го учебного корпуса; 6 – 5-й учебный корпус по ул. Кобозева; 7 – лаборатории металлургического факультета, бывшая Казачья казарма

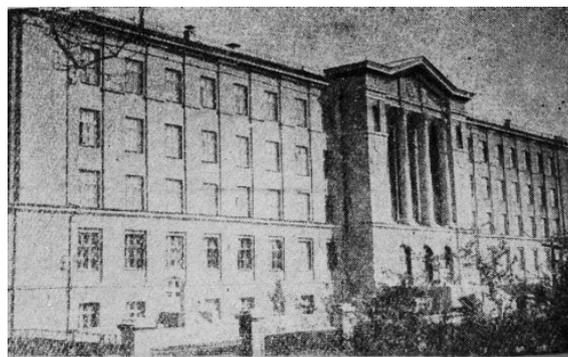
С момента своего основания в 1921 году ДонНТУ подготовил десятки тысяч инженерно-технических специалистов для металлургической, электротехнической, горной, химической и других отраслей промышленности. Более полувека университет готовит высококвалифицированные кадры в области компьютерных наук и информационных технологий.



Факультет компьютерных наук и технологий (КНТ) является одним из крупнейших факультетов ДонНТУ. Подготовка специалистов в области разработки и эксплуатации аппаратного и программного обеспечения компьютерных систем ведется с

1965 года. За это время выпущено более 13 тысяч магистров, специалистов и бакалавров, работающих на территории Донбасса и за рубежом (в более чем 70 странах).

Сформировался факультет КНТ в начале 60-х годов из специалистов электротехнического факультета (ЭТФ). По инициативе декана ЭТФ М.Б. Шумяцкого и при его активном участии с 1959 года начали создавать материальную базу и формировать кадровый состав будущего факультета вычислительной техники. В 1960 году заведующий-основатель кафедры «Автомати-



Четвертый учебный корпус ДПИ, 1957 год. Сейчас 5-й корпус ДонНТУ

ка и телемеханика» (АТ) доц. С.Г. Буачидзе прочитал студентам первой группы ЭТФ ЭПП-1-10 курс «Основы вычислительной техники» (ОВТ) с демонстрацией аналоговой вычислительной машины МН-7 выпуска 1957 года, которая была передана в ДПИ по разнарядке Министерства высшего образования СССР. В начале марта 1961 года выпускник ЭПП-1, ассистент кафедры АТ В.А. Святный, подготовил на материально-технической базе вычислительной машины МН-7 лабораторные работы к курсу ОВТ. Символическим является тот факт, что первая в истории ДПИ лабораторная работа студентов на МН-7 состоялась в день и час полета в космос Юрия Гагарина – 12 апреля 1961 года. Этот день рассматривается в качестве начала научной и образовательной деятельности ДонНТУ с применением вычислительной техники. Летом и осенью 1961 года В.А. Святным под руководством проф. В.Г. Гейера была выполнена первая научная работа «Моделирование динамики измерительной системы плотности угольной пульпы с использованием аналоговой вычислительной машины МН-7», результаты которой нашли положительную оценку участников научной конференции в феврале 1962 года и были опубликованы в нескольких профессиональных журналах.



В компьютере МН-7 присутствуют все базовые компоненты типового аналогового вычислителя

Важной вехой в истории факультета стал 1961 – 1962 учебный год, когда для студентов всех специальностей университета был введен курс «Математические машины и программирование». Лекции читали С.Г. Буачидзе и В.А. Святный. Для постановки практикума по программированию было решено направить выпускника группы ЭПП-2, ассистента кафедры «Автоматика и телемеханика» В.И. Назаренко на стажировку в Московский экономико-статистический институт, где он успешно прошел обучение программированию на ЭВМ М-20 и Урал-2, а потом начал в ДПИ преподавать соответствующие дисциплины. Приобретение в 1962 году по инициативе М.Б. Шумяцкого и при поддержке ректора М.А. Богомолова вычислительной машины «Минск-12» положило начало вычислительному центру ДПИ. В этом же году доцент Л.Ю. Дударев и ассистент В.А. Святный выполнили первую научно-исследовательскую работу в области автоматизации вентиляции шахт с использованием управляющих ЭВМ. Уже в 1963 году на кафедре «Автоматика и телемеханика» была сформирована группа преподавателей во главе с доцентом Л.П. Фельдманом, которая активно внедряла в учебный процесс и научные



Занятия в отделе подготовки данных вычислительного центра (ВЦ), 1971 год



Фельдман Л.П., профессор, первый заведующий кафедрой вычислительной техники

исследования вычислительную технику. На основе нового аппаратного и программного обеспечения вычислительной техники в 1964 году по инициативе Л.П. Фельдмана и при поддержке деканата ЭТФ и ректората ДПИ была создана первая кафедра, ставшая основой будущего факультета, кафедра вычислительной техники (ВТ), в дальнейшем



ЭЦВМ «М-222М» для проведения научных исследований и обеспечения учебного процесса, 1972 год. На фото директор ВЦ Гончаров В.Г. за работой, 1989 – 1998 гг.



Знакомство с работой факультета вычислительной техники и автоматизированных систем управления руководителей Донецкой области, 1970 г.



Скобцов Ю.А., д.т.н., проф.,
заведующий кафедры АСУ с
2003 года

факультета и развитие материально-технической базы обусловили организацию в 1977 году на базе факультета вычислительной техники и автоматизированных систем управления двух отдельных структурных подразделений университета:

- факультета вычислительной техники (ВТ);
- факультета автоматизированных систем управления (АСУ).

Первым деканом факультета ВТ стал доц. В.И. Калашников, а затем на этой должности работали проф. В.А. Святный (1981 – 1995), проф. В.В. Лапко (1995 – 2007), проф. А.Я. Аноприенко (2007 – 2014), с октября 2014 года – В.Н. Струнилин.

автоматизированных систем управления (ВТиАСУ). Первым деканом нового факультета стал доцент В.А. Святный.

В 1975 году на факультете ВТиАСУ была проведена дальнейшая реорганизация кафедры ВТ. Для подготовки инженеров-системотехников была создана специальная кафедра электронных вычислительных машин (ЭВМ), а для обучения студентов-технологов основам информационных технологий – кафедра вычислительной техники в инженерно-экономических расчетах (ВТвИЭР).

Бурное развитие вычислительной техники и информационных технологий, увеличение контингента студентов, активная научная, учебно-методическая и организационная работа кафедр



Отдел подготовки данных для ЭВМ



Работа в компьютерном классе, 1975 год



Калашников В.И., к.т.н.,
проф., 1-ый декан ФВТ
(1977 – 1981)

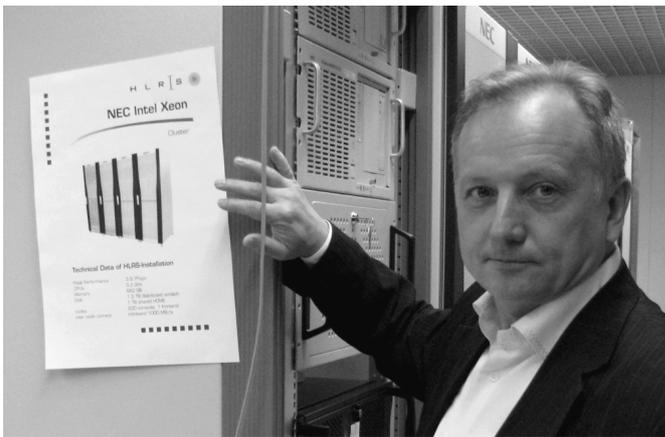


Лапко В.В., к.т.н.,
проф., декан ФВТИ
(1995 – 2007)



Струнилин В.Н. декан
ФКНТ с 2014 г.

кафедра электронных вычислительных машин (ЭВМ), а с 2009 года – кафедра компьютерной инженерии (КИ). Кафедру ВТ возглавил доц. Л.П. Фельдман. В 1965 году на кафедре была открыта новая специальность «Математические счетно-вычислительные приборы и устройства», а в 1971 г. – специальность «Прикладная математика». В 1972 году на базе кафедр ВТ, АСУ («Автоматизированные системы управления», создана в 1971 году Б.А. Кузнецовым) и АТ электротехнического факультета был сформирован факультет вычислительной техники и



Аноприенко А.Я., декан ФКНТ (2007–2014), и.о. ректора ДонНТУ с 2014 г., рядом с суперкомпьютером NEC Intel Xeon (Германия)



Выполнение научно-исследовательских работ, 1980 год



Преподаватели кафедры КИ за работой на суперкомпьютерном кластере NEC SX9. В рамках сотрудничества в 1998 году Штутгартский университет передал факультету 12-узловую параллельную систему Intel Paragon, а в 2010 году суперкомпьютерный кластер NEC SX9



Аверин Г.В., д.т.н., проф., заведующий кафедрой КСМ с 2003 года

Для удовлетворения потребностей народного хозяйства в 1989 году на факультете ВТ организована подготовка IT-инженеров по специальности «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем».

Новые направления в работе требовали соответствующего изменения названия факультета. В связи с этим в 1992 году факультет ВТ был переименован в факультет вычислительной техники и информатики (ВТИ).

В 1993 году кафедра ВТВИЭР после широкого распространения персональных компьютеров и существенного изменения содержания обучения была переименована в кафедру вычислительной математики и программирования (ВМП). В 1994 году на факультете открыта также специальность «Информационные системы в менеджменте» (с 1998 года – «Экономическая кибернетика»), а с 1999 года был объявлен прием студентов на новую специальность – «Системное программирование».

Бурное развитие ПЭВМ привело к постепенной замене больших вычислительных машин на персональную технику и технологическим изменениям в работе вычислительного центра ДонНТУ. С конца 90-х годов на факультете стали внедряться суперкомпьютеры нового поколения.

В 2003 году на факультете ВТИ создана кафедра компьютерных систем мониторинга (КСМ). Необходимость новой кафедры была обусловлена созданием в университете нового научного направления, связанного с прикладным системным

анализом и разработкой информационно-аналитических систем в области экологии, охраны окружающей среды и изучения социально-экономических процессов и систем. Заведующим кафедрой был избран проф. Аверин Г.В.

В 2009 году факультет ВТИ реорганизован в факультет компьютерных наук и технологий (КНТ) с присоединением кафедры автоматизированных систем управления. В 2012 году в состав факультета влились кафедры бывшего Института информатики и искусственного интеллекта (ИИИ): кафедра программного обеспечения интеллектуальных систем, кафедра систем искусственного интеллекта и кафедра системного анализа и моделирования.

Очередная реорганизация факультета КНТ стала следствием военных событий на Донбассе в 2014 году, в результате которых факультет понес ощутимые потери как в преподавательском составе, так и в составе студентов.

Реорганизация факультета привела к объединению ряда кафедр бывшего Института информатики и искусственного интеллекта в одну укрупненную кафедру искусственного интеллекта и системного анализа (ИИСА) во главе с проф. Миненко А.С. Из состава факультета была выведена кафедра философии. Кафедра вычислительной математики и программирования, ставшая выпускающей и осуществившая в 2015 году первый набор студентов, преобразована в кафедру прикладной математики (ПМ).



Миненко А.С., д. ф.-м. н., проф.,
заведующий кафедрой ИИСА



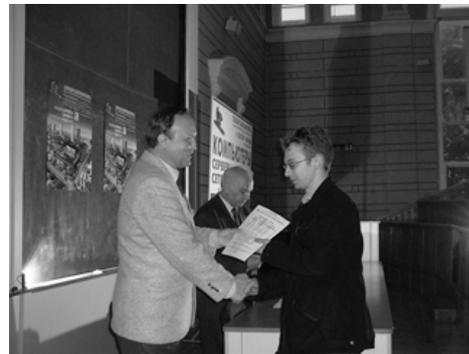
Павлыш В.Н., д.т.н., проф.,
заведующий кафедрой ПМ

Сегодня на ФКНТ работает более 150 преподавателей, из них 4 доктора наук, около 100 кандидатов наук. Данный состав преподавателей ведет обучение более 700 студентов, из них свыше 50 студентов проходят обучение по программам магистратуры. Образовательную деятельность факультет КНТ осуществляет в области подготовки бакалавров и магистров по направлениям:

- 09.03.01 и 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника»;
- 09.03.02 и 09.04.02 «Информационные системы и технологии»;
- 02.03.01 и 02.04.01 «Математика и компьютерные науки»;
- 27.03.03 и 27.04.03 «Системный анализ и управление»;
- 09.03.03 и 09.04.03 «Прикладная информатика»;
- 01.03.04 «Прикладная математика».

Факультет активно развивается и гордится достижениями в области науки. Кафедры факультета ведут работы по следующим научным направлениям:

- теория, аппаратное и программное обеспечение компьютерных систем (кафедра КИ);
- теория, алгоритмическое и программное обеспечение вычислительных систем и информационных технологий (кафедра ПИ);
- прикладной системный анализ, мониторинг и информационные технологии в науках о природе и обществе, а также интеллектуальный анализ данных (кафедра КСМ);



Студенты ФКНТ участвуют в конференциях и олимпиадах и завоевывают призовые места



Лабораторные занятия на факультете компьютерных наук
и технологий, 2011 год

- эволюционные методы анализа и прогнозирования процессов, методы обработки и распознавания изображений на основе нечетких нейронных сетей и генетических алгоритмов, а также создание интеллектуальных систем поддержки принятия решений (кафедра АСУ);

- математическое моделирование физических и технологических процессов в динамических системах (кафедра ПМ);

- методы и средства искусственного интеллекта (кафедра ИИСА).

За последние пять лет сотрудниками факультета защищено 2 докторских и 10 кандидатских диссертаций, опубликовано около 40 монографий, учебников и учебных пособий. Углублению и расширению исследований способствует активное научное сотрудничество факультета с зарубежными партнерами. Высокий уровень научных исследований и их внедрение в промышленности являются основой конкурентоспособности факультета в науке и успешной подготовки специалистов высокой квалификации.

Факультет компьютерных наук и технологий ДонНТУ является крупнейшим в Донбассе центром подготовки высококвалифицированных IT-профессионалов и уверенно смотрит в будущее.



Графический суперкомпьютер, приобретенный в рамках выполнения кафедрой КСМ гранта фонда CRDF (США), 2011 г. Количество операций в 20 раз больше, чем звезд в нашей галактике

Раздел 1

Фундаментальные проблемы системного анализа и теории систем

УДК 303.732.4

О принципе существования и законе возрастания энтропии в свете общесистемных представлений системодинамики

Аверин Г.В.

averin.gennadiy@gmail.com

Аверин Г.В. «О принципе существования и законе возрастания энтропии в свете общесистемных представлений системодинамики». С использованием общесистемных представлений системодинамики сделана попытка анализа одного из основных положений современной науки – понятия энтропии. На примере аксиоматических методов изложения термодинамических основ, предложенных Н. Шиллером, Г. Фальком, К. Каратеодори, Т. Афанасьевой-Эренфест, а также использования классического метода Р. Клаузиуса, показаны логические подходы, позволившие обосновать принцип существования и закон возрастания энтропии. Сформулированы основные опытные факты, на основе которых можно провести аксиоматизацию термодинамики, и предложены несколько направлений в решении данной проблемы. Описанный в статье аксиоматический подход обоснования принципа существования энтропии отличается использованием непрерывного пространства состояний и применением понятия эмпирической меры, которая комплексно характеризует состояние системы. Выполнено логическое обоснование закона возрастания энтропии, исходя из связи данной величины со временем. Проанализированы некоторые направления исследований, которые могут позволить провести экспериментальное обоснование закона возрастания энтропии для некоторых систем на основе изучения динамических процессов различной природы.

Ключевые слова: системодинамика, принцип существования и закон возрастания энтропии, теоретические и опытные обоснования, феноменология и логика проблемы.

Введение

В современной науке существует одно фундаментальное понятие, которое на протяжении десятилетий вызывает множество споров, дискуссий и полемики. Этим понятием является энтропия, которая привнесена в научный мир из теории термодинамики. Сегодня нет общепризнанных суждений о сущности энтропии как общесистемной величины. Различные точки зрения исходят из того, что она является: некоторой субстанцией, связанной с ходом времени; свойством, характеризующим процессы; характеристикой математической модели процесса; информационным параметром процесса. Следствием всего этого является то, что различные авторы по-разному определяют смысл энтропии – мера необратимости процессов; мера сложности системного описания объекта; мера неопределенности информации; мера разнообразия; мера хаотичности; мера структурированности и т.д. Существуют известные представления о разных видах энтропии: термодинамической, статистической, информационной, математической, лингвистической и т.п. Именно эта неопределенность и множественность представлений и позволили А. Пуанкаре утверждать, что «понятие энтропии чудовищно абстрактно». Самое неприятное в данном

вопросе заключается в том, что по истечению более чем ста лет после высказывания А. Пуанкаре, проблема с неоднозначностью понятия энтропии и нераскрытой сущностью этой величины так и не была решена.

Покажем, что в свете общесистемных представлений системодинамики [1, 2] можно попытаться выявить сущность энтропии, сформулировать принципы ее существования для процессов различной природы, а также представить научные положения, которые могут обосновать закон возрастания энтропии. Сегодня развитие учения об энтропии является одной из самых актуальных проблем современной науки.

Системы изложения термодинамических основ

Так как понятие энтропии пришло в науку из термодинамики, то и начинать изучение этой проблемы следует с систем изложения термодинамики. В настоящее время считается, что имеется несколько методов изложения термодинамических основ. Например, К. Путилов говорит о пяти таких методах [3]. Если в этот перечень добавить подходы, предложенные А. Гухманом, А. Зоммерфельдом, М. Борном, Г. Фальком, а также другими авторами, то методы обоснования основ термодинамики превысят в

своем количестве, по крайней мере, целый десяток. Тем не менее, в качестве основных целостных систем изложения термодинамики можно выделить, наверное, только две. Данные системы коллективно развиты в логически стройную совокупность подходов, представлений и положений, которые общеприняты в научном сообществе. Назовем их условно традиционной и аксиоматической системами.

Методически традиционная система изложения термодинамики использована в большинстве вузовских курсов этой дисциплины. Изложение материала ведется в следующей последовательности.

В начале вводятся основные термодинамические понятия: состояние тела, параметры состояния, эмпирическая и абсолютная температура, системы и шкалы измерения величин, дается понятие о термодинамическом процессе и осуществляется классификация процессов, излагаются представления об идеальном газе и приводятся основные законы идеального газа, установленные опытным путем. На основе обобщения опытных фактов формулируется первый постулат термодинамики – о существовании состояния термодинамического равновесия, а также принцип существования температуры как особой функции состояния равновесной системы (второй постулат термодинамики). На базе указанных выше положений и закономерностей устанавливается связь между эмпирической и абсолютной температурами и обосновывается фундаментальность понятия абсолютной температуры. Приводятся определения количества теплоты и теплоемкости как эмпирических величин. После этого осуществляется обобщение основных соотношений и закономерностей на смеси идеальных газов и формулируются зависимости для термодинамических расчетов.

На следующем этапе переходят к обоснованию первого закона термодинамики как фундаментальной закономерности, установленной феноменологическим путем. Для этого описываются различия между теплотой и работой, как формами передачи энергии, и на основе опытов Джоуля дается представление об эквивалентности теплоты и работы. С использованием эмпирических данных формулируются соотношения между единицами работы и теплоты. Приводятся изложения первого закона термодинамики, которые даны разными авторами. Далее формулируется закон сохранения и превращения энергии в общем виде и вводится понятие внутренней энергии и внешней работы. В заключение данного этапа записывается уравнение первого закона

термодинамики в математической форме $dQ = du + dA$, где работа $dA = pdv$. Логическим путем данное уравнение обобщается на общий случай термодинамических систем со многими

параметрами: $dQ = du + pdv + \sum_{k=1}^n P_k dz_k$. Это

позволяет развить представления о термических и calorических уравнениях состояния, связывающих между собой термодинамические параметры. После этого рассматриваются уравнения сохранения энергии применительно к разным процессам (изобарный, изохорный, изотермический и т.д.) и различным физическим приложениям (сжатие-расширение газов, течение различных сред в каналах и т.д.).

Для обоснования второго закона термодинамики вводят определения теплового двигателя, рабочего тела, термодинамического цикла, горячего и холодного источника теплоты, термического коэффициента полезного действия (к.п.д.) и т.д. Далее уделяют значительное внимание важнейшим понятиям термодинамики, связанным с обратимыми и необратимыми процессами. Проведя предварительное обсуждение проблемы, дают общие формулировки второго закона термодинамики, которые предлагались различными авторами. После этого переходят к обоснованию понятия энтропии, для чего формулируется представление о термодинамическом цикле Карно, определяется термический к.п.д. этого цикла и доказывается теорема Карно: термический к.п.д. обратимого цикла, осуществляемого между двумя источниками теплоты, не зависит от свойств рабочего тела. На следующем шаге для обратимого цикла Карно устанавливают известное соотношение для приведенных теплот. Определяя энтропию как сумму приведенных теплот, показывают, что интеграл Клаузиуса для любого обратимого цикла равен нулю: $\oint dQ/T = 0$. Все это позволяет

представить изменение энтропии в обратимых и необратимых процессах соответственно в виде: $ds = dQ/T$ и $ds \geq dQ/T$. Сформулированные положения дают возможность объединить уравнения первого и второго законов термодинамики в одно фундаментальное соотношение вида:

$T \cdot ds \geq du + p \cdot dv + \sum_{k=1}^n P_k dz_k$. Представление

материала завершают формулировкой наиболее важных дифференциальных уравнений термодинамики, используя математический аппарат функций нескольких переменных: уравнений Максвелла, дифференциальных

уравнений для внутренней энергии, энтальпии, теплоемкостей и т.д. После изложения базовых положений и соотношений переходят к вопросам технической термодинамики: изучению термодинамических свойств веществ, анализу термодинамических процессов и исследованию эффективности циклов теплосиловых и холодильных установок и т.д.

Традиционная система изложения термодинамики тесно связана с феноменологическими закономерностями, полученными на основе опытных данных, и общими представлениями о работе тепловых машин. Считается, что такой подход обладает физической ясностью и позволяет образовать простоту термодинамических положений.

В свою очередь, аксиоматическая система изложения термодинамики до определенного момента представления материала тесно перекликается с традиционной системой. Здесь также на первом этапе определяется смысловое содержание основных понятий и определений: термодинамическая система, состояние и параметры состояния системы, термодинамические процессы и их виды, приводятся постулаты термодинамики для обоснования понятия температуры, формируются представления об эмпирической температуре и т.д. Далее обобщаются основные эмпирические характеристики и закономерности, полученные в опытах: уравнения состояния, законы Гей-Люссака, Шарля, Клапейрона-Менделеева, calorические характеристики (теплоемкости, теплоты испарения и кипения) и т.д. На следующем шаге вводят понятия теплоты, работы и энергии и полагают, что это согласуется с историей развития термодинамики [4]. После этого приводится уравнение закона сохранения и превращения энергии, как первого начала термодинамики. Обычно это уравнение представляется в виде $dQ = du + pdv$. С учетом полного дифференциала энергии $du = (\partial u / \partial v)dv + (\partial u / \partial \vartheta)d\vartheta$, где ϑ – эмпирическая температура, показывают, что элементарное приращение тепла представимо в виде: $dQ = C(\vartheta, v)d\vartheta + P(\vartheta, v)dv$. С данного места изложения термодинамических основ уже начинают наблюдаться принципиальные отличия в содержании материала. Далее придерживаются подхода предложенного К. Каратеодори [3].

Исходя из логической и математической структуры уравнения сохранения энергии, показывают, что для многих параметров это уравнение представимо дифференциальным уравнением Пфаффа: $dQ = P_1(z_1, \dots, z_n)dz_1 + \dots + P_n(z_1, \dots, z_n)dz_n$, где величины P_k – функции параметров системы.

Представление элементарного количества теплоты dQ в таком виде обосновано известным объемом опытных данных. После этого приводят теорию решения уравнений Пфаффа и дают обоснование голономности и неголономности этих уравнений. По отношению к голономному уравнению существует интегрирующий делитель $\lambda(z_1, \dots, z_n)$, когда:

$$\sum_{k=1}^n P_k(z_1, \dots, z_n)dz_k = \lambda \cdot d\Phi, \quad (1)$$

где Φ – функция параметров z_1, \dots, z_n . Из данного соотношения очевидно, что $P_k = \lambda \cdot \partial\Phi / \partial z_k$. Также из решения уравнения Пфаффа следует, что $\Phi(z_1, \dots, z_n) = const$, т.е. величина Φ является общим интегралом. Если построить изучаемое многомерное пространство Ω_n с независимыми декартовыми переменными z_1, \dots, z_n , то физический смысл для функции теплоты $Q(z_1, \dots, z_n)$ заключается в том, что вблизи любой точки пространства Ω_n существуют точки, недостижимые из нее при адиабатическом процессе $dQ = 0$. Данное свойство пространства получило название «адиабатической недостижимости». Однако, подобное утверждение справедливо только для случая, если уравнение Пфаффа для количества теплоты голономно. Каратеодори постулировал адиабатическую недостижимость как универсальное свойство всех физических систем и доказал справедливость теоремы: если в окрестности некоторой точки n -мерного пространства существуют точки, не достижимые без нарушения уравнения

$$\sum_{k=1}^n P_k(z_1, \dots, z_n)dz_k = 0, \quad \text{то данное уравнение}$$

голономно и для него существует интегрирующий делитель [5]. Далее Каратеодори показывает, что интегрирующим делителем уравнения для элементарного количества теплоты является абсолютная температура в форме универсальной функции эмпирической температуры. В свою очередь, общий интеграл уравнения Пфаффа $\Phi(z_1, \dots, z_n)$ для количества теплоты определен как энтропия термодинамической системы, т.е.

$$ds = \frac{dQ}{T}, \quad \lambda = T. \quad (2)$$

В связи с тем, что на основе оригинального доказательства обоснован принцип существования энтропии, в дальнейшем легко переходят к выводу всех других теорем и уравнений термодинамики.

Таким образом, имеются две основные системы изложения основ термодинамики, хотя различных вариаций этих систем наблюдается

значительно больше. Традиционный подход изначально был предложен Клаузиусом и другими классиками термодинамики, в течение длительного времени он получил свое развитие. Аксиоматическая система изложения основ термодинамики введена в науку К. Каратеодори и его последователями. Первую систему обычно критикуют за слишком тесную связь с процессами работы тепловых машин, противоречивость некоторых положений и недостаточную выразительность математического формализма. Множество авторов считают, что в данном случае нет строгой термодинамической теории, которую можно было бы аксиоматизировать [4 – 9, 12]. Вторую систему изложения критикуют за абстрактность и формально математический подход к установлению термодинамических понятий, который не соответствует стилю термодинамических исследований и нарушает физическую ясность и простоту основных положений. Однако, с точки зрения обоснования фундаментальности метода термодинамики вторая система изложения является более предпочтительной, хотя надо согласиться с некоторыми критиками, что она упускает физическое содержание некоторых используемых принципов.

Обе системы изложения основ теории термодинамики широко представлены в учебниках и дополняют друг друга, хотя и имеют существенные различия в способах обоснования и вывода основных положений и зависимостей. Многие авторы, используя традиционное изложение материала, часто приводят основные идеи аксиоматического метода и стремятся использовать разные подходы при изложении материала.

Особо отметим, что в обеих системах изложения термодинамики используется один исходный принцип, который положен в основание всех последующих выводов. Как справедливо отметил А. Гухман, вся система термодинамики основывается на всеобщем положении – неизбежности термодинамической формы уравнения закона сохранения и превращения энергии. Данное уравнение является фундаментальной закономерностью в изложении термодинамических основ, с использованием которой формируется вся логическая цельность термодинамики.

Существующие аксиоматические подходы в термодинамике

Аксиоматический метод является одним из способов дедуктивного построения научных теорий. Методология метода предполагает, что вначале перечисляются основные исходные понятия и даются их определения, после чего выбирается ограниченное количество

принимаемых без доказательств утверждений – аксиом или постулатов. Входящие в аксиомы понятия явно не определяются в рамках разрабатываемой теории, однако все исходные понятия, аксиомы и постулаты основываются на опытных данных и считаются истинными в силу их очевидности. Далее формулируются основные приемы исследования, логические формы и правила вывода положений теории (методов), позволяющие последовательно выводить одни утверждения и суждения из других. На основе аксиом и принятых методов все остальные положения теории выводятся путем доказательства теорем и развития исходных положений и утверждений.

Считается, что аксиоматизация осуществляется обычно после того, как содержательно теория уже в достаточной мере развита и построена, и основные положения которой подтверждены сопоставлением с опытными фактами. Процесс аксиоматизации теории обычно протекает сравнительно быстро, если объем исходного знания достигает необходимого уровня и феноменологически и аналитически теория уже сформирована.

В термодинамике процесс аксиоматизации науки длится уже более ста лет. Аксиоматика термодинамики имеет своей целью определение основных понятий, установление закономерностей и фундаментальных термодинамических законов. Однако все работы в этой области в том или ином виде преследовали в основном одну цель – придать учению об энтропии логическую строгость. Со времени опубликования К. Каратеодори и Н. Шиллером первых работ по аксиоматике [5, 8], появилось значительное количество публикаций, посвященных данной проблеме [6, 7, 9 – 19]. Подход Каратеодори привлек большое число последователей, его развитию и критическому анализу посвящен целый ряд работ [4, 11, 15 – 19 и др.].

Множество подходов в области аксиоматизации термодинамики указывает на то, что аксиоматическое направление в этой науке, несмотря на сто лет научных поисков, находится пока на этапе становления. Самое главное, что аксиомы должны отражать действительный мир опыта, и здесь необходимо отметить, что энтропия, например, в отличие от температуры, количества теплоты и вероятности событий, явно в опыте не определяема и не измеряема.

Однако, практический опыт аксиоматизации термодинамики указывает на то, что часто понятию энтропии как одному из исходных принципов уделяется первостепенное значение. Например, система аксиом А. Зоммерфельда просто обобщает основные положения всей теории термодинамики,

постулируя фундаментальные закономерности. С этой целью вводятся четыре аксиомы [20], связанные с транзитивностью теплового равновесия, законом сохранения энергии, принципом существования энтропии и способами ее определения.

Не все приведенные аксиомы являются очевидными и согласуются с исходными определениями и опытом [20]. Например, не объясняется разница в понятиях температуры и абсолютной температуры, функции состояния и характеристической функции состояния, априори без какого-либо обоснования вносится математическая формулировка закона сохранения энергии. В процессе определения энтропии и обоснования ее вычисления не опираются на данные опыта и вводят понятия, которые формируются в рамках дальнейшей теории или берутся из существующих представлений термодинамики вне положений разрабатываемой теории и т.д. (например, абсолютная температура).

Практически аксиоматическая система А. Зоммельфельда постулирует все основные феноменологические и теоретические положения термодинамики. В данном случае основные приемы исследования и правила вывода фундаментальных положений теории (методы) даже не аксиоматизируются, а декларируются, т.к. они не очевидны из данных опыта, а получены в рамках всего предыдущего феноменологического развития термодинамики. Все это не позволяет последовательно выводить одни утверждения из других.

В свою очередь, аксиоматическая система А. Гухмана в чем-то близка по содержанию описанной выше системе А. Зоммельфельда. Однако, предварительно автор уделяет значительное внимание исходным определениям и понятиям: термодинамическая система, термодинамическое равновесие, состояние системы и ее параметры, пространство состояний и его координаты, воздействие и взаимодействие, потенциалы взаимодействия, количество воздействия, квазистатический процесс и т.д. Понятийно-категорийный аппарат в варианте развития теории у А. Гухмана достаточно хорошо и ясно проработан. На основании данных понятий вводится ряд постулатов, хотя сам автор не акцентирует на них внимание как на аксиомах [4]. Данные постулаты в своей сущности близки к постулатам системы Зоммерфельда, хотя и имеют свои особенности изложения.

В своей книге [4] А. Гухман много внимания уделил вопросам аксиоматизации термодинамики, однако в отличие от К. Каратеодори ему не удалось убедительно доказать справедливость фундаментальной зависимости второго начала $dQ = T \cdot ds$, в связи

с чем пришлось постулировать данное соотношение. При этом не раскрыта математическая суть понятия энтропии как функции состояния и общего интеграла. Предложенная система обоснования термодинамики страдает нарушением последовательности выводов и очевидности основных положений.

Указанные выше авторы, а также ряд других ученых [3, 21, 22], строили, в целом, неаксиоматические системы обоснования термодинамики. Термодинамические постулаты, основанные на феноменологических положениях, полученных, в свою очередь, на основе опыта и уже существующей теории, составляли основной каркас предлагаемых систем. В этих системах нет последовательного вывода одних утверждений из других, так как постулаты формируются не в самом начале аксиоматического изложения теории, а по мере необходимости обоснования определенных положений, которые не являются очевидными. То есть авторы не очень придерживались требований о последовательном логическом представлении всего содержания теории. Кроме того, часто основные начала термодинамики представлялись в виде аксиом, при этом не понятно зачем фундаментальные законы термодинамики заменять аксиомами.

Иной подход к аксиоматике термодинамики, более близкий к методам математической аксиоматики, был дан в работах Н. Шиллера, Г. Фалька, К. Каратеодори и других авторов. Первые попытки построения аксиоматики второго начала стремился провести Н. Шиллер [8]. Введя определения и понятия температуры, температурных параметров, термических параметров, термического взаимодействия, адиабатических изменений состояний тел, энтропии и т.д., Шиллер сформулировал девять положений и пришел к необходимости анализа многомерного дифференциального уравнения:

$$Z_0 dz_0 + Z_1 dz_1 + \dots + Z_n dz_n = 0, \quad (3)$$

которое характеризует процесс адиабатических изменений системы, где z_k – параметры состояния, Z_k – функции параметров. Далее проводилось исследование наличия или отсутствия общего интеграла уравнения (3). Однако принятые автором постулаты не являлись очевидными, и Шиллеру не удалось обосновать принцип существования энтропии последовательным выводом утверждений и положений.

В свою очередь, при формулировке теории на основе линейных дифференциальных форм Г. Фальк исходил из суждения, что классическое построение термодинамики является не очень строгим и не соответствует тем требованиям, которые предъявляет

аксиоматический метод [12, 13]. Он обращал внимание на то, что уравнение сохранения энергии в виде $dQ = du + dA$ относится к процессам, а не к состояниям, т.е. речь идет о функциях на многообразии кривых – функциях, аргументами которых служат кривые пространства состояния. В свою очередь, функции состояния соответствуют полным дифференциалам. Исходя из этого, он приходит к важному выводу, что формулировка первого начала термодинамики оказывается тесно связанной с понятием непрерывного пространства состояний термодинамических систем. При этом отмечается, что закон сохранения энергии $dQ = du + dA$ справедлив только для ограниченного класса физических систем, где возможны термические взаимодействия и где применимо понятие теплоты. При математическом построении теории необходимо также не только применение непрерывного пространства состояний в качестве основного понятия, но и решение проблемы абстрактного и физического распознавания процессов (функций процессов), с которыми имеет дело термодинамика. Этим подчеркивается существование математических и физических особенностей решаемой задачи. Идя данным путем, Фальк и Юнг вначале множеству состояний не приписывают никаких свойств континуума и употребляют дискретные множества состояний (точек). Для построения теории вводится целый ряд определений: состояние системы, пары и классы состояний, воздействие, взаимодействие, энергетическая изоляция, адиабатическая изоляция, метрическая переменная энергии, состояния равных энергий, эмпирическая энтропия и т.д. После этого формулируются три основные аксиомы, позволяющие обосновать свою систему изложения основ термодинамики.

Авторы данной системы пошли по пути нового построения теории, основанной не на аксиоматизации основных начал термодинамики, а на использовании закономерностей линейных дифференциальных форм в многомерных пространствах. Однако, используемые авторами аксиомы также не являются очевидными и явно не вытекают из опыта. Принять такую систему изложения основ термодинамики научному сообществу было достаточно сложно потому, что в ней нет эволюционного перехода от традиционной системы обоснования термодинамики к новой.

Аксиоматизация термодинамики может быть проведена различными способами, как в отношении формулировки аксиом, так и выбора основных понятий и определений. Один из наиболее успешных подходов был предложен К. Каратеодори [5]. В целом этот подход основан на аксиоматизации первого и второго

начала термодинамики, но в математически более строгой форме, нежели это принято в традиционной системе изложения термодинамики. Справедливости ради необходимо отметить, что предложенная система не обладает явной простотой и отличается достаточно высокой степенью абстрактности. Однако нас интересует общий формализм данного теоретического метода, и на этом хотелось бы акцентировать внимание.

Предположим, что некоторая величина может быть представлена в виде:

$$dQ = Z_1 dz_1 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_n dz_n, \quad (4)$$

где z_1, z_2, \dots, z_n – параметры состояния системы; Z_1, Z_2, \dots, Z_n – функции этих параметров. В термодинамике величина dQ – это количество теплоты. Возможность представления этой величины в виде (4) обеспечена объемом предварительных знаний, связанных с эмпирическими данными. Во многих иных случаях можно задаться предположением, что некая аддитивная величина вида (4) может существовать. Данное выражение понимается как уравнение, которое служит для определения величины dQ через параметры системы в условиях квазистатического процесса.

При формулировке теории К. Каратеодори использует ряд общепринятых определений и вводит несколько новых: эквивалентности систем, тождественности систем, характеристики изменений состояний. После этого формулируются две основные аксиомы как обобщения опытных данных для простых систем.

Каратеодори поставил вопрос об условиях, при которых возможно представление дифференциала приращения теплоты dQ в форме $dQ = T \cdot ds$, где T является интегрирующим делителем, а величина ds – полным дифференциалом. Для этого им была доказана лемма из теории пфаффовых уравнений: если в окрестности любой точки n -мерного пространства есть точки, не достижимые вдоль кривых, удовлетворяющих уравнению

$$Z_1 dz_1 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_n dz_n = 0, \quad (5)$$

то уравнение вида (4) голономно, и для левой части уравнения обязательно существует множитель, обращающий его в полный дифференциал. Далее, как универсальное свойство всех физических систем постулируется «адиабатическая недостижимость». Вместе с доказанной леммой, это эквивалентно утверждению, что уравнение (4) безусловно голономно и для него существует интегрирующий делитель.

В аксиоматическом направлении учения об энтропии задача обоснования существования энтропии в принципе решена [4]. При этом к полученному математическому доказательству никакие физические гипотезы, кроме постулата адиабатической недостижимости, не привлекаются. Считается, что формальный аппарат доказательства отличается строгостью. Однако, в чем физическая суть принципа адиабатической недостижимости К. Каратеодори не раскрывает. Принцип Каратеодори постулирует положение о том, что пфафова форма вида (4) от n переменных всегда голономна. При этом в основе построения всей теории лежит постулат адиабатической недостижимости и теорема об интегрируемости пфаффовых форм. Известно, что при наличии более двух переменных существование интегрирующего делителя является исключительной особенностью коэффициентов Z_k в выражении (5).

Получается, что именно второй закон определяет, что такой особенностью обладают дифференциальные пфаффовы формы количества теплоты δQ для макроскопических квазистационарных физических систем, однако при этом нет ответа на вопрос – какая физическая закономерность лежит в основе этого факта. Поэтому, наиболее слабым местом аксиоматики К. Каратеодори, как отмечал Планк, является принцип адиабатической недостижимости. По его словам проблема адиабатической недостижимости никогда не была предметом специального изучения, и никто не проводил соответствующих экспериментов. В настоящее время объем опытных данных недостаточен для признания постулата адиабатической недостижимости универсальным физическим принципом. На это обращал внимание в свое время и А. Гухман.

Фальк и Юнг также указывали на недостатки подхода К. Каратеодори. В частности отмечалось, что оба основных закона термодинамики получают иную формулировку, нежели множество традиционных формулировок этих законов. Также в работе используется не система аксиом, а только две аксиомы, а все остальные положения сведены к определениям. В свою очередь, положение о существовании адиабатически недостижимых состояний в окрестности любого состояния производит впечатление глубокого топологического свойства многомерного пространства состояний, которое не понятно как соотносится со свойствами физических систем.

Тем не менее разработанная Каратеодори система обоснования математической структуры количества теплоты (А. Гухман называл также эту величину количеством воздействия) может быть непосредственно

распространена на воздействия любого рода и любые сложные системы [4]. Единственным ограничением является условие квазистационарности, при котором в ходе процесса во времени внешние воздействия должны изменяться достаточно медленно. В этом случае состояниям системы присуща определенная однородность и непрерывность в пространстве состояний. В дальнейшем мы будем обращаться к основным выводам работы Каратеодори. Эти выводы содержат общий принцип, который можно распространить на нефизические системы, благодаря чему можно сформулировать методы феноменологического описания систем различной природы. Однако, это возможно будет только после раскрытия математической сути принципа «адиабатической недостижимости» и получения ответа на вопрос: почему многие сложные системы имеют функциональные ограничения на осуществление процессов, которые ведут к изменению их состояния.

К анализу работ Каратеодори обращалась Т. Афанасьева-Эренфест, она выдвинула свою систему обоснования второго начала термодинамики, близкую по методике изложения к аксиоматическому подходу [6]. На основе исследований автор раскрыла логическую противоречивость формулировок второго закона, данных Клаузиусом и Кельвином. Основной сделанный вывод – существование энтропии и абсолютной температуры не зависит от необратимости реальных процессов и само существование энтропии как функции состояния недостаточно для обоснования ее возрастания. Необратимостью является особым понятием, определяющим направление процессов. Иными словами второй закон термодинамики содержит в своей основе два различных положения – принцип существования энтропии и принцип ее возрастания. Это достаточно важные выводы, затрагивающие саму суть второго начала.

Свою систему обоснования Афанасьева-Эренфест формирует путем использования общепринятых понятий: параметры системы, равновесное состояние, квазистатический процесс, адиабатический процесс, переходы между состояниями, количество теплоты, температура и т.д. После этого изучается вопрос голономности и неголономности уравнения Пфаффа вида (4).

Далее автор использует четыре аксиомы [6]. Первая аксиома формализует голономность уравнения (4), исходя из факта существования термически однородной системы, вторая реализует принцип транзитивности тепловых связей, третья определяет энтропию как функцию состояния, исходя из ее представления общим интегралом, что, кстати, не является

очевидным из последовательности выводов и принятых положений. Наконец, четвертая аксиома определяет особенности интегрирующего делителя для уравнения (4).

Из этих четырех аксиом логически обосновывается постулат Клаузиуса. По мнению Афанасьева-Эренфест совокупность данных аксиом составляет основное содержание второго начала термодинамики для квазистационарных процессов. Далее рассматриваются неголономные системы, и осуществляется переход к аналитическому описанию нестационарных процессов.

В целом данный подход использует элементы как традиционной, так и аксиоматической систем изложения термодинамики. Многие положения, применяемые Афанасьевой-Эренфест вызвали ряд критических замечаний, К. Путилов, например, в целом давал негативную оценку выбранного способа обоснования термодинамики.

Подведем некоторые итоги данного анализа. Сущность большинства аксиоматических подходов заключается в том или ином способе использования закона сохранения энергии или термодинамической формы уравнения закона сохранения энергии. Во всех имеющихся системах с этим связано принятие основного постулата или аксиомы. Однако, данное положение по своей сути не является аксиоматическим, т.к. несет в себе закономерности обоснованные как экспериментом и практическим опытом, так и логикой и теорией термодинамики. Аксиомы, связанные со вторым началом еще менее очевидны, так как доля логических обоснований в них существенно больше, а с опытом сопоставляются не сами исходные аксиомы, а логические и теоретические следствия, которые с ними связаны. Получается, что авторы в целом как-бы предопределили общее содержание задачи и ориентировались на смысл конечных результатов, который был заранее известен. Этим явно нарушается эволюционное развитие основных понятий и положений аксиоматической теории термодинамики как взаимосвязанного целого.

Исходные понятия и аксиомы должны основываться на опыте, быть очевидными и не содержать в себе изначально не аргументированных утверждений. Обратим внимание на то, что термодинамика располагает четырьмя множествами опытных фактов:

- наблюдаются состояния термодинамического равновесия физических систем, что предопределяет существование понятия температуры, при этом состояния систем однозначно характеризуются эмпирической температурой, которая

представляет собой меру отклонения состояния термодинамической системы от состояния теплового равновесия эталонного тела;

- для многих термодинамических систем могут быть построены уравнения состояния или установлены зависимости между параметрами свойств системы и эмпирической температурой, которые можно представить в функциональном или в численном виде;

- существует эмпирическое понятие количества теплоты и система измерения этой величины. Данная величина может быть определена в любом процессе изменения состояния системы;

- практически для всех веществ в различных условиях опыта могут быть найдены теплоемкости и другие характерные calorические величины.

Поэтому при аксиоматизации термодинамики можно оперировать понятиями и терминами, уже определенными в рамках этих эмпирических фактов. Однако, это не касается энтропии – ее дальнейшее определение должно обосновываться из системы аксиом или полученных следствий. Другими словами, необходимо постулировать не существование энтропии, а самоочевидные исходные принципы, вытекающие из опыта, которым с помощью методов формализации и обобщения дается более широкое содержание. Таким же образом, из теории должен вытекать факт справедливости уравнения закона сохранения энергии, а имеющиеся термодинамические формы данного уравнения, полученные феноменологическим путем и логическим развитием, должны совпадать с аналогичными теоретическими зависимостями в аксиоматической теории.

При построении аксиоматики термодинамики также крайне важным является использование пространства состояний термодинамических систем в виде непрерывной многомерной модельной среды. Если рассматривать параметры состояния термодинамической системы, как декартовы координаты, то подобная модельная среда может быть представлена в виде многомерного пространства n -измерений.

В этом случае состояние термодинамической системы будет отображаться многомерной точкой, а процесс изменения состояния – многомерной кривой. При этом следует учитывать в процессе моделирования два аспекта проблемы – математическое и физическое содержание научной задачи. В первом случае любые изменения состояния термодинамической системы в многомерном пространстве состояний являются равновозможными, и на осуществление состояний и процессов не накладывается

никаких ограничительных условий. Даже процесс, который осуществляется с точки, лежащей на характеристической поверхности уравнения состояния для конкретного вещества, в область вне этой поверхности, абстрактно возможен. Во втором случае множество всех состояний системы будет отображать только физически возможные состояния и процессы, которые могут быть ограничены условиями существования и осуществления и которые будут привязаны к определенным характеристическим поверхностям или кривым. Подобные условия должны учитывать физику термодинамических процессов и явлений и отражать ее в особенностях процесса моделирования и представления многомерных точек состояний и кривых процессов. Сказанное выше предопределяет, например, необходимость использования в термодинамике двух понятий – эмпирической и абсолютной температуры. Эмпирическая температура будет определять физическое содержание проблемы, а абсолютная температура – ее математическое содержание. Исходя из сказанного выше, в процессе аксиоматизации также можно оперировать понятиями и терминами уже определенными в рамках представления многомерного пространства состояний термодинамической системы.

При построении аксиоматической теории следует с новых позиций рассмотреть вопрос изучения и разрешения некоторых противоречий термодинамики: неоднозначность понятий теплоты и работы; противоречивость использования представлений об обратимости и необратимости процессов, их равновесности и неравновесности; явную абстрактность в понятии энтропии, которая слабо связана с физической и математической сущностью этой величины; проблему отсутствия времени как параметра в уравнениях термодинамики; расплывчатость и неоднозначность в представлении состояний системы как событий и проблему определения вероятности этих событий и др.

В классической термодинамике фундаментальное положение о возрастании энтропии и связь этого положения с необратимостью процессов в природе, так и не было полностью изучено. В чем суть необратимости – это пока и сегодня не до конца решенная задача термодинамики. Качественно суть необратимости вроде бы ясна, количественно уловить ее содержание не удается. Проблема «обратимые – необратимые процессы» даже удивляет своей неразрешимостью в течении очень длительного времени по меркам современной науки. Известный тезис Планка, что вместе с необратимостью «стоит и падает вся

термодинамика» говорит о том, насколько важен данный вопрос.

Тоже самое можно сказать и о наличии времени в уравнениях классической термодинамики. Как отмечает ряд авторов, классическая термодинамика по своей сути является термостатикой. Оперировав термодинамическими процессами, которые протекают во времени, классическая термодинамика не дает ответа на вопрос о месте времени в своей теории. Введя понятие равновесного процесса, который является уж слишком абстрактной идеализацией реальности, теория термодинамики не отвечает на вопрос: в чем суть принципиальных отличий равновесного процесса от квазистатического процесса, и как последний связан с квазистационарным процессом. И в квазистатическом и в квазистационарном процессах при любом варианте описания должно присутствовать время. Вот пример типичного пояснения сути проблемы «равновесные – неравновесные процессы» [23, стр. 46]. «Любой процесс становится равновесным, если скорость осуществления этого процесса стремится к нулю. В тоже время любой неравновесный процесс является необратимым, а всякий равновесный процесс является процессом обратимым. Иными словами, причина необратимости реальных процессов заключается в их неравновесности. Действительно, бесконечно медленное (квазистатическое) проведение процесса делает этот процесс обратимым».

В данном варианте пояснения проблемы понятие необратимости заменяется неравновесностью, которая, в свою очередь, связывается с нарушением квазистатичности. Как видно, в место одного понятия необратимости введено в употребление еще два понятия, однако это совсем не делает изучаемую проблему более ясной. Для квазистатических процессов (бесконечно медленных процессов) можно не учитывать высшие производные процессов изменения параметров относительно абсолютного времени, но это не дает ответа на вопрос о месте и необходимости присутствия времени в теории классической термодинамики. Мы не можем влиять на скорость осуществления большинства необратимых процессов, поэтому предполагая возможность их квазистатического протекания, мы тем самым уходим от опыта в область крайне умозрительных и гипотетических предположений. Очень сложно представить существование квазистатических процессов плавления веществ простым трением (опыты Деви), квазистатических процессов в опытах Джоуля с падающим грузом или в опытах по экспериментальному исследованию

адиабатических процессов (например, опыты Клемана, Льюмера, Пардингтона и др.). Следует отметить, что множество экспериментальных обоснований в термодинамике вовсе не связано с осуществлением очень медленных (равновесных, квазистатических) процессов. В лучшем случае можно говорить об осуществлении квазистационарных процессов. Поэтому, в общем, суть проблемы необратимости не зависит от того, медленно или сравнительно быстро осуществляется процесс. Необратимость связана с формированием статистических закономерностей при осуществлении процессов и нарушении принципа равновозможности в окрестности состояний системы. В свою очередь, нарушение равновозможности определяется видом процесса и его статистическими особенностями, а потом уже скоростью осуществления его во времени. Также необратимость связана с тем, что изменения функций, характеризующих состояния многих систем, зависят не только от параметров, но и особо от времени. Поэтому невозможно абсолютно точно осуществить один и тот же термодинамический процесс в прямом и обратном направлении.

Также следует уделить особое внимание вопросу, связанному с определением вероятности состояния термодинамических систем. Это связано с тем, что в статистической физике вводится известное определение термодинамической вероятности, оценка которой основана на понятиях микро- и макросостояний системы. В самой классической термодинамике вероятность для наблюдаемого состояния системы, отвечающего заданным макроскопическим условиям, не определена, т.к. не определен сам факт представления состояния системы как события. Одно из основных противоречий термодинамики связано с нелогичным использованием вероятностных принципов в термодинамике и заключается в том, что энтропия может быть определена в виде статистической энтропии в представлениях Больцмана-Планка и в виде термодинамической энтропии в представлениях Клаузиуса [22]. Если в последнем случае энтропия определяется на основании данных опыта, исходя из наблюдаемых термодинамических параметров системы, отвечающим некоторым макроскопическим условиям, то статистическая энтропия определяется на основе умозрительных гипотез, позволяющих оценить вероятность определенных видов событий – событий реализации микросостояний, которые отвечают заданному макросостоянию. Понятие термодинамической вероятности, которое исторически сложилось в статистической физике, качественно отличается от понятия математической вероятности, с чем связано еще

одно противоречие термодинамики. Поэтому важным является определение на макроуровне вероятности состояния для случая многомерного пространства состояний термодинамических систем. При решении данной проблемы видна явная необходимость изучения практического использования вероятностных принципов в термодинамике, которые позволили бы раскрыть сущность многих спорных вопросов и исключить ряд противоречий, затрагивающих основания данной науки.

Некоторые определения, понятия и исходные данные

В естествознании основная цель любой аксиоматики – это, опираясь на известные определения и опытные факты и вводя ограниченное количество аксиом, логически получить математические зависимости для основных законов теории. В классической термодинамике аксиоматически построенная система изложения теории актуальна, в первую очередь, для термодинамических систем со многими параметрами состояния, т.е. для систем с n степенями свободы.

Зададимся следующим вопросом: можно ли в термодинамике сформулировать принципы существования энергии и энтропии и закон сохранения энергии теоретическим путем? Ответ на этот вопрос крайне актуален и его решение может лежать в системе взглядов и научных представлений именно аксиоматического подхода к построению теории. Ответ на вопрос о всеобщности закона возрастания энтропии находится, скорее всего, вне области теории термодинамики.

Какими могут быть исходные предпосылки, позволяющие осуществить аксиоматику термодинамики? Обратим внимание на физический принцип «адиабатической недостижимости». Данный принцип, используемый Каратеодори при доказательстве существования энтропии, скорее всего только запутал и без того сложный вопрос, связанный с аксиоматизацией термодинамики. Но надо отдать должное, Каратеодори нашел ту нить, потянув за которую можно распутать весь «клубок» проблем. Если рассматривать принцип «адиабатической недостижимости» как следствие существования скалярного поля некоторой физической величины, то появляется идея для аксиоматизации всей теории термодинамики. Дальше на основе этой идеи формируется подход комплексного описания различных систем, который не зависит от природы анализируемых систем [1, 2]. В результате термодинамика на основе своей универсальной логики позволяет предложить

феноменологические методы анализа и описания данных наблюдений или опыта для объектов и систем многомерной размерности, к которым относятся все природные, биологические и социальные системы, а также сложные технические объекты.

В данном случае будем рассматривать простые термодинамические системы, состоящие из химически неизменных газов, жидкостей и твердых тел. Далее используем следующие известные определения и понятия.

Под *термодинамической системой* понимаем совокупность макроскопических тел и полей физической природы, которые представляют собой целостный объект и взаимодействуют как между собой, так и с окружающей средой. Все другие тела, которые находятся за пределами границ системы, представляем окружающей (внешней) средой. Таким образом, *окружающая среда* – это совокупность физических условий, в которых находится изучаемая система или объект.

Примем также следующие определения. *Класс* систем (объектов) – множество однотипных объектов, обладающих общими свойствами и качественными признаками. *Свойство* – атрибутивная характеристика, которая отражает некоторый существенный и неотъемлемый признак или отличительную особенность системы, объекта или явления. *Параметр* свойства – количественная величина, характеризующая свойство объекта или явления и имеющая числовое значение.

Под *состоянием* термодинамической системы (объекта) будем подразумевать совокупность ее свойств, параметры которых формируются под действием внешних и внутренних условий в конкретный момент времени. Исходя из этого, считаем известными все определения для геометрических свойств, а также интенсивных и экстенсивных физических свойств объектов и систем: местоположения, направления, длины, площади, формы, объема, состава, массы, плотности, удельного объема, силы, давления, концентрации, теплопроводности и т.д. На определении температуры далее остановимся отдельно, т.к. это понятие будем трактовать в «широком» смысле, как некоторое *комплексное* свойство, которое в зависимости от структуры объекта и внешних и внутренних условий будет характеризовать состояние объекта, исходя из системных представлений. Такой подход связан с тем, что температура в определенных условиях в целом характеризует состояние объекта в сравнении с состоянием эталонного объекта в этих же условиях. Дадим также определение равновесному состоянию – состояние, к которому с течением времени приходит система или объект при неизменных

внешних условиях и в котором параметры свойств остаются постоянными.

Под *событием* будем понимать любой наблюдаемый факт, связанный с материальными движениями, который выражается в изменении состояния объектов (системы). Введем также понятие *одновременности* – существование разных событий в один и тот же момент наблюдения. Это позволяет использовать понятия раньше и позже для событий, которые характеризуют материальные движения. Факты наблюдения отдельных параметров состояния системы будем рассматривать как простые события, в свою очередь, событие, отражающее состояние системы в целом, будем представлять как совместное событие одновременного наблюдения совокупности чисел z_1, z_2, \dots, z_n , которые являются параметрами свойств. Считаем, что теоретически или алгоритмически на основании данных опыта может быть определена вероятность данного события, которую будем называть вероятностью состояния системы.

Определим процесс как закономерное изменение состояния объекта в последовательные моменты времени, связанное с материальными движениями. При данном исследовании умышленно не разделяем процессы на самопроизвольные (естественные) и несамопроизвольные (управляемые). Сказанное выше позволяет нам определить применительно к термодинамической системе понятия квазистационарного и нестационарного процесса и не использовать понятия равновесного и неравновесного процесса.

В классической термодинамике изначально формулируется понятие равновесного состояния (состояние, к которому приходит система при неизменных внешних условиях) и накладывается требование возможности осуществления равновесного процесса в виде бесконечно медленного прохождения системы через непрерывный ряд равновесных состояний. Если понятие равновесного состояния имеет объяснение и может быть принято, как предельный случай, связанный с изменениями систем во времени, то понятие равновесного процесса крайне противоречиво. В формулировке равновесного процесса в основы теории закладывается глубокое противоречие, связанное с отсутствием времени в уравнениях классической термодинамики, несмотря на то, что любой процесс по своему содержательному определению предполагает зависимость от времени (процесс /лат. processus – движение вперед/ – последовательное закономерное изменение явления или состояния во времени). Поэтому с целью замены понятия равновесного

процесса, будем пользоваться известным определением квазистационарного процесса – процесса, протекающего в системе и распространяющегося в ней с такой скоростью, что за время распространения этого процесса в пределах системы (в пределах элементов системы) её состояние (состояние элементов) не успевает измениться. Поэтому при рассмотрении такого процесса можно пренебречь временем его распространения в пределах системы и считать, что свойства в различных областях системы хотя и могут отличаться, однако меняются во времени во всех точках одновременно. Другими словами параметры свойств системы зависят от времени, однако при описании системы как единого целого высшими производными этих параметров по времени в любой точке пространства системы можно пренебречь и учитывать только первые производные. В противном случае процесс изменения состояния системы будем относить к нестационарному процессу.

Проведем некоторую формализацию используемых определений и понятий. Предположим, что каждое состояние системы однозначно определено значениями всех ее параметров z_k (в общем случае n). Число независимых (атрибутивных) параметров свойств z_k , значения которых полностью и однозначно определяют данное состояние системы в каждый момент времени, обычно называют термодинамической степенью свободы системы.

Примем гипотезу, связанную с необходимостью введения понятия эмпирической меры состояния w , которая представляет собой величину, комплексно характеризующую состояние системы. Мера w определяется в опыте путем измерений и оценок и представляет собой системную величину, например, эмпирическую температуру, эмпирическое время, количество теплоты, статистическую вероятность событий, стоимость объектов, экспертный оценочный показатель и т.д. Эта величина однозначно характеризует состояние системы в определенном аспекте, зависит от параметров атрибутивных свойств z_1, z_2, \dots, z_n и не может быть одним из свойств этой системы.

Подобный подход позволяет нам в дальнейшем использовать основополагающее понятие математического анализа – понятие функции, и представить эмпирическую меру в виде функциональной зависимости. Поэтому, формализуя данный подход в терминах математического анализа, сформулируем представление эмпирической меры в виде функции. Пусть рассматривается множество Ω_n упорядоченных систем чисел

(z_1, z_2, \dots, z_n) , которые являются параметрами свойств некоторой системы. Если в силу некоторого эмпирического закона, правила или процедуры измерений каждой системе чисел (z_1, z_2, \dots, z_n) приведено в соответствие число w , то будем считать, что на множестве Ω_n определена эмпирическая мера состояния системы $w = W(z_1, z_2, \dots, z_n)$ как функция n переменных.

Далее предположим также, что при совершении во времени некоторого произвольного процесса l параметры свойств системы всегда представимы параметрическими уравнениями относительно времени τ :

$$z_1 = z_1(\tau), z_2 = z_2(\tau), \dots, z_n = z_n(\tau). \quad (6)$$

Будем рассматривать только те системы, для которых возможно осуществление процессов, отличающихся существованием и непрерывностью функций (6). Непрерывную кривую в n -мерном пространстве, образованную уравнениями (6), будем называть линией термодинамического процесса.

Поэтому для квазистационарного процесса наложим условие существования функциональной зависимости эмпирической меры от параметров свойств системы в виде:

$$w(\tau) = W(z_1(\tau), z_2(\tau), \dots, z_n(\tau)), \quad (7)$$

а для нестационарного процесса соответственно в виде:

$$w(\tau) = W(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau), \dots, z_n(\tau)). \quad (8)$$

Таким образом, мы считаем, что любое изменение системы во времени как единого целого связано с изменением параметров свойств и некоторыми комплексными характеристиками вида (7) – (8), которые свойственны совокупному процессу изменения состояния. Подобные характеристики оцениваются на основе данных опыта. При описании и моделировании процессов изменения состояний термодинамической системы может быть использовано несколько различных эмпирических мер, например, эмпирическая температура, количество теплоты или вероятность характерных событий. При этом, с точки зрения термодинамики, необратимость процессов будет определяться структурой функции эмпирической меры вида (8), где функция W явно зависит от времени, что будет приводить к различным линиям термодинамических процессов в прямом и обратном направлении.

Опытные факты

Закон сохранения энергии для термодинамики является тем краеугольным камнем, на котором строится вся ее теория и формулируется весь ее математический аппарат. Исходя из поставленной цели статьи, понятие

энергии и энтропии должны быть обоснованы в виде следствий аксиоматически построенной теории. Поэтому далее мы не будем использовать эмпирически установленный закон сохранения энергии и положение о независимости внутренней энергии от объема, которые были получены опытным путем для простых термодинамических систем. По этой же причине нельзя для обоснования энтропии использовать идеи Карно и Клаузиуса, связанные с обратимыми термодинамическими циклами, и подход Каратеодори, основанный на принципе адиабатической недостижимости. В обоих этих случаях, в том или ином виде, применяется закон сохранения энергии. Аналогично, при аксиоматическом изложении теории термодинамики, которое было предложено Фальком [12, 13], изначально постулируется существование метрической переменной – энергии системы.

Идею изложения теории термодинамики свяжем с опытными фактами существования температуры и количества теплоты. Далее покажем, что если для любых состояний термодинамической системы выдвинуть гипотезу существования некоторой комплексной функции вида $\theta = \theta(M)$, которую назовем эмпирической температурой, и установить связь этой величины с функцией количества теплоты $Q = Q(M)$, представляющей собой эмпирическую величину, то при дополнительных предположениях вполне возможно установление общих закономерностей, характеризующих поведение такой системы. Здесь принято, что M – это произвольное состояние термодинамической системы.

Для определения понятия температуры обычно используется свойство транзитивности термодинамического равновесия. Данное эмпирическое положение состоит в том, что когда две системы находятся в термическом равновесии с третьей, то они состоят в равновесии и друг с другом. При этом условие равновесия для систем представляется в виде:

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n) = F_1(z'_1, z'_2, \dots, z'_n), \quad (9)$$

где z_k и z'_k – соответственно параметры свойств первой и второй систем, причем не обязательно, чтобы количество параметров свойств в обоих случаях было одинаковым

Если вторую систему использовать как термометр и рассматривать значение функции $\theta = F_1(z'_1, z'_2, \dots, z'_n)$ как температуру, то условие равновесия означает, что первая система находится в равновесии с термометром, если для состояний системы существует зависимость:

$$\theta = F(z_1, z_2, \dots, z_n). \quad (10)$$

В термодинамике факт существования уравнения вида (10) подтверждается

множеством опытных данных. Исходя из этого, эмпирической температурой называют установленную опытным путем меру отклонения состояния изучаемой термодинамической системы от состояния теплового равновесия эталонного тела. С использованием стандартизированных средств и в определенных стандартных условиях для всего множества состояний эталонного тела создается универсальная шкала измерения эмпирической температуры. Данная шкала является линейной и привязывается к двум опорным физическим состояниям – точкам замерзания и кипения воды при стандартных условиях. Соответствующее эталонное тело называется термометром. В зависимости от того, какое эталонное тело принимают в качестве термометра, различают разные шкалы эмпирических температур. При этом идеально-газовая шкала представляет собой частную форму эмпирической шкалы. Термометрические измерения в данной шкале связаны с применением термометра, где используется эталонное тело – идеальный газ.

Сегодня существует несколько общепринятых способов измерения температуры. В термометрии для измерений используют идеально-газовую шкалу температур или шкалы температур однозначно связанные с ней, например, стоградусную шкалу. Исходя из этого, уравнение (10) представляется в виде:

$$T_* = F(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad (11)$$

где $T_* = F_1(z'_1, z'_2, \dots, z'_n)$ – эмпирическая температура, определенная по показаниям идеально-газового термометра.

Основополагающий опытный факт термодинамики заключается в существовании функции эмпирической температуры вида (11) для множества систем, которые находятся в различных равновесных состояниях. Обобщение опытных данных по термодинамическим процессам привело к утверждению, что для любой физической системы всегда существует некоторая функциональная зависимость между температурой и остальными параметрами, характеризующими состояние этой системы, которую называют уравнением состояния системы.

Данное уравнение означает, что каждое состояние термодинамической системы однозначно оценивается по сравнению с состоянием термометра, в основу которого, по большому счету, положена модель идеального газа. При этом система и термометр всегда находятся в одних и тех же условиях по отношению к окружающей среде. Именно поэтому, уравнение состояния идеального газа имеет важное значение, так как идеально-

газовая температура $T_* = p \cdot \nu / R_i$ входит в левую часть уравнения (11) и измерения температуры позволяют количественно характеризовать семейства состояний термодинамических систем по факту их теплового состояния.

Подводя итог можно сказать, что эмпирическая температура является комплексной характеристикой состояния термодинамической системы.

Следующим опытным фактом является существование понятия количества теплоты и теплоемкостей. Количество теплоты (Q) – это физическая величина, характеризующая процесс теплообмена между термодинамической системой и окружающей средой. Для измерения количества теплоты построена специальная система определения этой величины в любом процессе изменения состояний термодинамической системы. Количество теплоты определяется через измерение эмпирической температуры в начальном и конечном состоянии системы, а также через измерение работы электрического тока или падающего груза в совершаемом процессе изменения состояния системы. Таким образом, система измерения количества теплоты устанавливает связь между эталонным термодинамическим процессом нагрева воды в стандартных условиях и процессом изменения состояния изучаемой системы в наблюдаемых условиях окружающей среды.

Исходя из известных значений количества теплоты и эмпирической температуры, находится теплоемкость как отношение бесконечно малого количества теплоты δQ , полученного телом в определенном процессе, к соответствующему приращению его температуры $\delta \theta$. Теплоемкость (c_l) вводится в физике в качестве особого рода величины, которая является одной из теплофизических характеристик вещества. Имеется множество методов определения теплоемкостей газов, твердых тел и жидкостей в опыте, на основе которых получают эмпирические данные по значениям теплоемкостей. Уравнение, определяющее количество теплоты, необходимое для изменения температуры тела в процессе l , обычно представляют относительно эмпирической температуры и теплоемкости тела в виде:

$$c_l = \left(\frac{dQ}{d\theta} \right)_l. \quad (12)$$

Не будем останавливаться на природе теплоты, а примем экспериментальный факт существования некоторой эмпирической величины Q , которая изменяется при

увеличении или уменьшении температуры тела для различных линий термодинамических процессов, характеризует любой процесс термических взаимодействий и может быть измерена.

Необходимость введения данной величины в оценку результатов опыта связана с тем, что в процессе изменения состояния системы всегда взаимодействуют три объекта – термодинамическая система, термометр и окружающая среда. Уравнение (11) отражает взаимодействие термодинамической системы с термометром по факту существования равновесных состояний и позволяет сравнивать термодинамические состояния системы с состоянием термометра. В свою очередь, уравнение (12) отражает особенности взаимодействия системы с окружающей средой по факту сравнения термодинамических процессов, причем эти особенности определяются как состоянием, так и направлением процесса изменения состояния системы при ее взаимодействии с окружающей средой.

Таким образом, уже видно, что можно предложить несколько подходов в решении проблемы аксиоматизации термодинамики. Первый путь предполагает представление пространства состояний системы в виде непрерывного многомерного пространства и постулирование возможности определения в каждой точке пространства состояний количества теплоты $Q(M)$ в виде непрерывного скалярного поля эмпирической меры, зависящей от параметров состояния системы. Дополнительно к этому в окрестности произвольной точки M принимается аксиома позволяющая представить связь между количеством теплоты и аналитической функцией температуры $T(z_1, z_2, \dots, z_n)$, которую можно определить как абсолютную температуру. Данное уравнение связи задается в виде $dQ = c_l \cdot dT$. Для того чтобы обоснованно выбрать вид аналитической функции температуры $T = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ устанавливают связь этой величины с эмпирической температурой $\theta = \theta(M)$, которая однозначно характеризует каждое состояние изучаемой системы в пространстве состояний и тоже представляет собой скалярное поле. Основное отличие скалярного поля эмпирической температуры от функции абсолютной температуры состоит в том, что поле $\theta(M)$ не связано с выбором системы координат, а функция $T = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ связана с выбором координатных осей переменных z_1, z_2, \dots, z_n .

Второй путь аксиоматизации предполагает постулирование в непрерывном

пространстве состояний факт существования скалярного поля эмпирической меры в виде эмпирической температуры $\theta = \theta(M)$ и возможность описания этого поля аналитической функцией $T = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$, которую также можно определить как абсолютную температуру. Для характеристики реальных термодинамических процессов дополнительно принимается аксиома позволяющая представить зависимость между количеством теплоты и температурой в виде $dQ = c_l \cdot dT$. Этим вводится связь величины $T = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ с еще одной эмпирической величиной и накладываются определенные ограничения на осуществление процессов, исходя из заданных физических условий.

Третья возможность определяется постулированием существования в многомерном пространстве состояний эмпирических мер в виде скалярного поля вероятности состояния системы $w(M)$ и скалярного поля количества теплоты $Q(M)$. Вероятность состояния определяется по совместному событию одновременного наблюдения совокупности чисел z_1, z_2, \dots, z_n , которые являются параметрами свойств системы. Данная вероятность может находиться теоретическим путем или алгоритмически на основании статистической обработки данных опыта. Для создания среды моделирования вводятся аналитические функции абсолютной температуры $T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ и геометрической вероятности состояния системы $\rho(z_1, z_2, \dots, z_n)$, которые зависят от выбора координатных осей независимых переменных z_1, z_2, \dots, z_n . Между количеством теплоты и функцией температуры $T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ постулируется связь в виде $dQ = c_l \cdot dT$, в свою очередь для вероятности состояния системы постулируется аналогичная связь в виде $dw = c_{l,w} \cdot d\rho$. На основе установления взаимосвязи между изменениями количества теплоты и изменениями вероятности состояния системы в любом процессе определяются зависимости между термодинамической и информационной энтропией. При этом предварительно доказывается принцип существования различных видов энтропий для разных эмпирических мер [24].

Указанные выше пути аксиоматизации термодинамики основаны на общих идейных принципах непрерывности пространства состояний системы и существования скалярных полей некоторых величин, комплексно характеризующих состояния системы. Возможны также и другие подходы,

позволяющие провести аксиоматизацию теории термодинамики.

Следует отметить, что в общем случае физических величин, характеризующих взаимодействие системы с окружающей средой, может быть несколько. Каждой такой величине будет соответствовать физическое взаимодействие определенного вида (рода), поэтому термическое взаимодействие – это только один из многих видов взаимодействий. Изменение таких величин рассматривается как специфический эффект, через который проявляется взаимодействие данного вида [4]. Вопрос о принципах классификации и выявлении отличий для различных видов взаимодействий выходит за рамки данного исследования и должен изучаться отдельно. Однако, все сказанное далее можно распространить на некоторые другие виды взаимодействий системы с окружающей средой.

Принятые выше определения, понятия и эмпирические закономерности позволяют математически обосновать основные положения термодинамики и имеют общесистемное значение по отношению к самым разнообразным классам физических процессов и явлений. Важным является также то, что логический метод термодинамики как особая система феноменологического описания процессов и объектов может быть распространен на системы нефизической природы, например, природные, социальные и экономические системы. В ранее вышедших книгах автора [1, 2] была показана возможность реализации такого подхода.

Принцип существования энтропии

Теперь сформулируем основные положения теории применительно к многомерным системам. Материал будем излагать в общем виде, имея в виду, что подобный подход может быть применен как для термодинамических систем, так и для систем различной природы. Все сказанное ниже будет относиться к любой эмпирической мере w .

Пусть для некоторой системы имеется пространство состояний Ω_n , где координатные оси соответствуют атрибутивным переменным z_1, z_2, \dots, z_n соответствующего n -мерного абсолютного пространства свойств Ω , которое включает Ω_n . Каждой точке $M(z_1, z_2, \dots, z_n)$ данного пространства состояний системы может быть поставлено в соответствие значение некоторой эмпирической меры w .

Предположим непрерывность области Ω_n . Это означает, что в пространстве состояний Ω_n существует бесконечное множество состояний для некоторой генеральной совокупности систем и точки состояний

$M(z_1, z_2, \dots, z_n)$ непрерывно заполняют это пространство. Будем также считать, что каждое состояние системы однозначно характеризуется n независимыми переменными z_1, z_2, \dots, z_n и эмпирической мерой w , причем область определения для каждой переменной распространяется на всю положительную числовую ось $z_k(0, \infty)$. Сформулируем следующие аксиомы.

1. Пусть в пространстве состояний системы Ω_n каждой точке M поставлено в соответствие действительное число w , которое будем называть эмпирической мерой состояния системы.

2. Величина $w = W(M)$ является функцией точки и образует скалярное поле, которое является непрерывным в области Ω_n .

Для построения модели описания процессов изменения состояний системы используем гипотезу, что скалярное поле эмпирической меры w может быть аналитически описано в окрестности произвольной точки M . Будем считать, что вблизи точки M осуществляется процесс изменения состояния системы. Для задания скалярного поля эмпирической меры $w = W(M)$ как функции независимых переменных z_1, z_2, \dots, z_n необходимо определить функцию точки. Предположим, что в области Ω_n можно задать аналитическую непрерывную функцию $T(z_1, z_2, \dots, z_n)$, на основе которой будет формироваться математическая модель. При известном виде функции $T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ и значениях переменных z_1, z_2, \dots, z_n в области Ω_n можно построить еще одно скалярное поле, которое далее будем называть средой моделирования. Для конкретности непрерывную функцию $T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ определим как абсолютный индекс состояния системы.

Исходя из этого, для построения в общем случае феноменологической модели сформулируем следующую аксиому.

3. Пусть в пространстве состояний системы Ω_n скалярные поля величин w и T однозначно связаны между собой. Если в окрестности любой точки M система осуществляет некоторый процесс l , то для линии процесса l справедливо соотношение $dw = c_l \cdot dT$, где c_l – эмпирические величины, которые являются функциями процесса и определяются в опыте.

Выберем в области Ω_n произвольную точку M . Считаем, что вблизи данной точки осуществляется элементарный процесс, в

результате которого состояние системы изменяется от начального M до конечного состояния M' . Тогда элементарное изменение эмпирической меры w можно представить в виде:

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial T} \right)_{z_2, \dots, z_n} \left(\frac{\partial T}{\partial z_1} \right)_{z_2, \dots, z_n} dz_1 + \dots \\ \dots + \left(\frac{\partial w}{\partial T} \right)_{z_1, \dots, z_{n-1}} \left(\frac{\partial T}{\partial z_n} \right)_{z_1, \dots, z_{n-1}} dz_n \quad \text{или} \\ dw = c_1 \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z_1} \right)_{z_2, \dots, z_n} dz_1 + c_2 \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z_2} \right)_{z_1, z_3, \dots, z_n} dz_2 + \dots \\ \dots + c_n \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z_n} \right)_{z_1, \dots, z_{n-1}} dz_n \quad (13)$$

При выводе уравнений принято, что

$$\left(\frac{\partial w}{\partial T} \right)_{\dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots} = c_k, \quad \text{при этом величины } c_k$$

могут зависеть от параметров свойств.

Как уже указывалось выше основное отличие скалярного поля эмпирической меры w от аналитической функции $T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ состоит в том, что скалярное поле $w = W(M)$ не связано с выбором системы координат, а функция $T = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ связана с выбором координатных осей для независимых переменных z_1, z_2, \dots, z_n . Поэтому эмпирическая мера w представляет собой скаляр, а абсолютный индекс $T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ – функцию в виде аналитического выражения. Также, как следует из (13), мы пришли к необходимости изучения специального вида уравнения Пфаффа, которое интегрируемо в области Ω_n , так как аксиома 2 постулирует существование скалярного поля эмпирической меры.

Покажем, что аксиом (1) – (3) достаточно для обоснования принципа существования энтропии и получения математической формы закона сохранения энергии для многих переменных.

Будем искать решения уравнения (13) в классе мультипликативных и однородных функций. Например, считаем, что аналитическая функция $T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ является мультипликативной и может быть представлена в виде произведений функций, зависящих от параметров свойств $T = \varphi_1(z_1) \cdot \varphi_2(z_2) \cdot \dots \cdot \varphi_n(z_n)$.

Для решения поставленной задачи сформулируем следующую лемму.

Пусть задано уравнение Пфаффа вида (13) и пусть известно, что в окрестности любой точки M пространства состояний системы Ω_n среда моделирования $T = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ может

быть представлена в виде произведения функций, зависящих от параметров свойств $T = \varphi_1(z_1) \cdot \varphi_2(z_2) \cdot \dots \cdot \varphi_n(z_n)$. Тогда для уравнения (13) обязательно существует интегрирующий делитель, который обращает данное уравнение в полный дифференциал.

Покажем, что интегрирующим делителем уравнения (13) будет функция $T = \varphi_1(z_1) \cdot \varphi_2(z_2) \cdot \dots \cdot \varphi_n(z_n)$. Подставив данную функцию в (13) и деля это уравнение на T , получим [7]:

$$ds = \frac{dw}{T} = c_1 \cdot \frac{\varphi_1'(z_1)}{\varphi_1(z_1)} dz_1 + c_2 \cdot \frac{\varphi_2'(z_2)}{\varphi_2(z_2)} dz_2 + \dots + c_n \cdot \frac{\varphi_n'(z_n)}{\varphi_n(z_n)} dz_n. \quad (14)$$

Считая величины c_k в окрестности точки M постоянными и интегрируя уравнение (14), представим общий интеграл в виде:

$$s - s_0 = c_1 \cdot \ln\left(\frac{\varphi_1(z_1)}{\varphi_1(z_{10})}\right) + c_2 \cdot \ln\left(\frac{\varphi_2(z_2)}{\varphi_2(z_{20})}\right) + \dots + c_n \cdot \ln\left(\frac{\varphi_n(z_n)}{\varphi_n(z_{n0})}\right). \quad (15)$$

где $s_0, z_{10}, \dots, z_{n0}$ – параметры опорного состояния.

Определим общий интеграл s как *энтропию*, исходя из аналогий с термодинамикой. Энтропия является характеристической функцией пространства состояний системы. Далее показано, что аналогичные результаты могут быть получены в случае, когда функция T будет представлена произвольной однородной функцией.

В работе [1, стр. 225] также доказано, что на основе полученных результатов, как следствие, может быть сформулирован закон сохранения энергии для многих переменных, для которого уравнение сохранения энергии, принятое в термодинамике, является частным случаем при количестве исходных параметров равным двум. Также для случая двух переменных (для давления и удельного объема) как следствия выводятся все основные уравнения, используемые в термодинамике.

Таким образом, в зависимости от существующих эмпирических мер w , которые характеризуют состояния системы, различные виды энтропий состояния определяются зависимостью (15). В параметрическом представлении энтропия является длиной дуги векторной линии некоторого поля направлений, порождаемого скалярным полем эмпирической меры состояния системы w [1].

Из всего сказанного выше следует важный вывод, что для каждой эмпирической

меры, характеризующей состояния той или иной системы, будет существовать понятие специфического вида энтропии. Именно в этом заключается сущность представлений об различных видах энтропий в разных областях знаний, например, термодинамической, статистической, информационной и т.д.

Принцип существования энтропии в каждом конкретном случае имеет свою определенную область применения. Во-первых, понятие энтропии распространяются только на процессы, которые могут наблюдаться в опыте. Исходя из этого, бессмысленно этот принцип распространять на области, где отсутствуют опытные данные (негативный пример – известный вывод о тепловой смерти Вселенной). Во-вторых, понятие энтропии распространяется только на процессы и явления, для которых справедливо существование некоторой эмпирической меры для комплексной оценки состояний системы. И, наконец, область применения принципа ограничена эволюционными процессами, которым свойственны более или менее медленные, постепенные изменения в состоянии систем. Для систем, у которых нарушается однородность и непрерывность пространства состояний и непрерывность поля эмпирической меры, энтропия не определяется.

Следует отметить, что данные выводы справедливы не только для физических систем, но и для биологических, экологических и социальных систем. Если существует опытный факт того, что для некоторой системы можно выдвинуть гипотезу существования эмпирической меры как некоторой комплексной функции, то возможно обоснование принципа существования определенного вида энтропии и установление закономерностей, которые характеризуют изменение состояний этой системы. Поэтому научная значимость данного метода связана с возможностью построения феноменологических моделей для систем различной природы.

Закон возрастания энтропии

В науку понятие энтропии и принцип ее возрастания внесены Р. Клаузиусом почти полтора века назад [25]. Данное логическое обоснование проблемы, выполненное Р. Клаузиусом, было проанализировано проф. В. Эткиным в работе [26] и приведено в следующей сжатой и наглядной форме.

Известно, что все макроскопические системы, обладающие термической степенью свободы, стремятся к равновесию. Чтобы найти математическое выражение этой закономерности, основоположник термодинамики Р. Клаузиус разбивает произвольный цикл тепловой машины рядом

изотерм и адиабат на бесконечное число элементарных циклов Карно с температурами подвода и отвода тепла T' и T'' и элементарными количествами подведенного и отведенного тепла $\delta Q'$ и $\delta Q''$ [25]. Выражая затем известным образом термический к.п.д. цикла Карно через эти температуры в виде $\eta_k = 1 - \frac{T''}{T'}$ и, полагая само собой разумеющимся, что термический к.п.д. η любой необратимой тепловой машины $\eta = 1 - \frac{\delta Q''}{\delta Q'}$ меньше, чем в обратимом цикле Карно η_k (при тех же значениях температур T' и T'' в цикле), он приходит к неравенству:

$$\eta = 1 - \frac{\delta Q''}{\delta Q'} < \eta_k = 1 - \frac{T''}{T'}. \quad (16)$$

Отсюда следует, что $\frac{\delta Q'}{T'} < \frac{\delta Q''}{T''}$, т.е. сумма приведенных теплот $\oint \frac{\delta Q}{T}$ в цикле необратимой машины меньше, чем в обратимой, где $\frac{\delta Q}{T} = ds$, а $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$. Поэтому как следствие имеем для необратимой машины $\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$.

Отсюда Р.Клаузиус делает вывод, что в необратимых процессах изменение энтропии $ds > \frac{\delta Q}{T}$, т.е. в изолированных системах (где $\delta Q = 0$) энтропия возрастает при протекании в ней любых необратимых процессов: $ds > 0$.

Именно так возник принцип возрастания энтропии. Не видя ограничений этого принципа, Р. Клаузиус не только возвел его в ранг второго закона термодинамики, но и экстраполировал данный принцип на всю Вселенную. Так появилась его крылатая фраза: «Энергия Вселенной неизменна. Энтропия Вселенной возрастает».

Из приведенного выше вывода видна противоречивость доказательства данного принципа. Во-первых принцип получен путем логических обобщений некоторых представлений, связанных с работой тепловых машин, причем без какого-либо обоснования принято, для необратимых процессов возможно применение понятия энтропии, как функции состояния термодинамической системы. Во-вторых, априори данный принцип распространен на все тепловые процессы во Вселенной, чем явно нарушаются принципы термодинамики как феноменологической науки. В третьих, самое главное, исходный вывод Р. Клаузиуса не опирается на опытные данные и энтропия экспериментально не определяется. Если полтора века назад данный вывод отражал

прогрессивную идею в науке, то по истечении этого времени логическая последовательность выводов Р. Клаузиуса совершенно не убеждает в правильности обоснования второго закона термодинамики, как универсального принципа природы. При этом отметим, что по истечении такого большого периода времени в учебниках так и появились результаты опытного подтверждения данного исторического вывода. Имеются только косвенные обоснования принципа возрастания энтропии, без данных обработки экспериментов для процессов различной природы. И здесь основная проблема заключается в том, каким образом в любом произвольном процессе (не только термодинамическом) по данным опыта оценить энтропию.

В целом, изучение всего логического вывода Р. Клаузиуса, посвященного принципу возрастания энтропии, оставляет осознание явной неудовлетворенности, т.к. стиль изложения качественно отличается от общепринятых научных доказательств в физике, которые опираясь на опыт и феноменологию предметной области формируют новые представления и законы. В данном «сухом» выводе Р. Клаузиуса не ясно, какой физический феномен определяет рост энтропии. Мало того, что энтропия явно в опыте не определяема, ей еще приписывается свойство абсолютной универсальности по отношению к подавляющему большинству процессов и явлений, причем без множественных фактов обработки опытных данных.

Здесь наблюдается та же проблема, что и с принципом «адиабатической недостижимости» К. Каратеодори – исходный принцип дает возможность доказать факт существования энтропии, но в чем физическая сущность этого принципа и как этот принцип может проявляться в опыте абсолютно не ясно.

То, что принцип возрастания энтропии отражает некоторый фундаментальный закон природы сомнению не подвергается, однако обоснование этого закона должно основываться на определенном физическом феномене, для которого характерна некоторая общесистемная закономерность присущая всем наблюдаемым процессам и явлениям. Так же факт возрастания энтропии должен подтверждаться множеством опытов или наблюдений. Отметим, что таким универсальным феноменом может быть только течение времени.

Попробуем обосновать принцип возрастания энтропии с помощью реляционно-полевой модели времени [27]. Идея создания такой модели связана с опытным фактом существования возможности измерения времени. Это позволяет предложить вариант представления феномена времени в виде

многомерного скалярного поля некоторой меры наблюдаемых материальных движений. С этой целью предполагаем, что для описания материальных движений существует некоторая универсальная величина $w = W(z_1, z_2, \dots, z_n)$, которая может быть выражена через параметры свойств объекта (системы) и которая будет тесно связана с эмпирическим временем, измеряемым часами. Особо отметим, что данный подход является феноменологическим, исключающим выход за рамки прямого опыта или наблюдения.

Будем рассматривать объекты и системы различных классов (физические, химические, биологические, социальные и т.д.), которым свойственно многообразие форм материальных движений. В самом общем виде под материальным движением подразумеваем любое наблюдаемое изменение или взаимодействие объектов между собой и окружающей средой. Особо подчеркиваем, что суть любых движений выражается в изменениях состояний объектов.

Любые объекты, процессы и явления необратимо изменяются с течением времени. Поэтому в природе невозможно абсолютно точное и полное повторение состояний наблюдаемых объектов во времени. Это основное суждение, которое априори принимается за фундаментальное объективное свойство феномена времени.

Опытный факт существования возможности измерения времени заключается в том, что когда за произвольным объектом ведется полное наблюдение, то можно говорить, что в определенный момент времени имеется информация обо всех значениях параметров его свойств. При этом наблюдение значения свойства в некоторый момент времени можно рассматривать как исход опыта в виде простого регистрируемого события, одновременное наблюдение нескольких значений различных свойств – как совместное событие.

Для множества существующих и одновременно наблюдаемых объектов этот факт можно представить в виде соотношений:

$$\begin{aligned} \tau &\Rightarrow \{z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \dots, z_n^{(1)}\}; \\ \tau &\Rightarrow \{z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \dots, z_n^{(2)}\}; \\ &\dots\dots\dots \\ \tau &\Rightarrow \{z_1^{(p)}, z_2^{(p)}, \dots, z_n^{(p)}\}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $z_k^{(q)}$ – k -ый параметр свойства q -ого объекта, τ – момент времени наблюдения за объектами, p – количество объектов. Данное соотношение справедливо для любого объекта и любого момента времени, как прошлого, так и настоящего, при условии, что исходные данные о состоянии объекта собирались и

накапливались в процессе наблюдения или опыта. Следует особо отметить, что соотношение (17) справедливо для объектов и систем любой природы.

Данное соотношение вводит логическое отношение между объектами, из которого следует, что в любой момент наблюдения состояние объекта 1 наблюдается одновременно с состоянием объектов 2, 3 и так далее по всем p объектам. Это же можно сказать и о каждом свойстве объектов. В целом это строгое отношение порядка, вытекающее из отношения одновременности, которое удовлетворяет свойствам рефлексивности, транзитивности и симметричности, т.е. является отношением эквивалентности. Факт существования соотношения (17) подтверждается множеством опытных данных по измерениям времени.

Если один из наблюдаемых p объектов использовать как часы и рассматривать значение τ как измеренное время, то условие одновременности наблюдения означает, что всем объектам в каждый момент наблюдения ставится в соответствие некоторое одинаковое значение времени, определенное в соответствии со стандартизированной системой его измерения. Примем условие существования возможности измерения времени как эмпирический факт, который подтверждается опытом и практикой человечества.

Исходя из этого, назовем *эмпирическим временем* τ установленную опытным путем сравнительную меру одновременности событий для процессов материальных движений различных объектов.

Следующим опытным фактом является то, что очень часто один и тот же процесс изменения состояния объекта в зависимости от внешних и внутренних условий может протекать с различной интенсивностью. Для любого объекта и любого его свойства мы всегда можем определить скорость процесса, связанного с материальными движениями. Поэтому, исходя из опытных данных, для q -того объекта в любом наблюдаемом процессе l_z изменения параметра свойства z_k можно задать скорость процесса, которая не обязательно будет постоянной:

$$c_{z_k^{(q)}} = \left(\frac{dz_k^{(q)}}{d\tau} \right)_{l_z}. \quad (18)$$

Возможность определения в опыте величины $c_{z_k^{(q)}}$ приводит к обобщенному феноменологическому наблюдению. Этот важный опытный факт, вытекающий из практики человека, связан с ходом времени, о котором мы образно говорим, что «время течет». Сегодня практически во всех

физических моделях времени данный опытный факт никак не учитывается. Для того, чтобы показать течение измеряемого нами времени необходимо задать некоторую величину, систему отсчета, модельную среду, по отношению к чему можно было бы показать необратимое течение времени. Для каждого определенного класса объектов подобная величина (среда) должна формироваться из опыта. Поэтому, чтобы учесть факт течения времени и возможность задания в совокупности скорости изменения параметров свойств в произвольном процессе, следует использовать гипотезу о существовании некоторой величины w , которая тесно связана с течением эмпирического времени и однозначно в целом характеризует процессы материальных движений для данного класса (классов) объектов. По аналогии с логикой построения термодинамики, где есть понятие количества теплоты, назовем данную величину *количеством материального воздействия* (количество воздействия) и будем считать, что эта величина комплексно связана с изменениями в состояниях объектов при осуществлении различных процессов. Данная величина для описания процессов была введена в термодинамику А. Гухманом [4]. Таким образом, для любого процесса l эмпирические уравнения, связывающие величину количества воздействия w с эмпирическим временем τ , можно представить в виде:

$$c_l = \left(\frac{dw}{d\tau} \right)_l. \quad (19)$$

В каждом конкретном случае по опытным данным необходима проверка гипотезы существования величины w , которая характеризует данный род материального движения, а также разработка системы измерения или оценки этой величины. Отметим, что это не простая задача, требующая накопления множества опытных данных, а также формулировки представлений – на основе каких принципов можно построить систему оценки такой величины. Однако, только после этого и при наличии системы оценки величины w для определенного рода материального движения, можно говорить о возможном определении величин c_l , которые будут в целом отражать темпоральную интенсивность разных процессов в различных условиях и которые являются феноменологическими величинами. Далее покажем, что система оценки количества воздействия может быть связана с определением вероятностей характерных событий.

Рассмотрим некоторую реальную область трехмерного пространства, где расположено множество объектов однородных классов, число

которых равно p и которые находятся в отношениях и связях между собой. Исходя из феноменологического подхода, считаем, что все объекты наблюдаемы в опыте, который является единственно возможной основой для создания и проверки теорий. Для упрощения будем считать, что изучаемое в опыте множество объектов счетное, причем каждый объект может иметь признак, отличающий его от других объектов. Данный признак будем обозначать в виде верхнего индекса в скобках, который будет представлять номер объекта. Пусть каждое состояние любого объекта в самом общем случае характеризуется n независимыми переменными z_1, z_2, \dots, z_n , причем область определения для каждой переменной распространяется на всю положительную числовую ось $z_k(0, \infty)$, а системы измерения переменных стандартизованы. Начало отсчета координат выбирается так, чтобы соответствовать нулевым значениям параметров свойств.

Логическое доказательство закона возрастания энтропии будем основывать на обосновании принципа существования энтропии, которое получено в предыдущем разделе. При этом в качестве эмпирических мер используем количество материального воздействия w и эмпирическое время τ .

Рассматриваем существование объектов только в материальных движениях (состояния объектов должны изменяться с течением времени), причем будем изучать преимущественно естественные процессы, связанные с изменением и развитием объектов. Состояния наблюдаемых объектов однородных классов могут характеризоваться или всеми переменными z_k сразу или только некоторыми из них, причем каждая переменная отражает некоторое атрибутивное свойство изучаемых объектов.

Построим непрерывную среду моделирования в виде пространства координат Ω , где координатные оси соответствуют независимым переменным z_1, z_2, \dots, z_n . Пусть в пространстве Ω имеется замкнутая область Ω_n некоторого множества точек M , каждая из которых соответствует определенному состоянию некоторого объекта, не обязательно наблюдаемого в реальности в опыте. Другими словами, в области Ω_n существует бесконечное множество состояний для некоторой генеральной совокупности объектов.

Так как в опыте мы рассматриваем ограниченное количество объектов, равное числу p , то на начало наблюдений в области Ω_n мы можем отобразить p точек $M^{(q)}$,

каждая из которых соответствует состоянию q -того наблюдаемого объекта. Многомерные наблюдаемые точки являются ограниченной выборкой из данной генеральной совокупности. Любой объект осуществлял некоторый процесс материального движения из прошлого в настоящее, поэтому с течением эмпирического времени τ каждая точка $M^{(q)}$ описывает многомерную кривую. Назовем эту кривую в по аналогии со специальной теорией относительности *мировой линией*. Тогда каждому объекту будет соответствовать своя мировая линия. Свойство необратимости времени и факты наблюдения объектов закономерно приводят к представлениям о непрерывности мировых линий.

Аксиоматическое изложение теории будем основывать на постулировании существования многомерного поля эмпирического времени. Исходя из этого, каждой точке $M(z_1, z_2, \dots, z_n)$ пространства состояний Ω_n поставим в соответствие значение времени τ . Это позволяет ввести аксиомы для эмпирического времени и возможности его скалярного представления в каждой точке пространства Ω_n .

1. Пусть в пространстве состояний Ω_n каждой точке M поставлено в соответствие действительное положительное число τ , которое будем называть эмпирическим временем.

2. Величина $\tau(M)$ является функцией точки и образует скалярное поле, которое является непрерывным и упорядоченным в области Ω_n .

Данные аксиомы отражают опытные факты, которые сегодня связаны с понятием времени и возможностью его измерения. Так как эмпирическое время является функцией точки, то поле величины $\tau(M)$ представляет собой скалярное поле, через каждую точку M которого в пространстве состояний Ω_n проходит только одна поверхность уровня. Во всех точках поверхности уровня значение величины τ является одинаковым и все события привязанные к точкам этой поверхности – одновременны.

Исходя из последовательности регулярных событий часов, все поверхности уровня могут быть пронумерованы в нарастающем порядке – каждой поверхности уровня может быть присвоено значение величины τ , которое возрастает с течением эмпирического времени. Поэтому, в определенной области пространства Ω_n наблюдения, выполненные в шкале эмпирического времени, «присваивают» всем

поверхностям уровня определенные значения величины τ , в зависимости от последовательности регулярных событий, которые генерируются в часах. Этим упорядочиваются состояния и события, которые наблюдаются в изучаемых объектах.

В свою очередь, различные процессы, которые возможны между некоторым произвольным состоянием M и любым другим близлежащим состоянием в области Ω_n , свойственным мировой линии некоторого объекта (например, M и M' , $\tau_{M'} > \tau_M$), будут отличаться между собой по интенсивности осуществления материальных движений. Для того, чтобы логически обосновать возможность осуществления процессов как непрерывного перехода между ближайшими состояниями любого объекта, при построении модели времени необходимо введение новых аксиом.

Исходя из этого, рассмотрим функцию количества материального движения, которую представим в виде $w = W(z_1, z_2, \dots, z_n)$. Предположим, что величина w существует и пока не будем останавливаться на природе этой величины. Просто считаем, что имеется однозначная связь данной величины с фактами наблюдений или опыта, которые отражают результаты материальных движений, связанных с изменениями состояний объектов определенного класса. Также мы вполне можем предложить некоторую систему измерения или оценки этой величины. Данная функция, наряду с эмпирическим временем, также будет отражать особенности осуществления процессов в окрестности любого состояния и характеризовать интенсивность воздействий при изменении состояний объектов во времени.

Изложим аксиомы, связанные с количеством материального движения, в виде.

3. Пусть в пространстве состояний системы Ω_n каждой точке M одновременно с эмпирическим временем τ поставлено в соответствие множество действительных чисел c_l , которые будем называть темпоральностями процессов изменения состояния объектов и которые определяются из опыта.

4. Величины c_l являются функциями процесса. Если в окрестности любой точки M объект осуществляет некоторый процесс материального движения l , то для линии процесса (наблюдаемого отрезка мировой линии) l справедливо соотношение $dw = c_l \cdot d\tau$, причем величину w определим как количество материального воздействия, которое комплексно характеризует интенсивность процессов при изменении состояния объекта во времени. Для величины w может быть предложена система измерения или оценки.

Теперь для построения реляционно-полевой модели представления времени используем гипотезу, что скалярное поле эмпирического времени может быть аналитически описано в окрестности произвольной точки M . Для задания скалярного поля эмпирического времени $\tau = \tau(M)$ как функции независимых переменных z_1, z_2, \dots, z_n необходимо определить функцию точки в виде аналитического выражения. Предположим, что в окрестности любой точки скалярное поле эмпирического времени может быть с достаточной точностью приближено аналитической функцией вида $\tau(M) = t(z_1, z_2, \dots, z_n)$. Функцию $t(z_1, z_2, \dots, z_n)$ при разработке модели следует задать на основе эмпирических данных или тех или иных теоретических предположений.

Далее будем использовать функции $t = t(z_1, z_2, \dots, z_n)$, которые входят в класс однородных аналитических функций и широко используются во многих теоретических областях естествознания.

Определим аналитическую функцию $t = t(z_1, z_2, \dots, z_n)$ как некоторый *абсолютный индекс* пространства состояний Ω_n (или области этого пространства). Известно, что любая однородная функция может быть представлена в виде уравнения Эйлера:

$$\beta \cdot t(z_1, \dots, z_n) = z_1 \cdot \frac{\partial t}{\partial z_1} + \dots + z_n \cdot \frac{\partial t}{\partial z_n}, \quad (20)$$

где β – степень однородности функции t .

С учетом зависимости (19) и аксиомы 4 получим уравнение:

$$\frac{z_1}{\beta \cdot c_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial z_1} + \frac{z_2}{\beta \cdot c_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial z_2} + \dots + \frac{z_n}{\beta \cdot c_n} \cdot \frac{\partial w}{\partial z_n} = \dots = t(z_1, \dots, z_n). \quad (21)$$

При выводе уравнения (21) с учетом зависимости $\tau(M) = t(z_1, z_2, \dots, z_n)$ принято, что

$$\frac{\partial w}{\partial z_1} = c_1 \frac{\partial t}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial z_n} = c_n \frac{\partial t}{\partial z_n}.$$

Характеристики квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка (21) определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\beta \cdot c_1 \frac{dz_1}{z_1} = \beta \cdot c_2 \frac{dz_2}{z_2} = \dots = \beta \cdot c_n \frac{dz_n}{z_n} = \dots = \frac{dw}{t} = ds. \quad (22)$$

В общем случае функции темпоральности процессов c_k зависят от параметров свойств z_k .

В свою очередь, уравнение Пфаффа для соотношения (21) будет иметь вид:

$$\frac{z_1}{c_1} dz_1 + \frac{z_2}{c_2} dz_2 + \dots + \frac{z_n}{c_n} dz_n + \beta \cdot t \cdot dw = 0. \quad (23)$$

Для того, чтобы решить поставленную задачу необходимо найти или задать вид абсолютного индекса $t(z_1, z_2, \dots, z_n)$, далее для разных условий определить функцию $w = W(z_1, z_2, \dots, z_n)$, разработать систему измерения величины w для спектров мировых линий определенных классов объектов и потом по опытным данным идентифицировать модель.

Будем считать, что модельное представление времени может быть связано с вероятностями наблюдаемых событий, которые отражают эволюцию объектов и характеризуют процессы, свойственные мировым линиям объектов. Тогда введем в рассмотрение величину t , которая зависит от геометрической вероятности точки многомерного пространства. Распространив зависимость для индекса t на всю область изменения величины, получим:

$$t = \alpha_t \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n}{R}, \quad (24)$$

где $R = z_{10} \cdot z_{20} \cdot \dots \cdot z_{n0}$, α_t – постоянная шкалирования, z_{10}, \dots, z_{n0} – параметры опорного состояния, например, максимально наблюдаемые параметры свойств. Функция (24) является однородной, поэтому для этого случая применение зависимостей (20) – (23) справедливо. Теперь в окрестности любой точки M свяжем количество воздействия w линейной зависимостью со статистической вероятностью w_s событий, наиболее характерных для мировой линии или спектра мировых линий. В этом случае будем иметь:

$$w = \alpha_w \cdot \frac{w_s}{w_{s0}}, \quad (25)$$

где w_s – вероятность наблюдаемых характерных событий; w_{s0} – вероятность событий для условий принятого опорного состояния; α_w – некоторый коэффициент пропорциональности между величинами w и w_s , позволяющий ввести единицу измерений.

Проведя простые преобразования, получим из (22) характеристическую функцию, которую определим как энтропию состояния:

$$s - s_0 = c_1 \cdot \ln\left(\frac{z_1}{z_{10}}\right) + c_2 \cdot \ln\left(\frac{z_2}{z_{20}}\right) + \dots + c_n \cdot \ln\left(\frac{z_n}{z_{n0}}\right), \quad (26)$$

где s_0 – постоянная. Для функции t вида (24) степень однородности β равна n .

При изоэнтропном процессе изменения величины w ($dw = 0, ds = 0$) из уравнения (23)

может быть определена математическая функция U , которую далее будем называть потенциалом пространства состояний Ω_n :

$$U(z_1, z_2, \dots, z_n) - U_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{z_1^2 - z_{10}^2}{c_1} + \frac{z_2^2 - z_{20}^2}{c_2} + \dots + \frac{z_n^2 - z_{n0}^2}{c_n} \right). \quad (27)$$

Таким образом, в вероятностной среде моделирования времени для любой мировой линии объекта при возможности представления ее в параметрическом виде относительно параметров свойств $z_1 = z_1(\tau)$, $z_2 = z_2(\tau)$, ..., $z_n = z_n(\tau)$ и заданного представления эмпирического времени через абсолютный индекс, уравнение (21) может быть решено.

Подход, связанный с созданием вероятностной среды моделирования, широко применяется в термодинамике. Для этого случая величина w является количеством теплоты, абсолютный индекс t – это абсолютная температура, величина τ является эмпирической температурой, а величины c_i – это теплоемкости. Для количества теплоты и температур построены системы измерения этих величин в опыте. Экспериментальные данные позволяют определить по изменениям количества теплоты и температуры значения теплоемкостей c_i для различных термодинамических процессов.

Аналогичным образом могут быть построены феноменологические описания для темпоральных процессов, позволяющие представить время в виде многомерной реляционно-полевой величины.

Предложенный выше подход позволяет исходя из многомерных геометрических представлений логически обосновать принцип возрастания энтропии, если в качестве эмпирической меры рассматривать эмпирическое время. Если взять мировую линию некоторого объекта между двумя ближайшими точками M и M' , то для двух последовательных моментов времени τ и τ' , в связи с тем, что время необратимо и возрастает от прошлого к настоящему, будем иметь $d\tau = \tau' - \tau > 0$. В этом случае длина дуги мировой линии объекта между двумя поверхностями уровня поля эмпирического времени будет равна $d\tau$. При этом через точку M мировой линии проходит кривая характеристики в виде энтропии s и ортогональная ей поверхность потенциала U . Аналогично, через точку M' мировой линии проходит линия характеристики в виде энтропии s' и ортогональная ей поверхность потенциала U' . Энтропия и потенциал являются естественными ортогональными криволинейными координатами в пространстве

состояний Ω_n . Исходя из того, что между точками M и M' длина дуги мировой линии $d\tau > 0$, то и изменение потенциала $dU = U' - U$ тоже будет больше нуля. Так как энтропия является одной из криволинейных координат, то при $d\tau > 0$ и $ds = s' - s$ также будет больше нуля. Поэтому в любом динамическом процессе, который развивается во времени энтропия должна будет возрастать. Однако логически показать это еще не достаточно, для того чтобы признать принцип возрастания энтропии общесистемным законом. Необходимо показать этот факт на множественных примерах обработки опытных данных, связанных с динамическими процессами.

Некоторые направления экспериментального обоснования закона возрастания энтропии

Крайне важным направлением научных исследований является экспериментальное изучение особенностей возрастания энтропии для различных динамических процессов. Получение и обработка данных об изменении естественных процессов во времени позволит установить эмпирические закономерности, свойственные закону возрастания энтропии, а также установить область применения этого закона. Без экспериментального подтверждения принципа возрастания энтропии нельзя считать, что логическое обоснование является справедливым.

Вполне естественно, что подобные экспериментальные исследования должны охватывать самые разнообразные виды процессов, а методика обработки данных должна позволять изучать для объектов и систем различной природы спектры мировых линий по характерным событиям и их характеристическим величинам.

В этом плане видны несколько направлений проверки справедливости принципа возрастания энтропии, которые в экспериментальном плане могут выражаться в:

- поиске связей между количеством материального воздействия w и количеством теплоты Q для различных неравновесных термодинамических процессов;
- изучении количественных особенностей и закономерностей возрастания энтропии для физических и нефизических систем и установлении связи энтропии с вероятностями событий, представленных временными рядами.

Первое направление исследований по обоснованию принципа возрастания энтропии связано с изучением динамических процессов свойственных термодинамическим системам. Обратим внимание, что логика представления

соотношения (21) справедлива для термодинамических систем при изучении тепловых процессов, если в этом соотношении эмпирическое время τ заменить на эмпирическую температуру θ и ввести гипотезы для реляционно-полевого представления количества теплоты и справедливости соотношения $dQ = c_l \cdot d\theta$. Все это указывает на то, что для данного класса систем существует структурно-логическое единство моделей времени с калорическими уравнениями термодинамики. Это может позволить искать связи между количеством воздействия w , которое будет оцениваться по вероятностям событий, связанных с наблюдением состояний систем, и количеством теплоты Q , характерном для определенного процесса. Для термодинамических систем подобная задача сводится к изучению совместных решений дифференциальных уравнений для эмпирической температуры $\theta = \theta(p, v)$ и эмпирического времени $\tau = t(p, v)$ применительно к динамическим процессам изменения состояний термодинамического объекта, например, идеального газа:

$$\frac{p}{\beta_q \cdot c_{v,g}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{v}{\beta_q \cdot c_{p,g}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial v} = g(p, v);$$

$$\frac{p}{\beta_\tau \cdot c_{v,\tau}} \cdot \frac{\partial w}{\partial p} + \frac{v}{\beta_\tau \cdot c_{p,\tau}} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} = t(p, v), \quad (28)$$

где Q – количество теплоты; $c_{p,g}, c_{v,g}$ – теплоемкости процессов; $c_{k,\tau}, c_{p,\tau}$ – темпоральности процессов; p – давление; v – удельный объем.

Соответствующий анализ необходимо проводить по отношению к неравновесным процессам. Здесь уже видно целое новое направление для исследований, которое связано с изучением переноса теплоты в неравновесных динамических процессах, где время релаксации уже является определяющим фактором процесса.

Применительно к идеальным газам такой эксперимент предполагает определение количества движения и количества теплоты при реализации неравновесных процессов переноса тепла в идеальных газах с учетом динамических изменений состояний газов во времени. Цель экспериментальных исследований состоит в изучении возможных связей между переносом теплоты и изменением вероятности состояний систем. Методика проведения эксперимента будет включать в себя определение (измерение) теплоемкостей и темпоральностей различных процессов изменения состояний идеальных газов, контроль в динамике параметров состояний газа (температуры, давления, удельного объема), измерение времени

релаксации процессов между равновесными состояниями газа, определение количества подведенного тепла, оценку количества материального движения, исходя из подобия уравнений (28), изучение связей различных величин и т.д.

В работе [24] для частных случаев получены такие закономерности с использованием экспериментальных данных об энтропии при описании равновесных состояний идеальных газов. Данные уравнения устанавливают связь между количеством теплоты и вероятностью совместных событий наблюдения термодинамических параметров идеальных газов в равновесных условиях. Результаты статьи [24] указывают на то, что такой подход может привести к значимому научному результату. Так как для макроскопических состояний идеальных газов были определены связи термодинамической и информационной энтропии, то следует ожидать установления подобных связей и для различных нестационарных термодинамических процессов.

Второе направление исследований может быть направлено на изучение связи вероятности событий, характеризующих динамические процессы некоторой системы, с энтропией состояния этой системы. Цель таких исследований состоит в построении на основе опытных данных наблюдения временных рядов событий уравнений взаимосвязи «вероятность – энтропия – время». Такой анализ должен вестись по событиям и их характеристическим величинам для множества мировых линий объектов, которые относятся к одному классу и которые представляются в виде спектра реализаций случайных процессов.

Объектами для изучения таких динамических процессов могут являться различные естественные процессы.

Например, используя временные ряды процессов в области климатологии, развития стран мира, демографии, экономики, энергетики, биологии, токсикологии и т.д., можно получить соответствующие уравнения, после чего изучить особенности данных уравнений для различных классов объектов. Например, существует база данных [28], где представлено множество временных рядов различных процессов и явлений. Указанные данные могут использоваться для изучения закономерностей взаимосвязи вероятности событий, энтропии и времени для различных спектров мировых линий при опытном обосновании принципа возрастания энтропии. Покажем как такая обработка данных может быть осуществлена на практике.

Для любого временного ряда событий может быть определена вероятность наблюдения характеристической величины z

этого события, исходя из реализации динамического процесса. Данная вероятность в самом общем случае может быть связана с эмпирическим временем и характеристической величиной z на основе зависимости вероятностного распределения вида $w = W(\tau, z)$.

В случае, если данных достаточно много, вполне можно найти такое распределение в процессе длительного наблюдения за системой.

Анализируя приведенный выше материал, можно утверждать, что математически суть энтропии заключается в следующем. Пфаффовая дифференциальная форма двух переменных для статистической вероятности $dw = W_\tau d\tau + W_z dz$ (здесь $W_\tau(\tau, z)$ и $W_z(\tau, z)$ – функции от τ и z), может быть всегда интегрирована и решением уравнения Пфаффа $dw = 0$ являются кривые однопараметрического семейства на плоскости τ, z : $z = z(\tau, c)$ или $\omega(\tau, z) = C$, где C – константа. В каждой точке плоскости интегральные кривые $\omega(\tau, z) = C$ имеют касательные, которые совпадают с направлением, задаваемым уравнением Пфаффа $\frac{dz}{d\tau} = -\frac{W_\tau}{W_z}$. Для этих кривых должно быть и

$dw = 0$ и $d\omega = 0$, а dw переходит в полный дифференциал $d\omega$ путем деления на интегрирующий делитель.

Известно, что не все уравнения Пфаффа двух переменных интегрируются в квадратурах. Однако, мы рассматриваем реально наблюдаемые в опытах процессы, где параметры свойств измеряемы, поэтому изначально предполагается отсутствие особых точек и особых решений.

Из теории известно [29, стр. 36], что, если уравнение $W_\tau d\tau + W_z dz = 0$ имеет общий интеграл $\omega(\tau, z) = C$ и функция $\omega(\tau, z)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка, то исходное уравнение Пфаффа имеет интегрирующий делитель, т.е. функция dw может быть представлена через полный дифференциал функции $\omega(\tau, z) = C$. Таким образом, постулируя существование величины w в виде скалярного поля, т.е. фактически возможность интегрирования уравнения Пфаффа, мы тем самым удовлетворяем требованиям данной теоремы. Следствием этого является как существование интегрирующего делителя, так и существование общего интеграла исходного уравнения $\omega(\tau, z) = C$.

Можно показать, что одним из общих интегралов уравнения $dw = W_\tau d\tau + W_z dz$ для двух переменных будет энтропия в виде (26). Предположим, что задана некоторая

мультипликативная или однородная среда моделирования $T = T(\tau, z)$, тогда, исходя из принятых ранее аксиом, изменение распределения вероятности будет равно:

$$dw = c_\tau \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau + c_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} dz. \quad (29)$$

В свою очередь, изменение энтропии согласно (15) и (26) будет иметь вид:

$$ds = \frac{dw}{T} = c_\tau \cdot \frac{d\tau}{\tau} + c_z \cdot \frac{dz}{z}. \quad (30)$$

Полученные ранее результаты позволяют установить связь в виде фундаментальной закономерности между энтропией, как характеристической функцией поля вероятности, и эмпирическим временем, как мерой наблюдаемых изменений в состояниях систем. Будем исходить из представления любого общего интеграла ω уравнения $W_\tau d\tau + W_z dz = 0$ и зависимости (30) для энтропии, тогда:

$$dw = P \cdot d\omega = T \cdot ds, \quad (31)$$

где P и T – интегрирующие делители.

Из соотношения (31) следует, что функции $1/P$ и $1/T$ для вероятности состояния системы являются интегрирующими множителями, позволяющими преобразовать данное уравнение в уравнение в полных дифференциалах:

$$d\omega = \frac{dw}{P}; \quad ds = \frac{dw}{T}. \quad (32)$$

Из теории известно [29], что, если $1/T$ – интегрирующий множитель уравнения $dw = W_\tau d\tau + W_z dz$, а $s(\tau, z)$ – соответствующий ему интеграл уравнения, то всякий интегрирующий множитель μ этого уравнения дается формулой:

$$\mu = \frac{1}{T} \varphi(s), \quad (33)$$

где φ – произвольная дифференцируемая функция. Опуская доказательство о существовании зависимости между интегралами исходного уравнения, которое имеется в литературе [например, 29, стр. 38], запишем общую зависимость между величинами ω и s :

$$\omega = \phi(s), \quad (34)$$

где $\phi(s)$ – непрерывно дифференцируемая функция, причем $\phi(s) = \phi'(s)$.

Из уравнений (32) – (34) получаем, что произвольную функцию $\varphi(s)$ можно представить как отношение

$$\varphi(s) = \frac{T}{P} = \frac{d\omega}{ds}, \quad (35)$$

причем подбирая различные множители P , можно получить бесконечное множество функций $\varphi(s)$.

В уравнении (31) величину P можно рассматривать как плотность распределения вероятности $P(\omega)$, поэтому, так как функция $\varphi(s)$ выбирается произвольно, то ее можно подобрать так, чтобы плотность статистической вероятности $P(\omega)$ соответствовала наиболее распространенному и изученному виду распределения, например, нормальному. В этом случае величина ω представляет собой инверсную функцию статистической вероятности, которую называют пробитом. Исходя из этого, можно определить функцию $\varphi(s)$ в виде:

$$\varphi(s) = \frac{d\omega}{ds} = T \frac{d\omega}{d\omega} = T \cdot \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{\omega^2(s)}{2}\right). \quad (36)$$

Из данной зависимости получаем, что $P(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\omega^2(s)}{2}\right)$. При определении функции $P(\omega)$ принято, что распределение статистических данных подчиняется нормальному закону распределения. Естественно, что возможно использование также и других видов модельных статистических распределений или эмпирических распределений, если необходимость этого будет определена опытными данными. В этом случае могут быть использованы другие виды функций $\varphi(s)$.

Если ввести обозначение $\varphi_* = T/P$, то в элементарной окрестности любого состояния системы зависимость для пробита относительно энтропии можно представить в виде:

$$d\omega = \varphi_* \cdot ds = \gamma_1 \frac{d\tau}{\tau} + \gamma_2 \frac{dz}{z}, \quad (37)$$

где величины γ_k равны $\gamma_k = \varphi_* \cdot c_k$. При постоянном значении коэффициента φ_* в окрестности состояния M пробит может быть представлен в виде функции относительно энтропии или в виде логарифмической функции относительно времени эмпирического τ и характеристической величины z :

$$\omega - \omega_0 = \varphi_*(s - s_0) = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot \ln(\tau) + \gamma_2 \cdot \ln(z). \quad (38)$$

Таким образом, в любом элементарном процессе изменения некоторого свойства, представленного временным рядом должна существовать связь между величинами ω и s , как общими интегралами одного уравнения Пфаффа.

Все сказанное выше позволяет теоретически обосновать принятую методику обработки данных, которая широко используется в биологических науках, а также науках, связанных с оценкой опасностей и рисков. Данная методика основана на использовании методов пробит-анализа. В этом

случае статистические вероятности или риски преобразуют в пробиты $\omega = \text{Pr ob}\{-\infty, +\infty\}$ путем применения инверсного преобразования для нормального распределения. После этого функцию пробита подбирают по опытным данным путем нахождения уравнения регрессии относительно степенных функций или логарифмов параметров свойств. Если при такой обработке опытных данных пробит рассматривать как функцию энтропии, то зависимости (29) – (38) теоретически обосновывают существующие эмпирические методы оценки вероятностей и рисков, которые положены в основу анализа данных в токсикологии, радиологии, промышленной безопасности, оценке опасности стихийных явлений, страховании жизни и т.д. Апробация данных методов велась в течении десятилетий и сегодня они являются важной составляющей общей методологии изучения вероятностей событий в природе и обществе.

Применительно к обработке временных рядов событий, связанных с динамическими процессами, может быть предложена методика, заключающаяся в поиске уравнений связи вида:

$$\text{Pr ob}(w) = c_0 + c_1 \cdot \ln\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) + c_2 \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (39)$$

где $w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\text{Pr ob}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ – функция

нормального распределения со средним равным нулю и дисперсией равной единице, а $s_1 = c_1 \cdot \ln(\tau/\tau_0)$ и $s_2 = c_2 \cdot \ln(z/z_0)$ – частные виды энтропий.

Следствием всего сказанного выше является то, что по данным экспериментов или наблюдений общую энтропию можно представить относительно эмпирического времени. Дело в том, что любое изменение функции $w = W(\tau, z)$ в произвольном динамическом процессе, где $z = z(\tau)$ можно представить в виде $dw = \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{d\tau}\right) d\tau$,

поэтому изменение энтропии может быть увязано с изменением эмпирического времени.

Поиск идей экспериментального обоснования принципа возрастания энтропии должен начинаться с изучения систем, на которые течение времени в нашей реальности оказывает наибольшее влияние – это живые системы. В свою очередь, анализ данных следует начинать с построения эмпирических уравнений связи энтропии и эмпирического времени для различных классов живых объектов и систем. Важная особенность этой задачи заключается в том, что такие уравнения не могут основываться на частных эффектах изменения свойств, а должны быть связаны с

наиболее общими, фундаментальными закономерностями систем.

Поэтому, для всего дальнейшего важно, чтобы количественные результаты отличались общностью соотношений для целого ряда живых систем, для которых имеются данные об изменении во времени некоторого общего атрибутивного свойства, характерного события или интервала времени между событиями.

В первую очередь, для нас наибольший интерес представляет выбор характерного события, которое для биологических систем непосредственно отражает течение времени. Одним из таких длительных наблюдаемых событий является факт существования биологического организма, который характеризуется продолжительностью жизни этого организма. Продолжительность жизни определяется двумя событиями – рождением и смертью живого существа. В этом плане продолжительность жизни биологических организмов является удобной временной характеристикой, так как для всех организмов может быть задано общее начало отсчета – момент рождения объекта, от которого определяется продолжительность жизни в виде временного диапазона до момента смерти. Поэтому все множество фактов существования организмов как объектов исследования может быть оценено в одной шкале времени. При этом шкала интервалов эмпирического времени τ преобразуется в шкалу отношений, т.к. существует общее начало отсчета времени – момент рождения объекта. Количественное соответствие между энтропией и эмпирическим временем τ будем устанавливать на основе применения методов пробит-анализа.

Для изучения данных о продолжительности жизни животных воспользуемся наиболее полной на сегодняшний день базой данных по продолжительности жизни позвоночных животных [30]. Нынешняя версия базы включает сведения о 4083 видах позвоночных. База данных охватывает амфибий, рептилий, рыб, птиц и млекопитающих. Для 3750 видов в базу внесены данные о максимальной продолжительности жизни; для многих видов указана масса тела при рождении и во взрослом состоянии, скорость роста и размножения, время полового созревания, продолжительность беременности и т.д. (всего 25 характеристик).

Для начала рассмотрим данные о продолжительности жизни подотряда мышеобразных отряда грызунов, который является одной из самых крупных таксономических единиц среди семейств млекопитающих (10 семейств, около 120 родов и примерно 400÷500 видов). Грызуны распространены по всему миру, за исключением

Антарктиды. На рисунке 1, а для подотряда мышеобразных представлена реализация принципа установления связи между вероятностью и энтропией состояния.

В свою очередь, уравнение, которое устанавливает количественное соответствие между энтропией, определяемой через вероятность состояния системы, и эмпирическим временем, имеет вид:

$$\text{Pr ob} = -2,107 + 1,993 \cdot s; \quad s = \ln\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right), \quad (40)$$

где Pr ob определен с учетом зависимости (39) по значению статистической вероятности w , характеризующей распределения опытных данных о продолжительности жизни 234 видов мышеобразных. Энтропия определена по факту равномерного распределения опытных данных, исходя из известной формы информационной энтропии в представлении Хартли и термодинамической энтропии в представлении Больцмана $s = k \cdot \ln(\rho)$, на основе применения понятия геометрической вероятности $\rho = \tau/\tau_{\max}$, которая пересчитана относительно опорного состояния, т.е. $s = k \cdot \ln(\tau/\tau_0)$. При расчетах продолжительность жизни τ задавалась в минутах, коэффициент k принимался равным единице. В качестве опорного состояния использовались характеристики наиболее изученного вида мышеобразных – белых мышей. Средняя продолжительность жизни белых мышей (самцов) принята 24 месяца ($\tau_0 = 1036800$ мин). Коэффициент корреляции зависимости (40) составляет 0,989.

Из базы данных [30] можно извлечь данные для самых различных отрядов животных. Например, белкообразные составляют самый древний подотряд грызунов и включают в себя несколько сотен видов. В базе данных имеется информация для 90 видов белкообразных.

На рисунке 1, б для белкообразных приведено уравнение связи между вероятностью и энтропией состояния, которое имеет вид:

$$\text{Pr ob} = -4,130 + 2,566 \cdot s. \quad (41)$$

Энтропия также находилась по факту равномерного распределения опытных данных, исходя из представления $s = \ln(\tau/\tau_0)$. Коэффициент корреляции зависимости (41) составляет 0,993.

Интересно изучение данных о продолжительности жизни отряда приматов, к которым относится и человек. На рисунке 1, в показаны результаты оценки зависимостей для этого случая. Уравнения, которые устанавливают количественное соответствие

между величинами имеют вид:

$$Prob = -7,197 + 2,700 \cdot s. \quad (42)$$

Коэффициент корреляции зависимости (42) равен 0,987. Данные уравнения характеризуют распределения данных о продолжительности жизни 150 видов приматов.

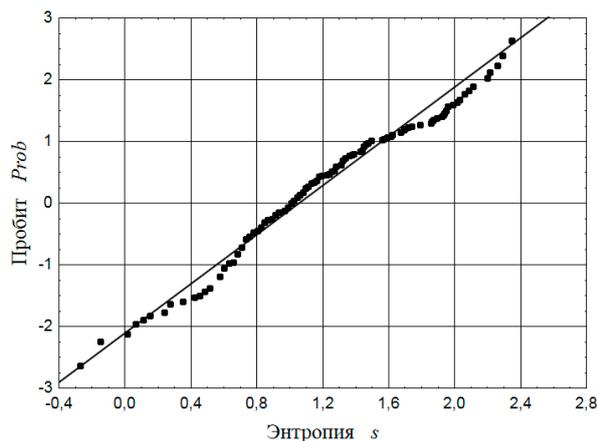
Рассмотрим теперь данные о продолжительности жизни всех видов животных, которые входят в классы амфибий, рептилий, рыб, птиц и млекопитающих. На рисунке 1, г представлена обработка данных при построении уравнений связи вероятности и

энтропии для 3750 видов животных, представленных в базе данных [30].

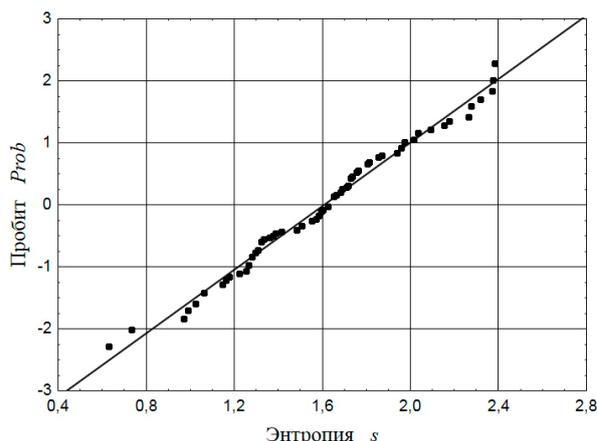
В данном случае уравнения, которые устанавливают количественное соответствие между величинами, при не равномерном и равномерном распределении событий, характеризующих продолжительность жизни животных, имеют вид:

$$Prob = -2,586 + 1,293 \cdot s. \quad (43)$$

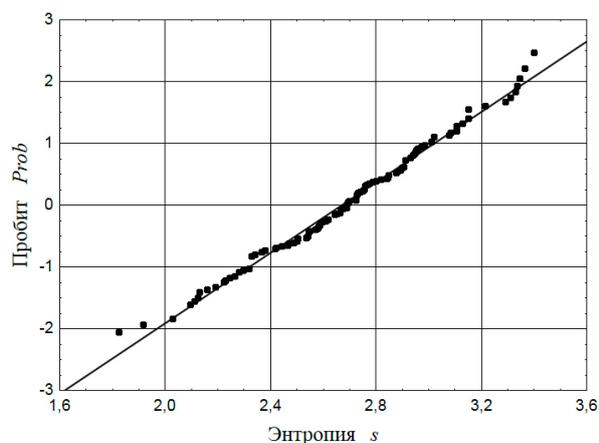
При этом коэффициент корреляции зависимости (42) равен 0,994.



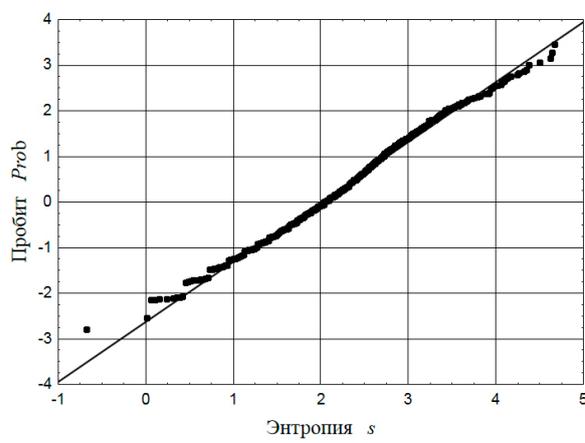
а)



б)



в)



г)

Рис. 1. – Зависимость статистической вероятности распределения продолжительности жизни животных от информационной энтропии состояния:
а) мышеобразные; б) белкообразные; в) приматы; г) все позвоночные животные.

Из данных рисунка 1 видно, что между пробитом, определенным по статистической вероятности событий, и энтропией, которая определяется через логарифм эмпирического времени, существуют практически линейные зависимости. Только при значениях вероятностей, близких к нулю и к единице, могут наблюдаться незначительные отклонения

На основе приведенных уравнений можно определить функцию статистической энтропии в виде $s = k \cdot \ln(\tau/\tau_0)$, которая будет

отличаться от пробита только постоянной в уравнениях (40) – (43). При этом в зависимостях статистической энтропии для мышеобразных, белкообразных, приматов и всех животных в целом соответствующие коэффициенты k будут равны: $k_1 = 1,993$; $k_2 = 2,566$; $k_3 = 2,700$ и $k_4 = 1,293$.

Из полученных данных видно, что изменение статистической энтропии при изменении времени жизни животных равно

$ds = k \cdot \frac{d\tau}{\tau}$. Так как величины τ и $d\tau$ больше нуля и коэффициенты k_i в рассматриваемых случаях также больше нуля, то $ds > 0$. Поэтому в данных процессах энтропия возрастает.

Предложенный подход позволяет установить взаимосвязи статистической энтропии событий с эмпирическим временем и открывает возможности для опытного обоснования закона возрастания энтропии, исходя из изучения различных динамических процессов.

Выводы

Таким образом, как видно из данной статьи, представления о разных видах энтропий, которые имеются в целом ряде областей знаний, связаны с существованием различных эмпирических мер w , комплексно характеризующих состояния той или иной системы. Согласно (22) энтропия является векторной линией, направление которой в точке M совпадает с направлением вектора $\vec{A} = \frac{z_1}{\beta \cdot c_1} \vec{k}_1 + \dots + \frac{z_n}{\beta \cdot c_n} \vec{k}_n$, где \vec{k}_k – единичные векторы координатных осей z_k . Поэтому в параметрическом представлении энтропия является длиной дуги векторной линии этого поля направлений, порождаемого скалярным полем эмпирической меры w . В свою очередь, легко показать, что вектор \vec{A} является градиентом потенциала $U(z_1, z_2, \dots, z_n)$, который представляется в виде (27).

Следствием сказанного выше является то, что принцип существования энтропии, представляет собой независимое положение, которое не связано с законом возрастания энтропии. Факт возрастания энтропии в любом динамическом процессе может быть обоснован использованием универсальной эмпирической меры, которая характеризует поведение систем различной природы. В качестве такой эмпирической меры может выступать только время. Необратимое течение времени и принцип существования энтропии дают возможность логически обосновать закон возрастания энтропии.

В статье сделана также попытка обработки опытных данных динамических процессов с целью установления эмпирических уравнений связи между фактом возрастания энтропии и течением времени. Использование данной методики позволит эмпирически обосновать закон возрастания энтропии для различных классов систем и установить особенности роста энтропии при осуществлении динамических процессов и область применения этого фундаментального закона.

Следует также подчеркнуть, что полученные в данной статье выводы основываются на общесистемных представлениях, которые сформулированы в рамках системодинамики – науки о закономерностях процессов изменения и развития систем во времени. Системодинамика позволяет развить феноменологические методы термодинамики [1, 2]. Поэтому научная значимость метода системодинамики, связана с также возможностью построения феноменологических моделей для систем различной природы.

Литература

1. Аверин Г.В. Системодинамика. – Донецк: Донбасс, 2014. – 405 с.
2. Аверин Г.В. Системодинамика: наука о закономерностях процессов изменения и развития систем во времени. – Palmarium Academic Publishing, 2014. – 488 с.
3. Путилов К.А. Термодинамика. – М.: Наука, 1971. – 375 с.
4. Гухман А.А. Об основаниях термодинамики. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 383 с.
5. Каратеодори К. Об основах термодинамики. – В кн.: Развитие современной физики: Пер. с нем. – М.: Наука, 1964. – С. 188 – 222.
6. Афанасьева-Эренфест Т.А. Необрати-мость, односторонность и второе начало термодинамики // Журн. прикл. физики, т. 5, 1928, вып. 3 – 4. – С. 3 – 28.
7. Франкфурт У. К истории аксиоматики термодинамики. – В кн.: Развитие совр. физики: Пер. с нем. – М.: Наука, 1964. – С. 257 – 292.
8. Шиллер Н.Н. О втором законе термодинамики и одной новой его формулировке. – К.: Типография ун-та, 1898. – 12 с.
9. Борн М. Критические замечания по поводу традиционного изложения термодинамики. – В кн.: Развитие современной физики: Пер. с нем. – М.: Наука, 1964. – С. 223 – 256.
10. Петров Н., Бранков Й. Современные проблемы термодинамики. – М.: Мир, 1986. – 285 с.
11. Gyarmati I. On the Fundamentals of Thermodynamics. – Acta Chim. Hung., 30, 147, 1962.
12. Falk G. und Jung H. Axiomatik der Thermodynamik // Hdb. Phys. III/2, Berlin, 1959. – pp. 119 – 175.
13. Falk G. Die Rolle der Axiomatik in der Physik, erläutert am Beispiel der Thermodynamik // Die naturwissenschaften, 46, 1959, no.16. – pp. 480 – 486.
14. Landé A. Axiomatische Begründung der Thermodynamik durch Caratheodory // Handbuch der Physik, 9, 1926. – pp. 281 – 300.

15. Landsberg P.T. Main Ideas in the Axiomatics of Thermodynamics // Pure and Appl. Chem., 22, 215, 1970.
16. Landsberg P.T. On Suggested Simplification of Caratheodory's Thermodynamics // Phys. Stat. Solidi, 1, 120, 1961.
17. Lieb E.H., Yngvason J. The physics and mathematics of the second law of thermodynamics // Physics Reports, Vol. 310, № 1, Elsevier, 1999. – pp. 1 – 96.
18. Sears F.W. Simplified Simplification of Caratheodory's Treatment Thermodynamics // Am. J. Phys., 41, 2979, 1964.
19. Zemansky M.W. Kelvin and Caratheodory – a Reconciliation // Am. J. Phys., 22, 371, 1970.
20. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. – М.: Иностранная литература, 1955. – 482 с.
21. Белоконь Н.И. Основные принципы термодинамики. – М.: Недра, 1968. – 110 с.
22. Кричевский И.Р. Понятия и основы термодинамики / Изд. 2-е, пересмотр. и доп. – М.: Химия, 1970. – 440 с.
23. Кирилин В.А., Сычев В.В., Шейндлин А.Е. Техническая термодинамика. – М.: Энергия, 1974. – 448 с.
24. Аверин Г.В., Звягинцева А.В. Взаимосвязь термодинамической и информационной энтропии при описании состояний идеального газа // Системный анализ и информационные технологии в науках о природе и обществе, Донецк: ДонНТУ, № 1(4)–2(5), 2013. – С. 26 – 38.
25. Clausius R. Die mechanische Wärmetheorie. Draundschweig, Bd.I, 1876.
26. Эткин В.А. О недоказуемости принципа возрастания энтропии в рамках равновесной термодинамики. http://samlib.ru/e/etkin_w_a/
27. Аверин Г.В. Реляционно-полевая модель представления времени // Системный анализ и информационные технологии в науках о природе и обществе. Донецк: ДонНТУ, № 1(4)–2(5), 2013. – С. 11 – 25.
28. База данных временных рядов. Электр. ресурс URL: <https://www.quandl.com> (12.04.15).
29. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Еругин Н.П., Штокало И.З и др. – К.: Вища школа, 1974. – 472 с.
30. The Animal Ageing and Longevity Database. <http://genomics.senescence.info/species/>

Аверин Г.В. «Про принцип існування та закон зростання ентропії в світлі загальносистемних уявлень системодинаміки». З використанням загальносистемних уявлень системодинаміки зроблена спроба аналізу одного з основних положень сучасної науки – поняття ентропії. На прикладі аксіоматичних методів викладу термодинамічних основ, запропонованих Н. Шиллером, Г. Фальком, К. Каратеодорі, Т. Афанасьєвою-Еренфест, а також використання класичного методу Р. Клаузіуса, показано логічні підходи, які дозволили обґрунтувати принцип існування та закон зростання ентропії. Сформульовано основні дослідні факти, на основі яких можна провести аксіоматизацію термодинаміки, і запропоновано кілька напрямків у вирішенні даної проблеми. Описаний в статті аксіоматичний підхід обґрунтування принципу існування ентропії відрізняється використанням безперервного простору та застосуванням поняття емпіричної міри, яка комплексно характеризує стан системи. Виконано логічне обґрунтування закону зростання ентропії, виходячи з зв'язку даної величини з часом. Проаналізовано деякі напрямки досліджень, які можуть дозволити провести експериментальне обґрунтування закону зростання ентропії для деяких систем на основі вивчення динамічних процесів різної природи.

Ключові слова: системодинаміка, принцип існування і закон зростання ентропії, теоретичні та дослідні обґрунтування, феноменологія і логіка проблеми.

Averin G.V. “On the principle of existence and the law of increase of entropy in the context of general-system representations of a system dynamics”. The attempt of the analysis of one of basic positions of modern science – concept of entropy is made with use of general-system representations of a system dynamics. The logical approaches which have allowed to prove the principle of existence and the law of increase of entropy are shown on the example of axiomatic methods of a statement of the thermodynamic bases offered by N. Schiller, G. Falk, K. Caratheodory, T. Afanasyeva-Erenfest and also of using of a classical method of R. Clausius. The basic skilled facts on the basis of which it is possible to carry out axiomatization of thermodynamics are formulated, and also several directions in the solution of this problem are offered. The axiomatic approach of justification of the principle of existence of entropy, described in the article, differs in use of continuous space of states and application of concept of an empirical measure which in a complex characterizes a condition of system. Logical justification of the law of increase of entropy is executed, proceeding from communication of this value with time. Some directions of researches which are able to allow to carry out experimental justification of the law of increase of entropy for some systems are analysed on the basis of studying of various dynamic processes.

Keywords: system dynamics, principle of existence and law of increase of entropy, theoretical and skilled justifications, phenomenology and logic of a problem.

Статья поступила в редакцию 20.06.2015
Рекомендована к публикации канд. техн. наук А.Я. Аноприенко

УДК 001.51:122

Системодинамика техносферы: как измерить технический прогресс

Аноприенко А.Я.

Донецкий национальный технический университет
anoprien@gmail.com

Аноприенко А.Я. «Системодинамика техносферы: как измерить технический прогресс». Системодинамика техносферы может рассматриваться как сочетание периодических и экспоненциальных закономерностей роста. Основой периодической составляющей может служить модифицированная концепция волн Кондратьева. Суть модификации при этом заключается в привязке волн к 50-летним периодическим колебаниям с переменной амплитудой в пределах 500-летних периодов. Анализ большого объема реальных исторических данных подтверждает целесообразность и достаточную продуктивность такой модели как минимум при рассмотрении развития техносферы на протяжении последнего тысячелетия. Экспоненциальную составляющую предложено количественно оценивать на базе универсального показателя скорости роста S . При этом в качестве базовой шкалы предлагается использовать ту же шкалу, которая используется для описания различных закономерностей роста ноотехносферы. Это позволяет наглядно сравнивать интенсивность процессов развития в различных областях техники с интенсивностью прогресса в компьютерных технологиях, где в настоящее время наблюдаются самые высокие и устойчивые темпы роста.

Ключевые слова: системодинамика, техносфера, периодические процессы развития, экспоненциальный рост, закономерности развития технических систем, скорость технического прогресса, обобщенный закон Мура

Введение

Данная публикация может рассматриваться как непосредственное продолжение работы [1] по системодинамике ноотехносферы, а также как дальнейшее развитие и обобщение результатов, представленных в работах [2 – 16].

Как показано в работе [1], ноотехносфера, т.е. «разумная» составляющая техносферы, формируемая множеством взаимосвязанных компьютерных систем и размещенных на них информационных ресурсов, характеризуется беспрецедентными темпами роста (преимущественно экспоненциального). В последнее время популярными стали сравнения типа «если бы авиационные (и/или автомобильные, и/или космические) технологии развивались бы такими же темпами, как компьютерные, то...», которые демонстрируют колоссальную разницу в темпах роста компьютерных технологий по сравнению с более традиционными областями техники. Естественно, что в случае необходимости конкретной оценки темпов роста и их прогнозирования, необходимы существенно более точные данные о темпах развития, которые позволили бы с достаточной степенью точности сравнивать, оценивать и прогнозировать прогресс в различных отраслях техники. При этом представленные в работе [1] данные и зависимости, касающиеся в первую очередь компьютерных технологий, целесообразно рассматривать в качестве основы

для сравнительного анализа ввиду их достаточной детальности, изученности и особого их значения, так как они характеризуют наиболее интенсивно развивающуюся на сегодня отрасль техники.

Другими словами, обобщая закон Мура применительно не только к компьютерными технологиями, но и ко всем отраслям техники и технологий, необходимо получить максимально общее и универсальное средство оценки технического прогресса во всех его проявлениях, что и является целью данной статьи.

Техносфера и ноосфера

Понятия техносфера и ноосфера сформировались на протяжении XX века благодаря преимущественно трудам А.Е. Ферсмана [16 – 17] и В.И. Вернадского [18 – 20]. Термином «техноценоз» академик А.Е. Ферсман еще в начале в 20-х годов XX столетия обозначил среду обитания, которую формирует человек, используя разум и пользуясь искусственными орудиями труда [16]. В дальнейшем, к началу 30-х годов, в рамках исследований по геохимии техногенеза, который он определял как совокупность химических и технических процессов, производимых деятельностью человека, им были получены некоторые сравнительные оценки технического прогресса, выраженные в росте ежегодного потребления различных полезных ископаемых за столетний период (с

1800 года по 1900 год). Он, в частности, отмечает, что объем добычи многих металлов вырос с чисел с тремя нулями до чисел с 6-ю нулями (в тоннах), т.е. в тысячу раз за столетие. Проанализировав рост ежегодного потребления различных металлов за 100-летний период, А.Е. Ферсман выделил 4 варианта роста: максимальный (в 200 – 1000 раз – алюминий, медь и др.), быстрый (в среднем в 50 – 60 раз – железо, никель и др.), медленный (в среднем в 15 – 40 раз – свинец и др.) и задержанный (с темпами роста менее чем на порядок за 100 лет – золото и др.) [17, с. 717].

Определение темпов роста потребления в совокупности с оценкой общих запасов полезных ископаемых позволило сформировать целый ряд прогнозов. Например, был определен первый предел роста, обусловленный исчерпанием разрабатываемых на начало 30-х годов месторождений (60 лет для железа, 75 лет для угля и других углеродов), и второй предел, определенный исходя из исчерпания всех запасов ископаемых, находящихся в верхнем доступном для добычи двухкилометровом слое земной коры (чуть более 400-т лет для железа и 200 лет для угля) [17, с. 733]. Следует отметить, что современные оценки предстоящих возможностей добычи полезных ископаемых несущественно отличаются от оценок полученных А.Е. Ферсманом. Фактически, это была одна из первых попыток оценить динамику того, что позднее назовут «техносферой» и сделать на этой основе некоторые прогнозы.

Учитель А.Е. Ферсмана академик В.И. Вернадский пошел еще дальше и к середине 40-х годов сформулировал концепцию постепенного перехода человечества в ходе научного и технического прогресса к стадии ноосферы – сферы Разума [18 – 20].

В настоящее время концепция развития цивилизации выглядит примерно следующим образом: с появлением жизни на Земле и ее распространением практически по всей земной поверхности миллиарды лет назад сформировалась биосфера, которая с появлением человека начала все интенсивней подвергаться освоению и воздействию с его стороны, что привело к формированию на протяжении последних тысячелетий техносферы. На протяжении последнего столетия по мере освоения электричества начала формироваться своего рода нервная система техносферы, процесс становления которой резко ускорился с середины XX века в связи с появлением компьютерных технологий. К рубежу тысячелетий фактически сформировался первый вариант технического воплощения концепции ноосферы и в виде современной инфраструктуры Интернет. Точнее, эту техническую

составляющую ноосферы, являющуюся одновременно нервной системой и «разумной» составляющей техносферы, целесообразно обозначить как ноотехносферу, системодинамика развития которой была рассмотрена в работе [1].

В целом весь процесс развития от формирования биосферы и до становления ноосферы представляется единым и подчиняющимся некоторым общим закономерностям. Это вполне согласуется с идеями универсального эволюционизма и, в частности, с гипотезой академика Моисеева Н.Н. о Суперсистеме, суть которой можно свести к утверждению, что вся Вселенная представляет собой некую единую развивающуюся взаимосвязанную систему [21 – 23], динамика развития которой определяется единой системой закономерностей. К этому склоняется все большее количество исследователей (см., например, работу [24]).

Интерпретируя системодинамику как науку о закономерностях процессов развития и изменения сложных систем во времени [25 – 28] и рассматривая техносферу как единую сложную систему, частью которой является ноотехносфера, определим некоторые из наиболее общих закономерностей, описывающих и/или определяющих системодинамику техносферы.

Периодическая составляющая

Если рассматривать столетние и более длительные интервалы времен, то в общем случае системодинамика техносферы определяется сочетанием периодических и экспоненциальных процессов развития.

Периодическая составляющая – это в первую очередь волны Кондратьева или К-волны [29 – 32], исследование которых применительно к циклам экономической конъюнктуры было начато Н.Д. Кондратьевым практически одновременно с исследованиями А.Е. Ферсмана по динамике техносферы.

В последующем было выявлено, что влияние К-волн носит существенно более универсальный характер, чем представлялось в начальный период исследований. При этом было высказано предположение, что именно волны Кондратьева являются одним из наиболее значимых факторов, определяющих динамику ноосферы, в связи с чем предложено рассматривать их как частный случай нооритмов, спецификой которых является привязка к фиксированной 50-летней периодичности самих волн и к 500-летнему периоду изменения их амплитуды [11 – 15].

Как показывает анализ большого массива исторических данных самого различного характера, именно такая достаточно простая

модель наиболее адекватно описывает динамику длинных волн применительно к самым различным областям человеческой деятельности, в том числе применительно к динамике технического прогресса.

На рисунке 1 представлена своеобразная модель периодической составляющей системодинамики техносферы в виде последовательности К-волн (K_1, \dots, K_6) с возрастающей амплитудой, что приводит на гребне 5-й волны (на рубеже тысячелетий в ходе информационно-компьютерной революции) к переходу техносферы на качественно новый уровень, определяемый формированием глобальной информационно-компьютерной инфраструктуры. В соответствии с данной моделью в последующие столетия предполагается некоторое затухание амплитуды К-волн, а затем – новая «раскачка» для перехода на следующий качественный уровень.

Детальный анализ показывает, что наиболее простой из достаточно адекватных реальности моделей такого рода является модель, основанная на концепции нооритмов [11 – 15]. В соответствии с этой моделью период К-волн принимается точно соответствующим 50-ти годам, а период изменения их амплитуды составляет ровно 500 лет. Как показывает анализ многочисленных эмпирических данных для отдельно взятых периодов наблюдаются некоторые отклонения, но на больших промежутках времени, соизмеримых с продолжительностью всей истории цивилизации, такие округленные значения являются вполне приемлемыми и, как представляется, наиболее адекватными. Этот факт можно назвать парадоксом круглых чисел, который может быть поставлен в один ряд с парадоксом антропности [33] и может найти свое объяснение в контексте идей, ассоциируемых с космоантропным принципом [34].

Рассмотрим основные особенности данной модели применительно к 2-м столетиям эпохи индустриальных революций (рис. 1).

Во-первых, отметим, что в периоды положительных полуволн происходит интенсификация созидательных процессов, определяющих развитие техносферы. Эти периоды принято называть первой промышленной революцией (ПР1), второй промышленной революцией (ПР2), научно-технической революцией (НТР), информационно-компьютерной революцией (ИКР). Предстоящая 6-я К-волна будет, скорее всего, революцией нарастающей интеллектуализации окружающей среды (ноо-составляющая), развития «высоких» и «тонких» биотехнологий (био-составляющая) и тотального освоения наномасштабов (нано-составляющая).

В целом ее можно будет, по всей видимости, назвать НооБиоНано или НБН-революцией.

Во-вторых, всю эпоху революционных изменений в технике, начавшуюся на рубеже XVII и XIX столетий, можно рассматривать как смену различных поколений индустриальных по своей сути революций (ИР): 1.X – революции пара, 2.X – революции электричества и двигателей внутреннего сгорания, 3.X – информационно-компьютерные революции.

В-третьих, по мере нарастания амплитуды К-волн, количество и интенсивность экспоненциальных процессов роста различных составляющих техносферы также заметно возрастают.

В-четвертых, отрицательные полупериоды К-волн могут рассматриваться как переходные, когда развитие в целом не останавливается, но существенно замедляется на фоне значительного переосмысления происходящих процессов, сопровождаемого зачастую сменой парадигм, приоритетов и ценностей.

Следует отметить, что аналогичная динамика наблюдается и для предыдущей эпохи нарастания амплитуды К-волн – эпохи Возрождения (рис. 2). В истории этого периода в развитии цивилизации достаточно отчетливо прослеживаются первая и вторая волна Проторенессанса (ПР1 и ПР2 – соответственно В1.0 и В1.5), первая и вторая волна раннего Возрождения (РВ1 и РВ2 – соответственно В2.0 и В2.5), волна Высокого Возрождения (ВВ – В3.0) и волна Позднего Возрождения (ПВ).

В качестве символа первой волны Проторенессанса (ПР1) на рисунке 2 представлен кафедральный собор Флоренции Санта-Мария-дель-Фьоре, строительство которого началось в 1296 году. После завершения постройки в 1434 году он оставался самым большим в Европе (в нём может разместиться примерно 30 тысяч человек) вплоть до завершения строительства в XVII веке собора Святого Петра в Ватикане вместимостью около 60-ти тысяч человек. Санта-Мария-дель-Фьоре можно в определенной степени считать и символом всей эпохи Возрождения.

Символом второй волны Проторенессанса (ПР2) стало в первую очередь распространение в Европе огнестрельного оружия, в корне изменившего методы ведения войны и положившего начало столетиям артиллерийской гонки вооружений. Считается, что начало этому было положено в 1346 году в ходе Столетней войны в битве при Креси, где немецкий монах и алхимик Бертольд Шварц, которому позднее приписали изобретение пороха, руководил первой полевой батареей артиллерии английской армии, состоящей из трех орудий. К

1350 г. огнестрельное оружие распространилось во всех странах Европы.

Одними из главных символов раннего Возрождения (РВ) вполне могут быть бумага и книгопечатание. Бумага стала относительно легкодоступной в Европе около 1400 года, в результате чего получили широкое распространение небольшие гравюры на религиозные темы и игральные карты, напечатанные на бумаге. Логичным продолжением этого процесса стало создание Иоганном Гутенбергом в середине 1440-х годов способа книгопечатания подвижными литерами, оказавшего колоссальное влияние не только на европейскую культуру, но и на всемирную историю.

Самым ярким символом Высокого Возрождения (ВВ) безусловно является Леонардо да Винчи с его многочисленными изобретениями и произведениями. С этой же волной связано и начало эпохи великих географических открытий, отсчет которой принято вести с 1492 года в связи с обнаружением экспедицией Христофора Колумба американского континента.

В целом следует отметить, что подобная периодическая динамика прослеживается и для других периодов истории цивилизации, что частично рассмотрено в работе [15].

Экспоненциальная составляющая

Как будет показано далее, экспоненциальные процессы развития техники и технологий имели место на самых различных этапах развития цивилизации. Наиболее ярко и интенсивно они проявились в ходе информационно-компьютерной революции (ИКР), что детально рассмотрено в работе [1]. В предыдущие периоды количество наблюдаемых процессов такого рода было существенно меньше. При этом интенсивность экспоненциального роста также была намного ниже. Другими словами, скорость технического прогресса заметно нарастает в процессе развития цивилизации, что особенно заметно в положительные полупериоды К-волн.

В работе [1] для обеспечения количественной оценки темпов экспоненциального роста было предложено обобщение закона Мура, предполагающее 6 вариантов роста. С учетом разнообразия процессов технического прогресса на протяжении всей истории цивилизации целесообразно на базе реализованного в работе [1] подхода получить дальнейшее обобщение закона Мура, позволяющее описывать весь спектр возможной динамики экспоненциальных процессов развития.

Для этого, во-первых, кроме базового периода роста в 20 лет, характерного для ИКР, следует рассматривать и более длительные базовые периоды, отличающиеся на один и более десятичных порядков от наиболее короткого базового периода (табл. 1).

Во-вторых, будем предполагать, что основной оценкой скорости технического прогресса во всех случаях будет количество десятичных порядков, на которое возрастает (или в некоторых случаях уменьшается) значение того или иного показателя в ходе развития техники и технологий. При этом соответствующую скорость роста целесообразно обозначить через S (начальный символ англоязычного слова speed, означающего скорость). Такое обозначение представляется целесообразным также и потому, что большинство процессов развития в технике могут быть описаны различными S -образными кривыми [35], начальная часть которых (примерно первая половина или несколько более) представляет из себя экспоненциальную или квазиэкспоненциальную кривую).

Для различных скоростей экспоненциального роста обозначение в целом будет иметь вид SK , где K – это численное обозначение скорости роста, равное количеству десятичных порядков роста за базовый период. Это, естественно, отнюдь не предполагает, что соответствующий процесс роста будет длиться на протяжении всего базового периода. Чаще всего рост носит экспоненциальный характер на протяжении всего нескольких десятилетий. Но, как показывает практика, для сравнительного анализа привязка к базовым периодам является достаточно удобной и эффективной.

При рассмотрении технического прогресса можно ограничиться максимальным базовым периодом в 2 тысячи лет, т.к. за пределами данного периода процессы технического развития либо вообще плохо прослеживаются, либо просто недостаточно документированы для более-менее достоверных количественных оценок. В этом случае в обозначении K будет использоваться 3 десятичных знака. Нули справа в обозначении K в большинстве случаев могут отбрасываться.

В общем случае будем считать, что n – количество десятичных знаков (цифр), составляющих K . Тогда K показывает **на сколько десятичных порядков** вырастет соответствующее значение рассматриваемого параметра роста за $2 \cdot 10^n$ лет.

Символом S без цифровых коэффициентов будем обозначать переменную, принимающую значение K . Для того, чтобы значение S было корректным для различных n для определения

его целесообразно использовать следующую формулу:

$$S = 10 \cdot 0, K.$$

Это, например, означает что для $S1 S=1$, для $S05 S=0,5$, для $S225 S=2,25$.

Минимальной единицей времени при расчетах будем считать один год, так в пределах года даже в случае самых быстрых темпов технического прогресса существенных изменений либо не наблюдается, либо они лежат в пределах возможных отклонений. Тогда для вычисления экспоненциально растущих значений P_i для любого i -го года ($i > 0$) при известном начальном значении P_0 может использоваться зависимость, аналогичная той, которая была приведена в работе [1] для обобщенного закона Мура:

$$P_i = P_0 \cdot 2^{S \cdot (Y_i - Y_0) / 6}, \quad (1)$$

где
 Y_0 – начальный год действия соответствующей закономерности;

Y_i – текущий год действия соответствующей закономерности;

Использование такой формы зависимости, описывающей закономерности роста, позволяет обеспечить совместимость системы обозначений, используемой в работе [1], с обозначениями, описанными выше. При этом для шести вариантов закономерностей обобщенного закона Мура от $L1$ до $L6$ будем использовать, соответственно, обозначения от $S1$ до $S6$.

В таблице 1 приведены ежегодные коэффициенты роста sK для различных значений K , выраженных как X , $0X$ и $00X$ для 3-х вариантов базовых периодов.

В общем случае при произвольных значениях K таблица 1 может использоваться для определения значения K в соответствии со следующим алгоритмом:

Шаг 1: Определяем, за какой период Y (в годах) происходит рост в Z раз.

Шаг 2: Извлекаем корень степени Y из Z .

Шаг 3: В таблице 1 в колонке «20 лет» находим ближайшее значение, не превышающее полученное на шаге 2. Соответствующий номер строки X будет первым десятичным знаком значения K . В случае полного совпадения значений на данном шаге алгоритм завершается.

Шаг 4: Определяем, во сколько раз значение, полученное на шаге 2 отличается от значения, определенного на шаге 3.

Шаг 5: В таблице 1 в колонке «200 лет» находим ближайшее значение, не превышающее полученное на шаге 4. Соответствующий номер строки X будет вторым десятичным знаком значения K . В случае полного совпадения значений на данном шаге алгоритм завершается.

Шаг 6: Определяем, во сколько раз значение, полученное на шаге 4 отличается от значения, определенного на шаге 5.

Шаг 7: В таблице 1 в колонке «2000 лет» находим значение, ближайшее к полученному на шаге 6. Соответствующий номер строки X будет третьим десятичным знаком значения K . На этом алгоритм завершается.

Естественно, что альтернативой значениям S могут быть просто коэффициенты ежегодного роста, но они не дают достаточно наглядного представления о реальных многолетних темпах технического прогресса.

Примеры из разных эпох

Следует отметить, что уже в эпоху Возрождения имели место отдельные процессы, темпы которых были соизмеримы с медленными вариантами обобщенного закона Мура. Например, инициированная Генрихом Мореплавателем морская экспансия Португалии на протяжении почти всего XV века проходила с интенсивностью $S1$ (рис. 1) и привела в конечном итоге к тому, что впоследствии было названо Эпохой Великих Географических Открытий [36].

Менее интенсивным (на порядок), но существенно более длительным (фактически с VI века н.э.) был процесс распространения книг в Европе [37], который в целом развивался со средней скоростью $S01$ (рис. 4). Но в XIII веке темпы роста заметно замедлились ($S005$) из-за нарастания кризиса рукописного размножения книг, для существенного ускорения которого все имеющиеся возможности были уже исчерпаны. Преодолеть данный кризис удалось только в XV веке путем интенсивного распространения книгопечатания. При этом темпы роста на протяжении второй половины XV века и первой половины XVI века были примерно в 2 раза выше средних за тысячелетие. С XVII века интенсивность роста опять вернулась к среднему значению $S01$.

После второй мировой войны началась научно-техническая революция (НТР), сопровождаемая тем, что впоследствии назвали информационным взрывом. В ходе этого процесса скорость роста публикаций вышла на уровень $S04$ (рис. 5).

Со скоростью $S02$ с 1850 года растет ежегодное глобальное потребление первичной энергии (рис. 6). Соотношение используемых источников энергии при этом существенно меняется со временем, но общая скорость роста остается примерно постоянной.

Как показано на рис. 7, в таком же темпе $S02$ в эпоху индустриальных революций росли и максимально достижимые скорости (на базе различных видов транспорта) [40].

XIX век может с полным основанием считаться веком пара, особенно, вторая его половина. В разных сферах применения при этом глобальный рост суммарной мощности паровых двигателей происходил довольно неравномерно (рис. 8 [41]): при общей скорости роста $S06$ существенно более быстрым был процесс распространения паровых двигателей на флоте ($S08$) и заметно более медленным на железной дороге ($S04$) и в производственной сфере ($S03$).

Вторая половина XIX века явилась также эпохой интенсивного распространения железнодорожного транспорта. Рост протяженности железных дорог в мире в целом происходил в этот период со скоростью $S04$ (рис. 9). Но в отдельно взятых странах эти темпы были намного выше. Так, например, в США периодом наиболее интенсивного роста (со скоростью $S4!$) стало десятилетие с 1830 по 1840 год. Далее, в период положительной полуволны $K2$, рост происходил со скоростью $S1$ и оставался стабильным на протяжении 20-ти лет. В последующие несколько десятилетий темпы развития железнодорожного транспорта в США стали еще более низкими, но по-прежнему оставались на уровне выше среднемировых ($S05$).

В XX веке максимальные темпы роста в демонстрировала авиация, с прогрессом которой чаще всего сравнивали прогресс в перехвативших инициативу к концу XX века компьютерных технологиях. Сравнения такого рода целесообразно рассмотреть несколько детальнее.

Закон Мура и развитие авиации

Первые сравнения темпов развития компьютерных систем со скоростью развития в других отраслях техники начали появляться еще в 70-е годы XX века: «Ни одно человеческое изобретение не демонстрировало такую скорость развития. В последующие годы писатели будут искать аналогии. Одно популярное сравнение в 1970-х пришло из автомобильной индустрии: дескать, если бы Детройт придерживался Закона Мура, автомобили бы ездили со скоростью 500 миль в час и расходовали бы галлон топлива на 200 миль... и – это стоило бы 1,50 доллара» [43, с. 107].

В 1983 году одна из первых статей о персональных компьютерах начиналась уже сравнением темпов авиационного и компьютерного прогресса: «Если бы за последние 25 лет авиационная промышленность развивалась столь же стремительно, как и вычислительная техника, то Боинг-767 можно было бы приобрести сегодня за 500 долл. и облететь на нем земной шар за 20 мин, израсходовав при этом 19 л горючего» [44].

В 1998 году по-прежнему актуальным было аналогичное сравнение, но с весьма существенной корректировкой по расходу горючего: «Специалисты в области компьютерных технологий любят иногда в шутку сравнивать темпы компьютерного развития с тем, что происходит в других областях науки и техники. При этом получается, например, что если бы авиация развивалась такими же темпами, то сегодня любой желающий мог бы в обеденный перерыв совершить кругосветное путешествие на персональном самолете, потратив при этом не более наперстка горючего» [45].

В 2007 году на Intel Developer Forum один из руководителей фирмы Интел озвучил следующее сравнение: «Если бы авиация развивалась такими же темпами, как и индустрия микропроцессоров, то современный аналог «Боинга-747», выпущенного в том же году, что и процессор Intel 4004, сегодня должен был бы брать на борт 118 миллионов человек и производить их посадку и высадку (всех 118 миллионов!) всего за 12 миллисекунд. А производительность «Боинга» в целом должна была вырасти в 200 тысяч раз!» [46].

Спустя десятилетие сравнения от Интел стали еще более впечатляющими: «Если бы эффективность автомобильного топлива увеличивалась такими же темпами, то **на одной заправке можно было бы ездить всю жизнь без какой-либо дозаправки...** А перелет из Новой Зеландии в Нью-Йорк завершался бы **за время, которое требуется для того, чтобы застегнуть ремень безопасности в самолете...**» [47].

В наше время в дополнение к автомобильным и авиационным аналогиям появились и космические. Так, например, полет на Луну в 1969 году стоил \$25 млрд. и занял 3 дня. Если бы его цена и длительность снижались со скоростью закона Мура, то сейчас стоимость программы была бы сопоставима со стоимостью небольшого частного самолета, а само путешествие заняло бы всего 1 минуту [47].

В компьютерных технологиях темпы роста, определяемые обобщенным законом Мура, лежат в диапазоне от $S1$ до $S6$ [1]. В период НТР и предшествующие ей десятилетия производительность транспортной авиации росла в темпах, соизмеримых с медленными вариантами закона Мура ($S11$, $S12$ на рис. 10). Рост скоростей в авиации был заметно более медленным: $S057$ – для боевой авиации, $S043$ – для транспортной авиации (рис. 11). Взлетный вес самолетов рос в довольно высоком темпе $S13$ до начала 1940-х годов, но затем резко замедлился до $S025$ (рис. 12). Одной из причин этого стали не только условия военного

времени, но и фундаментальные ограничения поршневых авиационных двигателей, которые также оказали существенное влияние на замедление роста. Переход на реактивные двигатели обеспечил возможность дальнейшего устойчивого прогресса, но уже в новом замедленном режиме.

Аналогичные явления наблюдаются и в других областях техники. Например, интенсивный экспоненциальный рост (со скоростью S3) частоты синхронизации микропроцессоров резко замедлился (до S03) к 2005 году в связи с фундаментальными ограничениями, связанными с недостаточными возможностями теплоотвода по мере нарастания плотности энергии в микропроцессорах (рис. 13) [1].

Еще ряд характерных примеров

Далее рассматриваются характерные примеры количественной оценки технического прогресса в некоторых других областях.

Процесс расширения применения искусственных источников света, начатый на гребне волны K2 в середине XX века, сопровождался (и стимулировался!) ростом их световой эффективности со средней скоростью S05 (рис. 14). При этом на гребне волны K3 на рубеже XIX и XX столетий наблюдалось кратковременное ускорение развития вплоть до S10. Однако в целом по итогам волны K4 повышение световой эффективности искусственных источников света происходило со средней скоростью S05.

Часы, как один из первых автоматов для практически целей, к началу волны K1 в конце XVII века уже развивались в направлении повышения их точности со скоростью S024 (рис. 15, слева). Такие темпы роста точности сохранились фактически до XX века включительно.

К началу волны K3 в конце XIX века благодаря усилиям целого ряда изобретателей, самыми известными из которых являются Александр Белл и Томас Эдисон, началось широкое распространение телефонной связи. Рост числа телефонов (рис. 15, справа) при общей скорости роста S066 на протяжении столетия имеет относительно короткий период резкого ускорения S2 на рубеже XIX и XX столетий с последующим резким замедлением во второй половине XX века в связи с приближением ситуации насыщения: количество телефонных аппаратов стало приближаться к численности населения. В настоящее время развитие мобильной связи обеспечило на некоторый период дальнейший рост числа телефонов.

К концу XX века кроме голосовой связи стала активно развиваться цифровая связь, что нашло свое отражение, в частности, в росте пропускной способности кабельных модемов со скоростью S35 (рис. 16). Несколько более высокими темпами (S40) росла в этот период пропускная способность волоконно-оптических линий связи (рис. 17).

Интенсивный рост цифровых технологий, начиная со второй половины XX века [1], стал возможен на основе быстрого развития промышленности полупроводников. Одними из главных индикаторов этого развития стали такие показатели, как размеры кремниевых пластин для производства интегральных микросхем (рост со скоростью S05 – рис. 18) и размеры транзисторов (сокращение со скоростью S15 – рис. 18 на врезке слева вверху). Впечатляющим результатом этого развития стал стремительный рост глобального производства транзисторов в соответствии с закономерностью S3 (рис. 19): к настоящему времени в расчете на каждого живущего в мире человека ежесекундно (!) производятся миллиарды транзисторов!

Наиболее высокие темпы роста (S5) в современной техносфере на протяжении почти 3-х десятилетий, т.е. фактически всего периода информационно-компьютерной революции, наблюдаются в сфере роста производительности компьютерных систем различных классов (рис. 20). Не исключено, что в последующие несколько десятилетий будет наблюдаться некоторое снижение темпов роста и в данной сфере. Но главное заключается в том, что создан прецедент чрезвычайно высоких темпов роста на протяжении довольно продолжительного периода. Следует также отметить, что стремительное улучшение характеристик компьютерной техники и расширение масштабов ее использования создали основные предпосылки для качественного скачка в современной техносфере (и цивилизации в целом) на гребне волны K5 (рис. 1) в начале нового тысячелетия.

Заключение

Таким образом, системодинамика техносферы может рассматриваться как сочетание периодических (на основе волн Кондратьева) и экспоненциальных закономерностей роста. Экспоненциальную составляющую предложено количественно оценивать на базе универсального показателя скорости роста S, что позволяет наглядно сравнивать интенсивность процессов развития в различных областях техники с интенсивностью прогресса в компьютерных технологиях.

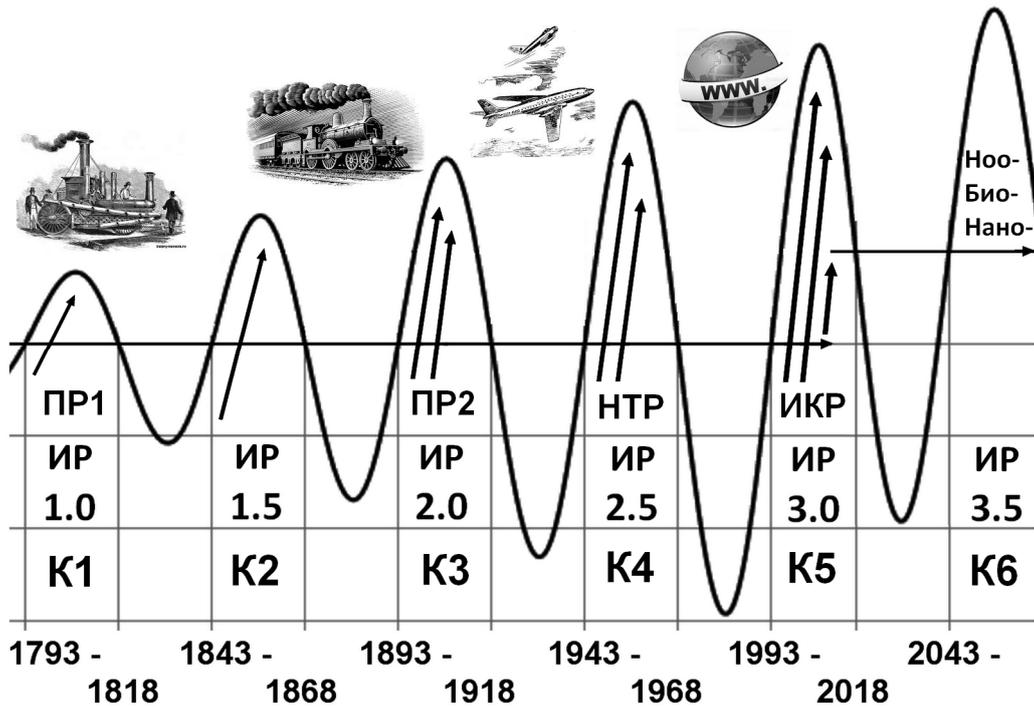


Рисунок 1. – Эпоха индустриальных революций (ИР): концептуальное представление системодинамики техносферы как последовательности К-волн (К1, ..., К6) с возрастающей амплитудой – своеобразной «раскачкой», обеспечивающей качественный скачок на гребне 5-й волны

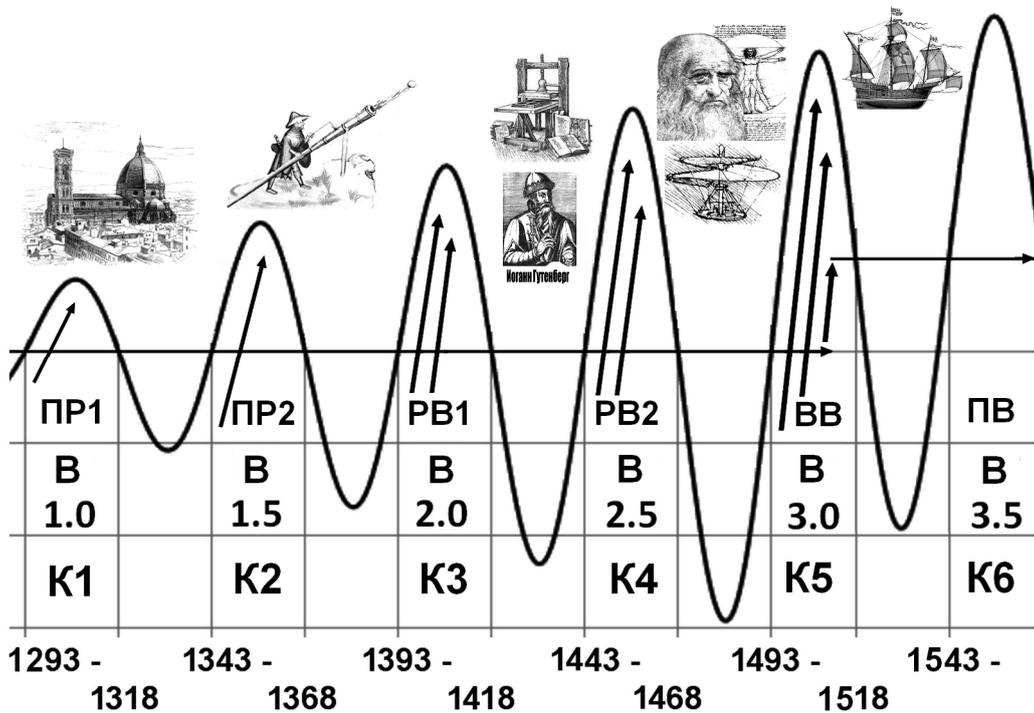


Рисунок 2. – Концептуальное представление системодинамики техносферы как последовательности К-волн (К1, ..., К6) с возрастающей амплитудой в эпоху Возрождения (В)

Таблица 1. –Коэффициенты роста, определяющие системодинамику техносферы

X	Коэффициенты роста за базовый период (20, 200, 2000 лет)	Ежегодные коэффициенты роста		
		20 лет: sX	200 лет: s0X	2000 лет: s00X
1	10	1,12	1,012	1,0012
2	100	1,26	1,023	1,0023
3	1 000	1,41	1,035	1,0035
4	10 000	1,58	1,047	1,0046
5	100 000	1,78	1,059	1,0058
6	1 000 000	2,00	1,072	1,0069
7	10 000 000	2,24	1,084	1,0081
8	100 000 000	2,51	1,096	1,0093
9	1 000 000 000	2,82	1,109	1,0104
10	10 000 000 000	3,16	1,122	1,0116

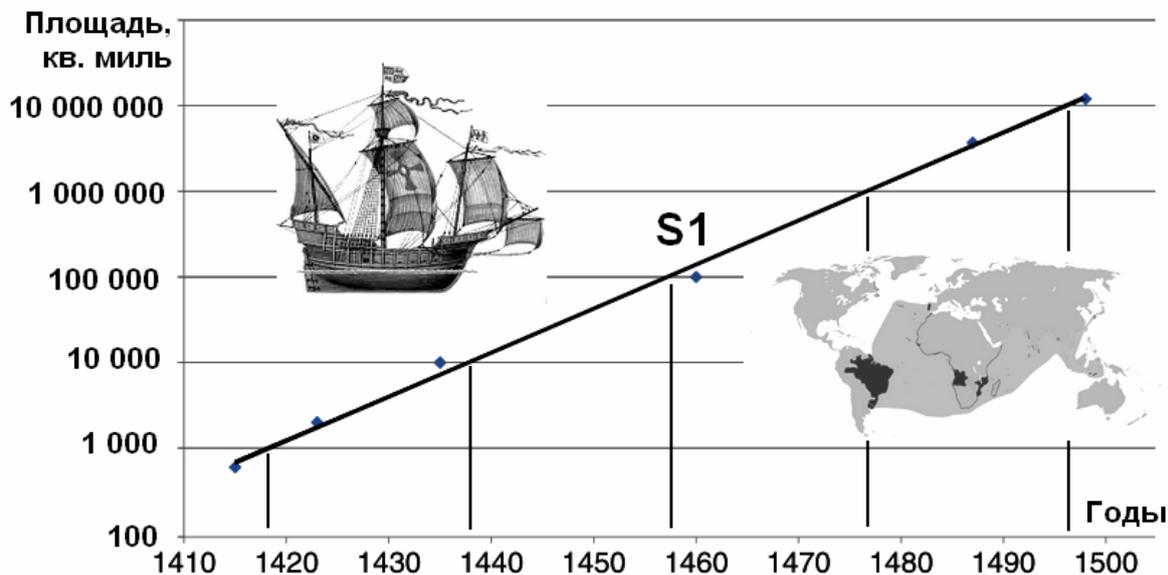


Рисунок 3. – Экспоненциальный рост площади земного шара, контролируемой Португалией в XV веке (по данным работы [36]) соответствует закономерности S1

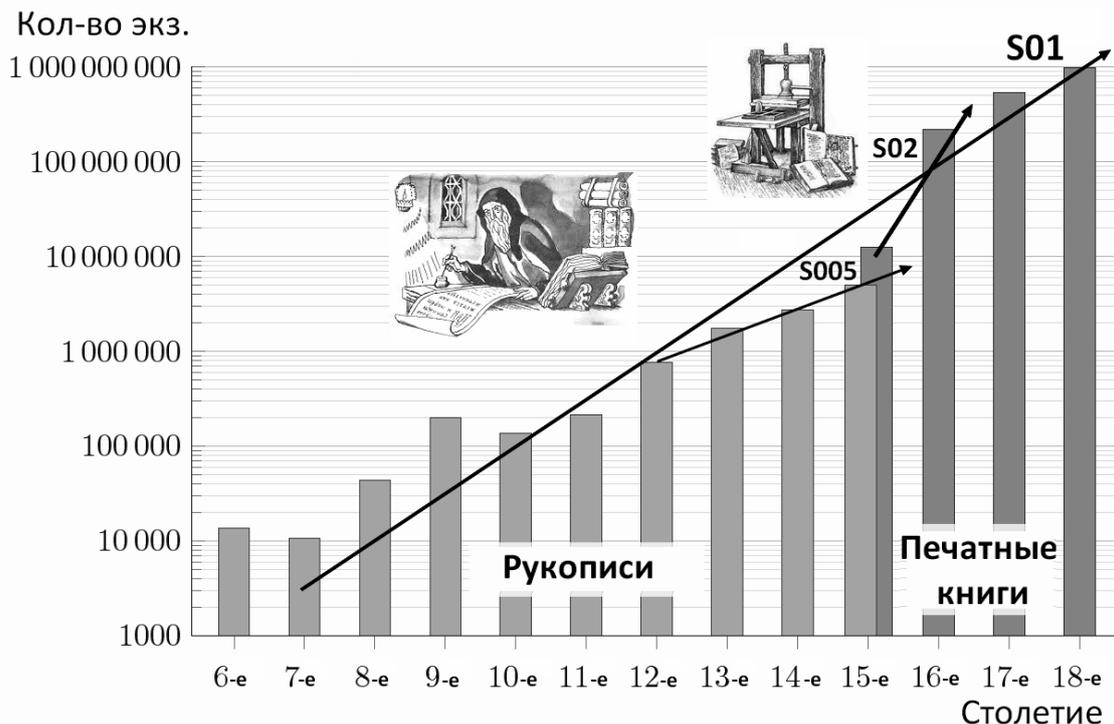


Рисунок 4. – Экспоненциальный рост европейского книгоиздания (по данным работы [37]) на протяжении более чем тысячелетия соответствует в целом закономерности S01 с относительно непродолжительными периодами заметного замедления до S005 (кризис рукописной книги в XIII-XV вв.) и ускорения до S02 (преодоление книжного кризиса путем начала книгопечатания в XV-XVI вв.)

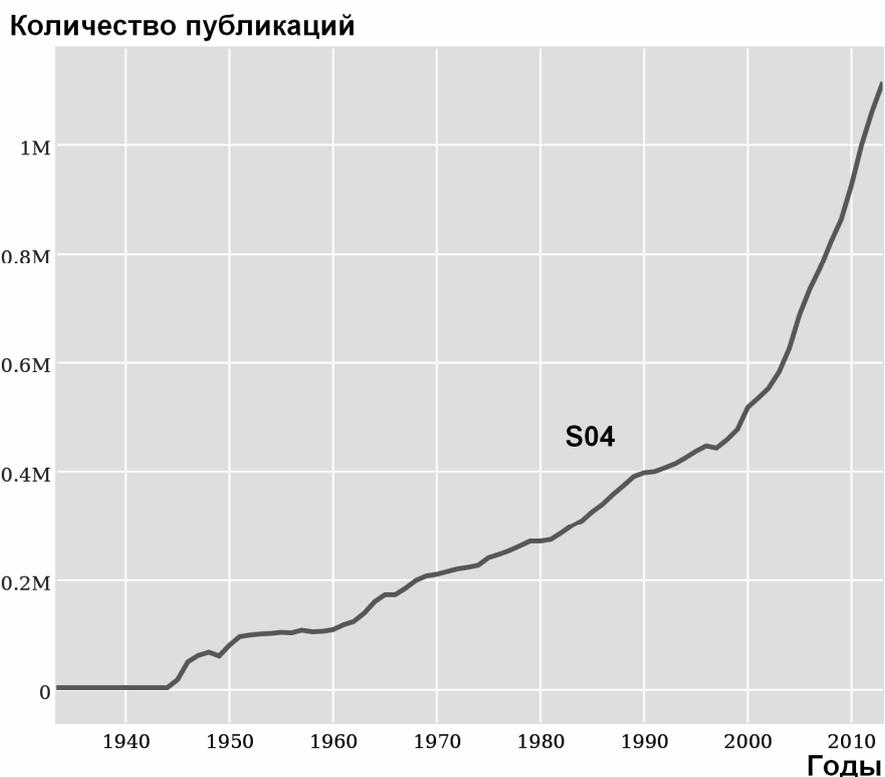


Рисунок 5. – Рост ежегодного количества публикаций (в миллионах) в период после второй мировой войны (по данным работы [38]) соответствует закономерности S04

Первичная энергия (эксаджоулей в год)

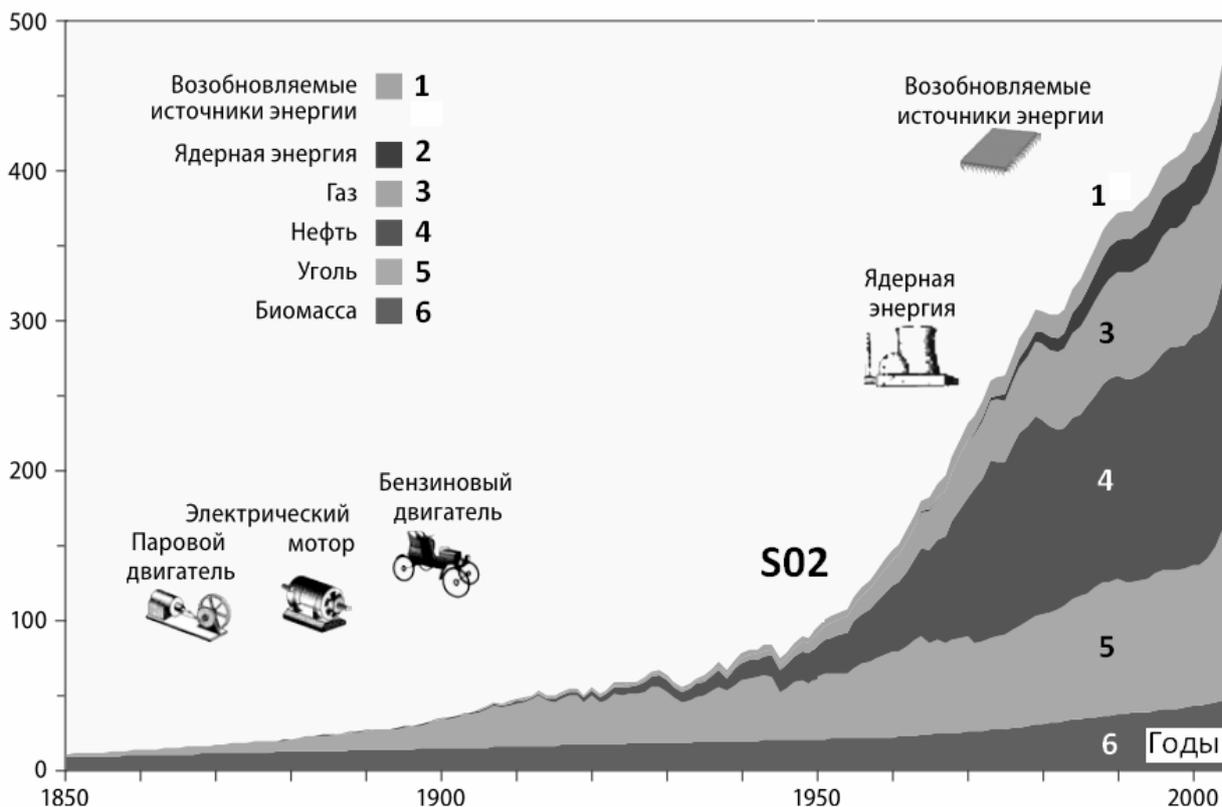


Рисунок 6. – Рост ежегодного глобального потребления первичной энергии (по данным работы [39]) соответствует в целом закономерности S02 (в эксаджоулях – 1 эксаджоуль равен 10¹⁸ джоулей и выделяется при сжигании 31,12 миллионов тонн условного топлива)

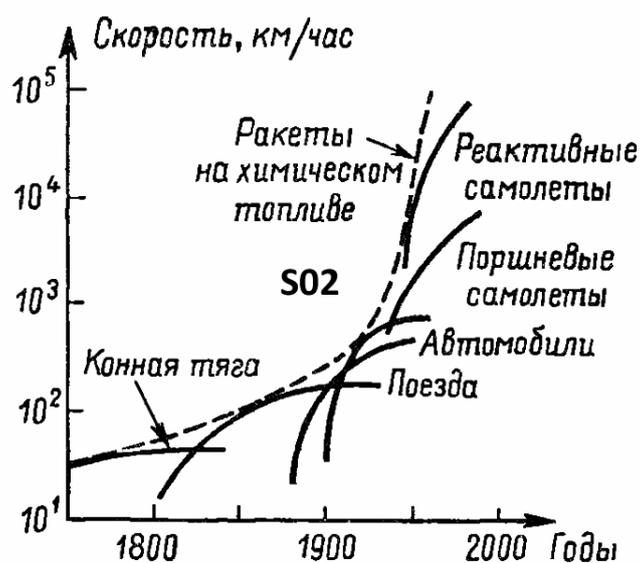


Рисунок 7. – Рост максимальных скоростей в эпоху индустриальных революций на базе различных видов транспорта [40, с. 246] соответствует закономерности S02

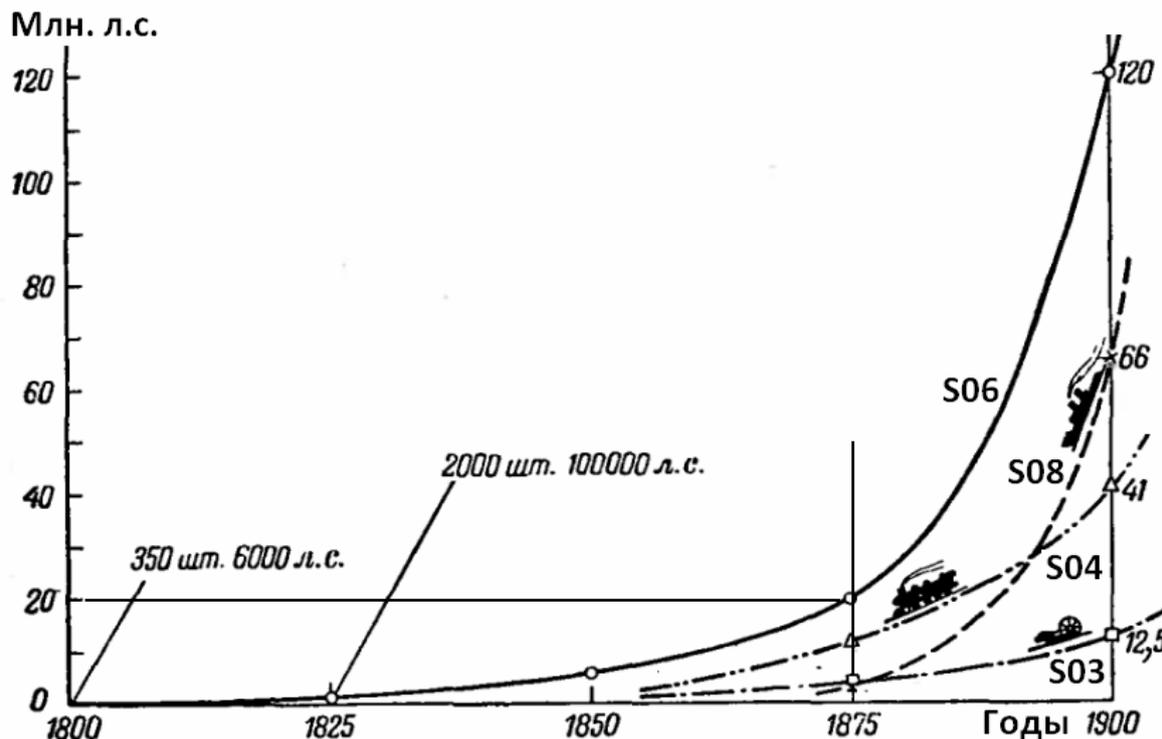


Рисунок 8. – Глобальный рост суммарной мощности паровых двигателей в XIX веке [41, с. 155]: темпы роста заметно отличаются для различных сфер применения (S03 – стационарные машины, S04 – паровозные, S08 – пароходные, S06 – суммарный рост)

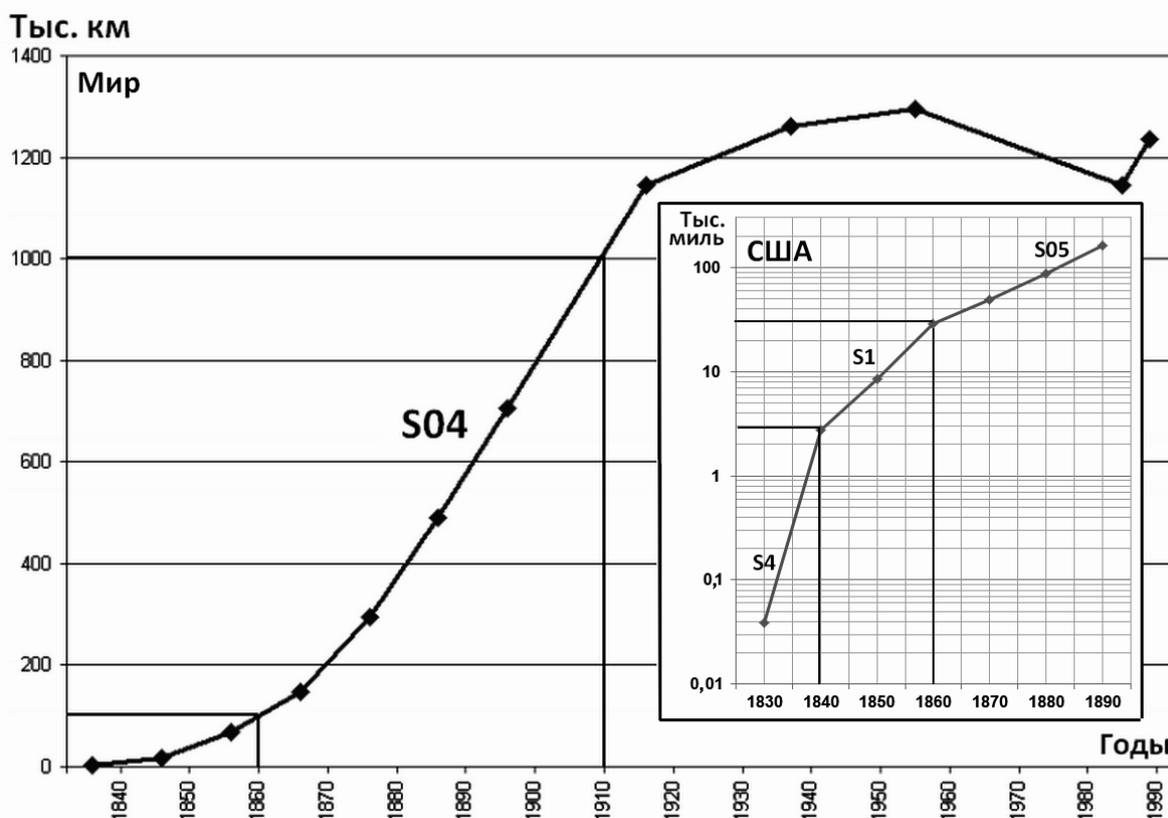


Рисунок 9. – Рост протяженности железных дорог в мире в целом, и в США в частности (по данным работы [42]): наиболее интенсивный глобальный рост (S04) имел место в период второй промышленной революции, но в США более высокие темпы роста (вплоть до S4) отмечались в предшествующие периоды

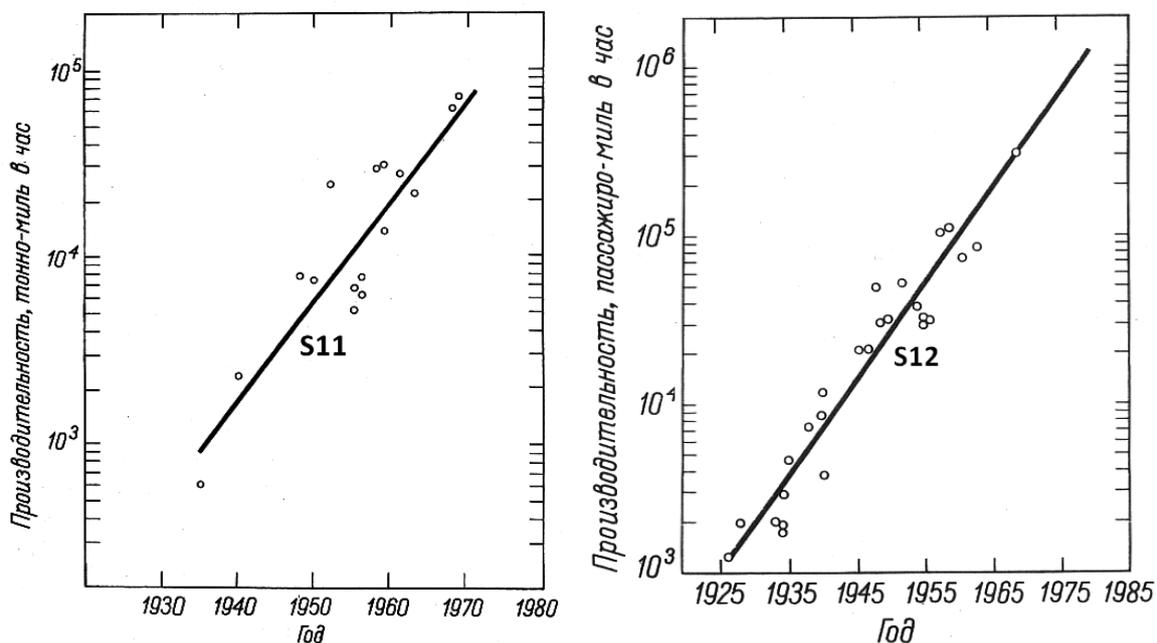


Рисунок 10. – Рост производительности транспортной авиации в XX веке (по данным работы [35, с. 142-143]): этот показатель в тонно-милях в час (слева) соответствует закономерности S11, в пассажиро-милях в час – закономерности S12

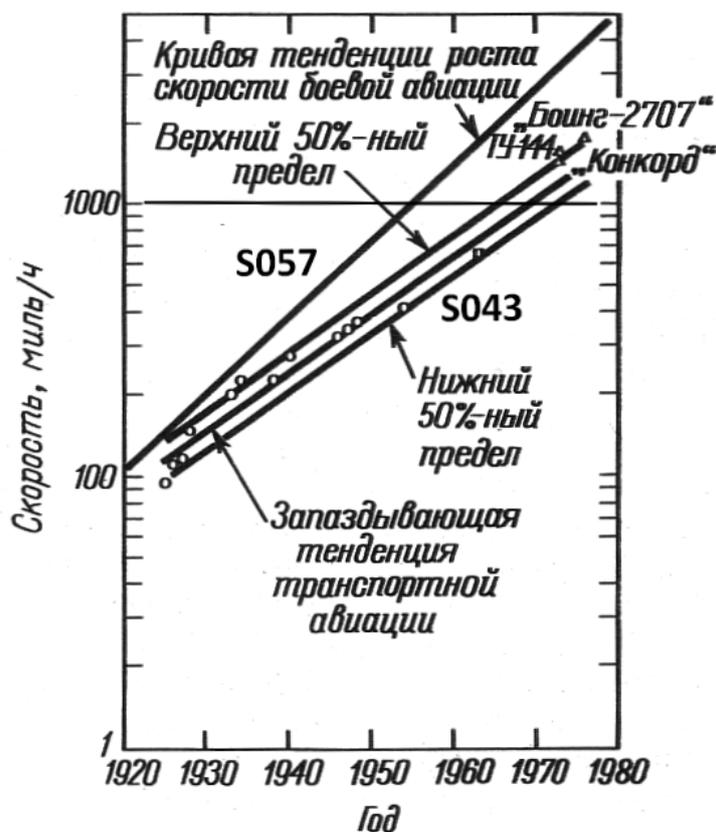


Рисунок 11. – Рост скоростей в авиации (по данным работы [35, с. 171]): S057 – для боевой авиации, S043 – для транспортной авиации

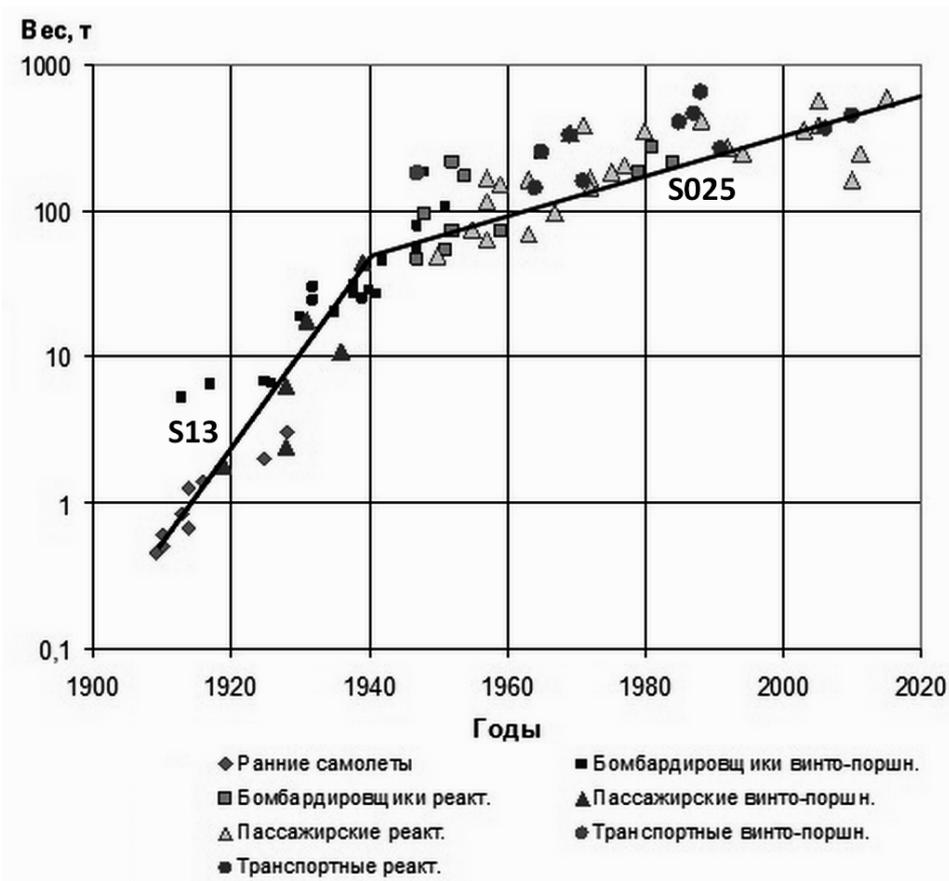


Рисунок 12. – Рост взлетного веса самолетов [48]: до начала 1940-х годов быстрый рост в соответствии с закономерностью S13, но затем темпы роста снижаются до S025

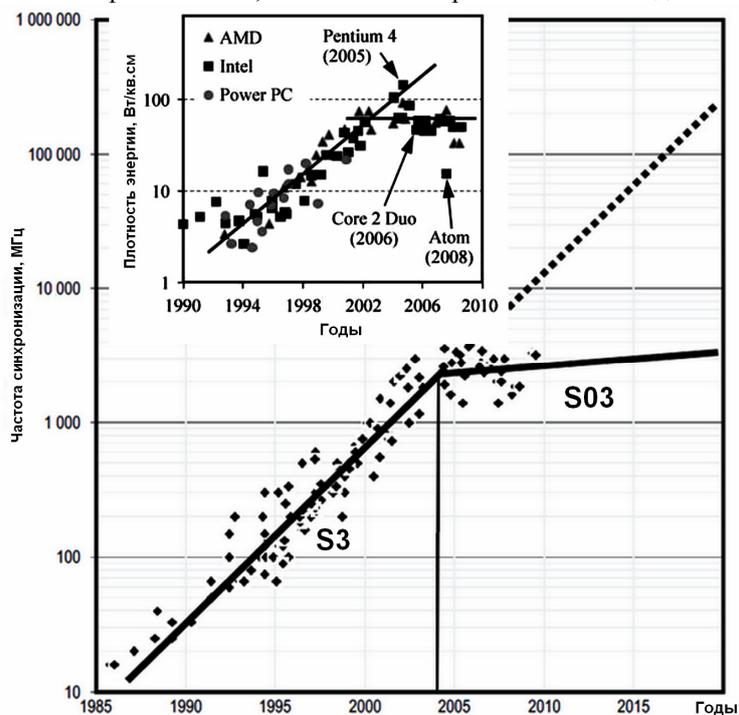


Рисунок 13. – Интенсивный экспоненциальный рост (со скоростью S3) частоты синхронизации микропроцессоров резко замедлился (до S03) к 2005 году, что позволило предотвратить катастрофическое нарастание плотности энергии в микропроцессорах (рисунок-врезка слева вверху)

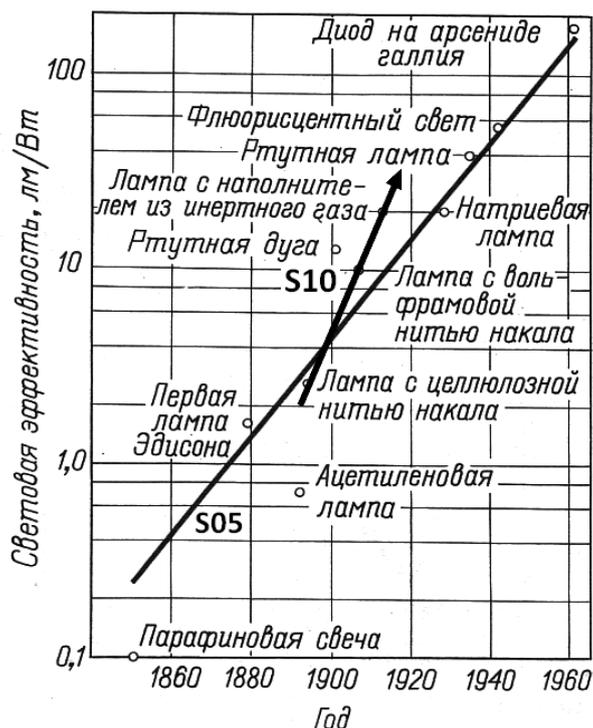


Рисунок 14. – Рост световой эффективности искусственных источников света [35, с. 145]: на фоне долговременной закономерности роста S05 в период второй промышленной революции наблюдалось стремительное расширение использования новых источников света и ускоренный рост их эффективности в соответствии с закономерностью S10

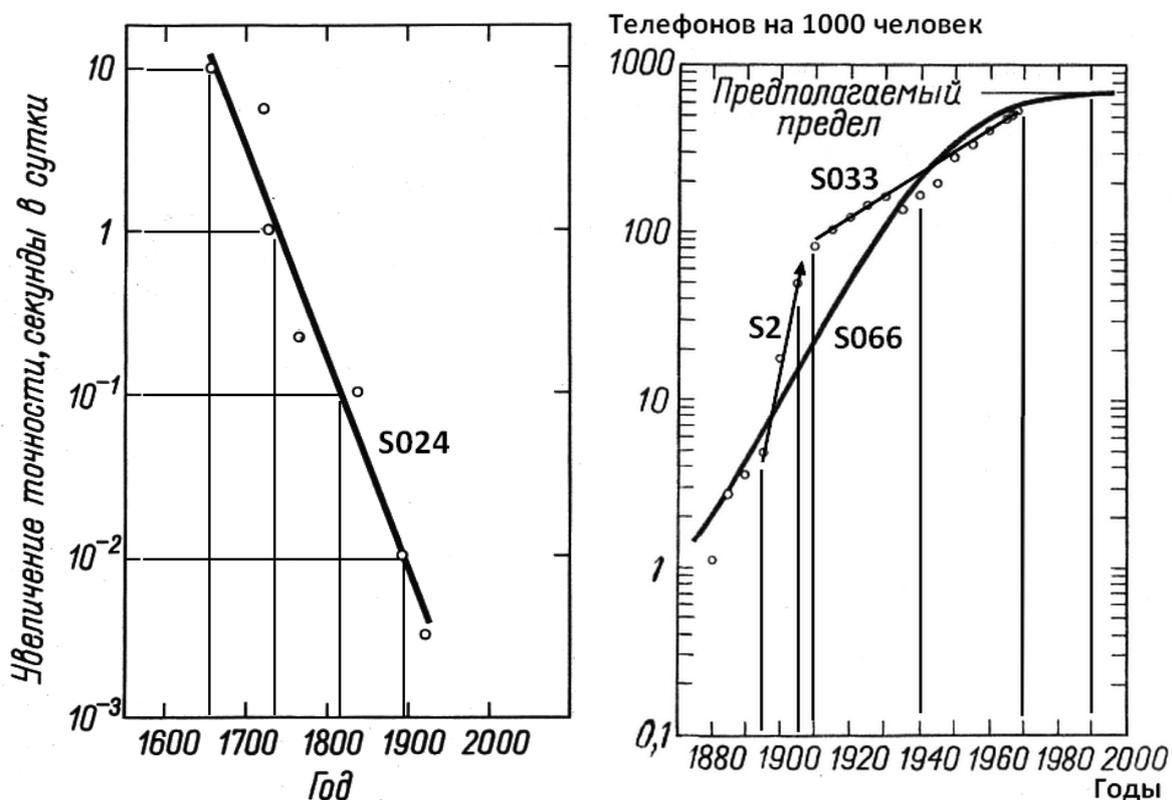


Рисунок 15. – Рост точности средств измерения времени, выраженный в ежесуточной погрешности в секундах (слева) [35, с. 296], на протяжении 3-х столетий соответствовал закономерности S024, а рост числа телефонов (справа) [35, с. 132] при общей скорости роста S066 на протяжении столетия имеет относительно короткий период резкого ускорения S2 на рубеже столетий с последующим резким замедлением

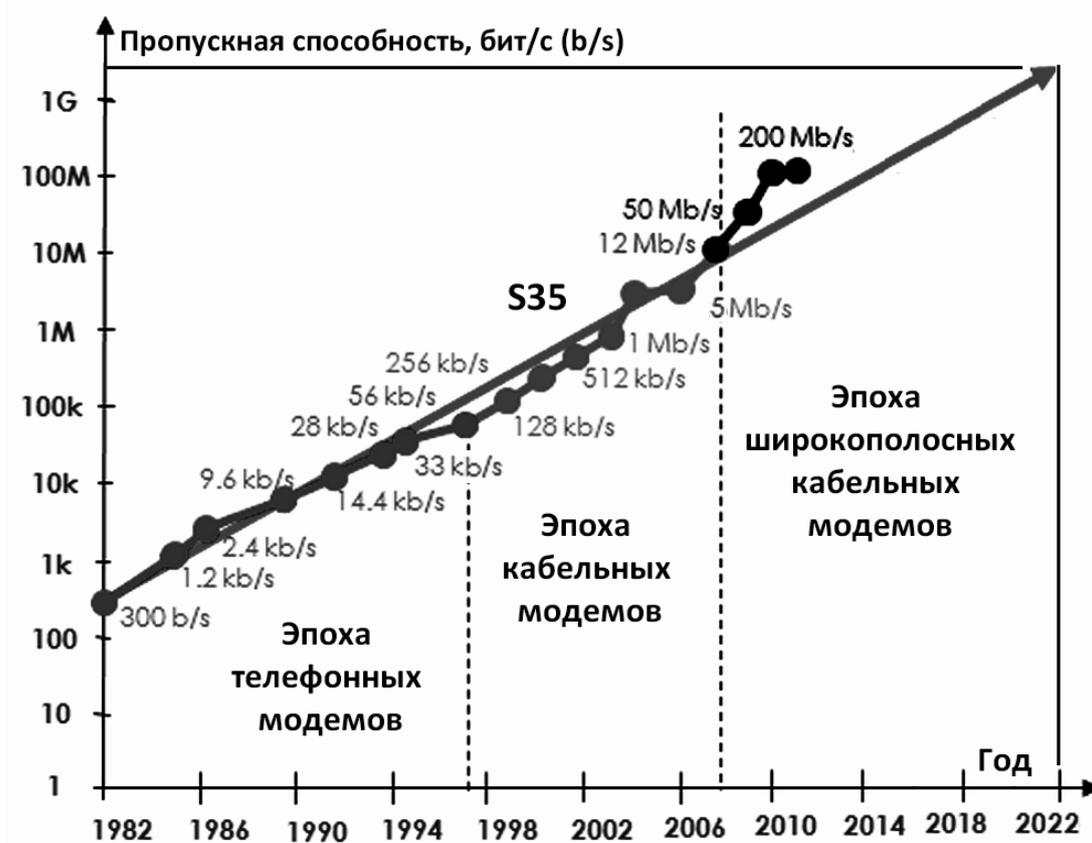


Рисунок 16. – Рост пропускной способности кабельных модемов (и три эпохи их развития) [49] в соответствии с закономерностью S35

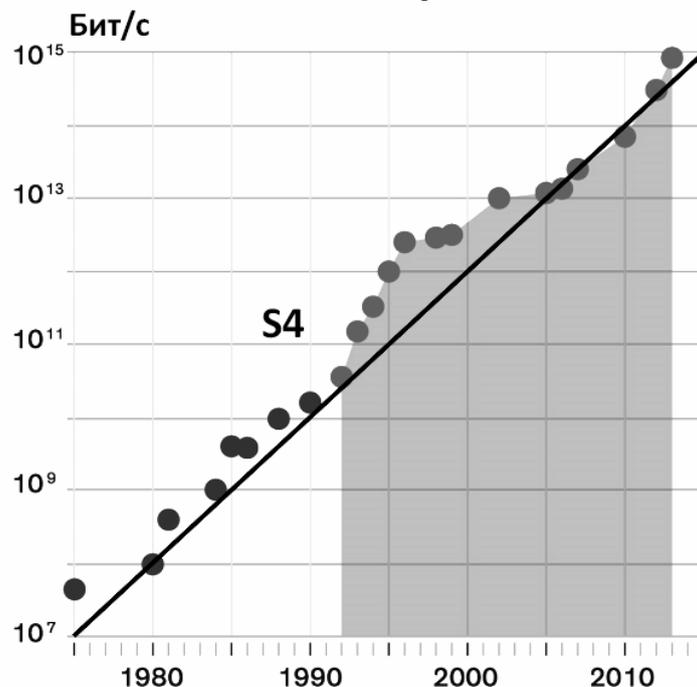


Рисунок 17. – Рост пропускной способности волоконно-оптических линий связи (так называемый закон Кека [50]) в соответствии с закономерностью S4

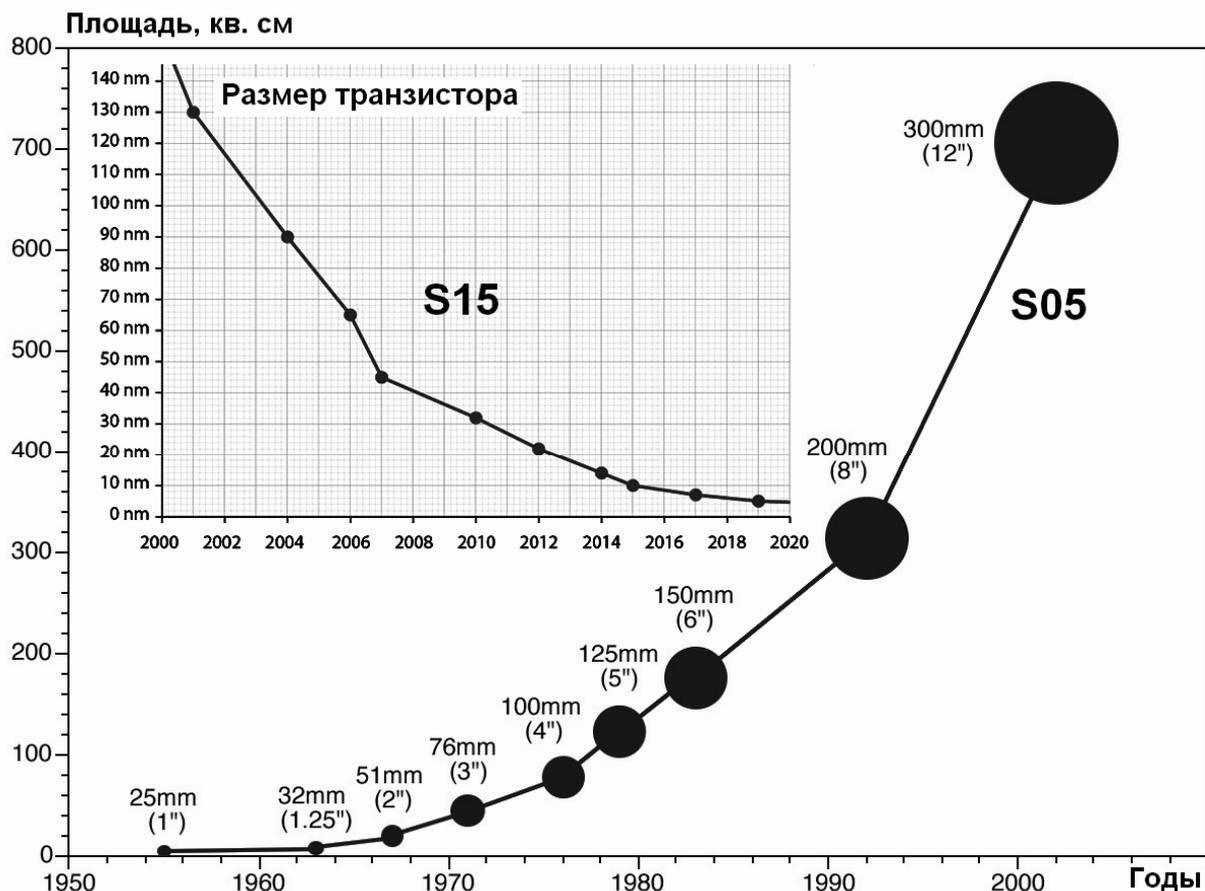


Рисунок 18. – Сокращение размеров транзисторов в соответствии с закономерностью S15 и рост размеров кремниевых пластин для производства интегральных микросхем в соответствии с закономерностью S05 в совокупности с постоянным расширением производственных мощностей определяют лавинообразный рост суммарного производства транзисторов в соответствии с закономерностью S3



Рисунок 19. – Рост глобального производства транзисторов в соответствии с закономерностью S3: к 2014 году в расчете на каждого живущего в мире человека ежесекундно производилось порядка миллиарда транзисторов!

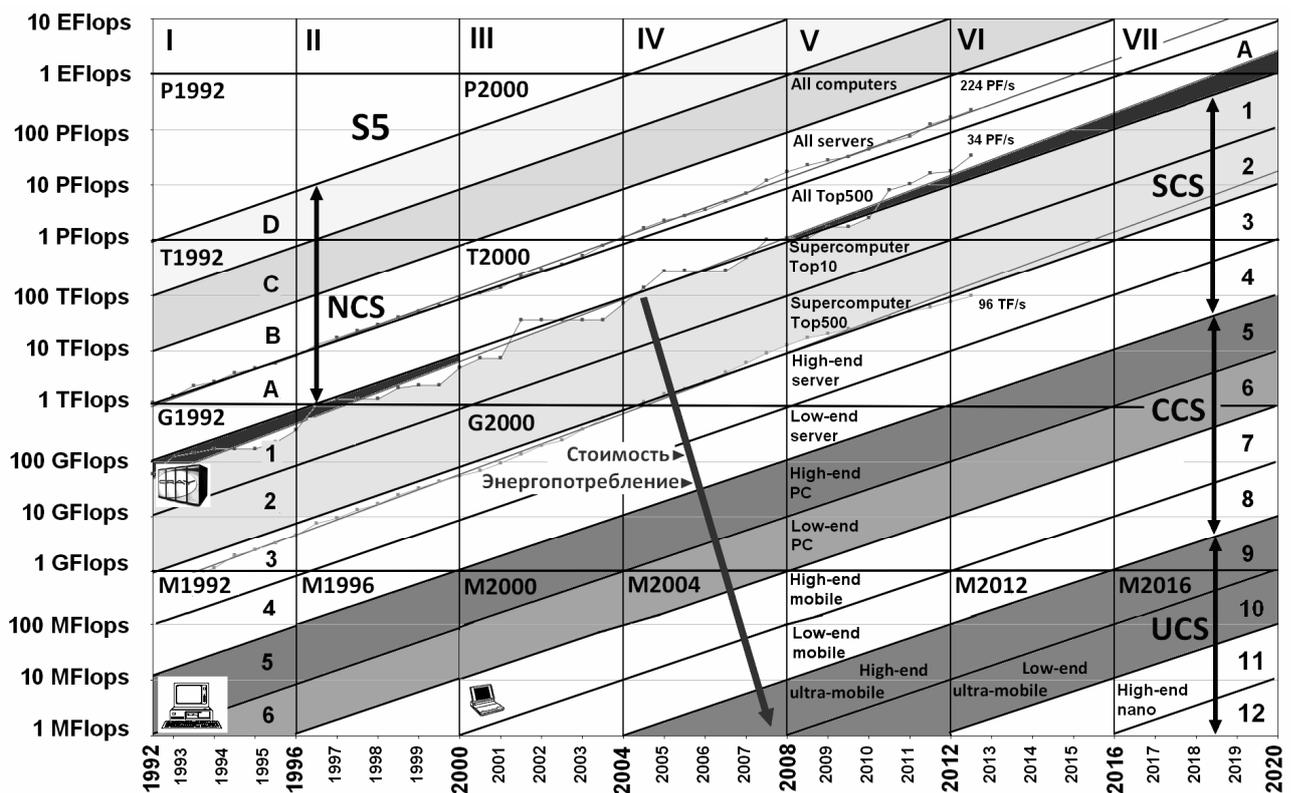


Рисунок 20. – Наиболее высокие темпы роста (S5) в современной техносфере на протяжении всего периода информационно-компьютерной революции наблюдаются в сфере роста производительности компьютерных систем различных классов (детальнее см. в работах [1, 2, 4 – 6])

Список литературы

1. Аноприенко А.Я. Системодинамика ноотехносферы: основные закономерности // Системный анализ в науках о природе и обществе. – Донецк: ДонНТУ, 2014, №1(6)–2(7). – С. 11 – 29.
2. Аноприенко А.Я. Система закономерностей развития средств и методов компьютеринга // Материалы V всеукраинской научно-технической конференции «Информационные управляющие системы и компьютерный мониторинг (ИУС и КМ 2014)» – 22–23 апреля 2014 г., Донецк, ДонНТУ, 2014. В 2-х томах. Т. 1. – С. 11 – 23.
3. Аноприенко О.Я., Варзар Р.Л., Иваница С.В. Закономерности развития аналого-цифровых преобразователей и перспективы использования постбинарного кодирования // Научные труды Донецкого национального технического университета. Серия: «Информатика, кибернетика и вычислительная техника» (ИКВТ–2014). Выпуск 1(19). – Донецк: ДонНТУ, 2014. – С. 5 – 10.
4. Аноприенко А.Я. Основные закономерности эволюции компьютерных систем и сетей // Научные труды Донецкого национального технического университета. Серия «Проблемы моделирования и автоматизации проектирования» (МАП–2013). Выпуск № 1(12)–2(13): Донецк: ДонНТУ, 2013. – С. 10 – 32.
5. Аноприенко А.Я. Закономерности развития компьютерных систем // Научная дискуссия: инновации в современном мире. №10(18): Сборник статей по материалам XVIII международной заочной научно-практической конференции. – М.: Изд. Международный центр науки и образования, 2013. – С. 19 – 29.
6. Аноприенко А.Я. Модели эволюции компьютерных систем и средств компьютерного моделирования // Материалы 5-й международной научно-технической конференции «Моделирование и компьютерная графика» 24 сентября 2013 года, Донецк, ДонНТУ, 2013. – С. 403 – 423.
7. Аноприенко А.Я. Будущее компьютерных технологий в контексте технической и кодологической эволюции // Вестник Инженерной Академии Украины. Теоретический и научно-практический журнал Инженерной Академии Украины. Выпуск 3–4, 2011. – С. 108 – 113.

8. Аноприенко А.Я. Ноокомпьютинг и будущее информационно-компьютерной инфраструктуры // *Материалы Международного научного конгресса по развитию информационно-коммуникационных технологий и развития информационного общества в Украине*. К., 2011. – С. 12 – 13.
9. Аноприенко А.Я. Компьютерные науки и технологии: следующие 50 лет // *Материалы II всеукраинской научно-технической конференции «Информационные управляющие системы и компьютерный мониторинг (ИУС и КМ2011)»*. Донецк: ДонНТУ, 2011. Т. 1. – С. 7 – 22.
10. Аноприенко А.Я. Пределы информатики // *Информация и рынок. Теоретический и научно-практический журнал*. – 1993. – № 2 – 3. – С. 10 – 14.
11. Аноприенко А.Я. Нооритмы – эффективная модель структурирования исторического времени // *Материалы I международной научной междисциплинарной конференции «Время в зеркале науки»* (Киев, 19 марта 2011 года). – К.: Центр учебной литературы, 2011. С. 299 – 303.
12. Аноприенко А.Я. Нооритмы: комплексная эмпирическая модель ноосферной динамики // *Международный междисциплинарный симпозиум «Нанотехнология и ноосферология в контексте системного кризиса цивилизации»*. Сборник тезисов докладов. Симферополь, 2011. – С. 30 – 32.
13. Аноприенко А.Я. Нооритмы и время в информационную эпоху // *Время в зеркале науки. Специальный выпуск сборника научных трудов Гуманитарные студии*. Часть 1. – К.: Центр учебной литературы, 2010. – С. 291 – 305.
14. Аноприенко А.Я. Цивилизация, ноосфера и нооритмы // *Ноосфера и цивилизация. Научный журнал*. Выпуск 7 (10). – Донецк, 2009. – С. 62 – 69.
15. Аноприенко А.Я. Нооритмы: модели синхронизации человека и космоса. – Донецк: УНИТЕХ, 2007. – 372 с.
16. Ферсман А.Е. Химические проблемы промышленности. – М.: Научное хим.-техн. издательство, 1924. – 52 с.
17. Ферсман А.Е. Избранные труды. Том III. – М.: Издательство Академии наук СССР. – 1955. – 798 с.
18. Вернадский В.И. Несколько слов о ноосфере / *Успехи современной биологии*. – 1944. – No.18, вып. 2. – С. 113 – 120.
19. Вернадский В.И. Философские мысли натуралиста. – М.: Наука, 1988. – 520 с.
20. Вернадский В.И. Научная мысль как планетное явление. – М.: Наука, 1991. – 273 с.
21. Моисеев Н.Н. Алгоритмы развития. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
22. Моисеев Н.Н. Как далеко до завтрашнего дня... Свободные размышления. 1917–1993. – М.: Изд-во МНЭПУ, 1997. – 426 с.
23. Труды Н.Н. Моисеева по вопросам современного образования. – М.: изд-во МНЭПУ, 2012. – 213 с.
24. Шугрин С.М. Космическая организованность биосферы и ноосферы. – Новосибирск: Наука, 1999. – 496 с.
25. Форрестер Дж. Мировая динамика. – М.: Издательство АСТ, 2003. – 379 с.
26. Аверин Г.В. Об основаниях системодинамики // *Системный анализ и информационные технологии в науках о природе и обществе*. Донецк: ДонНТУ. – 2011, № 1. – С. 6 – 52.
27. Аверин Г.В. О фундаментальных основах системодинамики: опытные факты, методология, приложения // *Интеллектуальный анализ информации, ИАИ–2011*. – К: НТУ «КПИ», 2011, – С. 152 – 169.
28. Аверин Г.В. Системодинамика. – Донецк: Донбасс, 2014. – 403 с.
29. Кондратьев Н.Д. Мировое хозяйство и его конъюнктуры во время и после войны. – Вологда, 1922. – 258 с.
30. Кондратьев Н.Д. Большие циклы конъюнктуры / *Вопросы конъюнктуры*. – 1925. – Вып.1, Т.1. – С. 28 – 79.
31. Кондратьев Н.Д. Основные проблемы экономической статики и динамики: Предварительный эскиз. – М.: Наука, 1991. – 567 с.
32. Кондратьев Н.Д. Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения. – М.: Экономика, 2002. – 767 с.
33. Гидлевский А.В. Парадоксы антропогенного космологического принципа // *Вестник Омского ун-та*, 2007, № 3. – С. 60 – 67.
34. Аноприенко А.Я. Космоэкология и космоантропный принцип // *Экогеософский альманах «Мудрость дома Земля»: О мировоззрении XXI века*. – Санкт-Петербург – Донецк, 2007. – С. 128 – 135.
35. Мартино Дж. Технологическое прогнозирование. – М.: Прогресс, 1977. – 592 с.
36. Magee C.L., Devezas T.C. How many singularities are near and how will they disrupt human history? // *Technological Forecasting & Social Change*, Vol. 78. 2011, 8, pp. 1365 – 1378.

37. Buringh E., Zanden J. Charting the “Rise of the West”: Manuscripts and Printed Books in Europe, A Long-Term Perspective from the Sixth through Eighteenth Centuries // *The Journal of Economic History*, Vol. 69, no.2. 2009, pp. 409 – 445.
38. Aboukhalil R. The rising trend in authorship // *The Winnower*, 2014, <https://thewinnower.com/papers/37-the-rising-trend-in-authorship>.
39. *Global Energy Assessment: Toward a Sustainable Future*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2012. – 93 p.
40. Янч Э. Прогнозирование научно-технического прогресса. – М.: Прогресс, 1970. – 568 с.
41. Белькинд Л.Д. История техники. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1956. – 491 с.
42. Сотников Е.А. Железные дороги мира из XIX в XXI век. – М.: Транспорт, 1993. – 200 с.
43. Мэлоун М. The Intel: как Роберт Нойс, Гордон Мур и Энди Гроув создали самую влиятельную компанию в мире. – М.: Эксмо, 2015. – 680 с.
44. Тунг Х., Гупта А. Персональные компьютеры // *В мире науки*, 1983, №8. – С. 52 – 65.
45. Анопrienko А.Я. На пороге информационного общества // *Донецкий политехник*. – 24 марта 1998. – №3. – С. 8.
46. Transcript: Pat Gelsinger Keynote with special guest appearance by Gordon Moore // *PRESS KIT – Intel Developer Forum*, September 18–20, 2007. – 68 p.
47. Богапов Г – 50 лет – закону Мура! *Itnews*, 15 июня 2015. <http://itnews.com.ua/analytics/524.html>.
48. Голдовский Б.И. Почему до сих пор не осуществился прогноз Р.Л.Бартини // *Методолог*, 2012, <http://www.metodolog.ru/node/1578>.
49. IEEE Industry Connections Ethernet Bandwidth Assessment // *IEEE 802.3 BWA Ad Hoc Report*, 19th July 2012. – 40 p.
50. Hecht J. Is Keck’s Law Coming to an End? // *IEEE Spectrum*, 2016, <http://spectrum.ieee.org/semiconductors/optoelectronics/is-kecks-law-coming-to-an-end>.
2. Anoprienko A.J. Sistema zakonornostej razvitija sredstv i metodov komp'jutinga // *Materialy V vseukrainskoj nauchno-tehnicheskoy konferencii “Informacionnye upravljajushhie sistemy i komp'juternyj monitoring (IUS i KM 2014)”* – 22–23 aprelja 2014 g., Doneck, DonNTU, 2014. V 2-h tomah. T. 1. pp. 11 – 23 (in Russian).
3. Anoprienko O.J., Varzar R.L., Ivanica S.V. Zakonornosti razvitija analogo-cifrovyh preobrazovatelej i perspektivy ispol'zovanija postbinarnogo kodirovanija // *Nauchnye trudy Doneckogo nacional'nogo tehničeskogo universiteta. Serija: Informatika, kibernetika i vychislitel'naja tehnika. Issue 1(19)*. – Doneck: DonNTU, 2014. pp. 5 – 10 (in Russian).
4. Anoprienko A.J. Osnovnye zakonornosti jevoljucii komp'juternyh sistem i setej // *Nauchnye trudy Doneckogo nacional'nogo tehničeskogo universiteta. Serija Problemy modelirovanija i avtomatizacii proektirovanija (MAP-2013). Issue no.1(12)–2(13)*: Doneck: DonNTU, 2013. – pp. 10 – 32 (in Russian).
5. Anoprienko A.J. Zakonornosti razvitija komp'juternyh sistem // *Nauchnaja diskussija: innovacii v sovremennom mire. no.10 (18): Sbornik statej* – M.: Izd. Mezhdunarodnyj centr nauki i obrazovanija, 2013. – pp. 19 – 29 (in Russian).
6. Anoprienko A.J. Modeli jevoljucii komp'juternyh sistem i sredstv komp'juternogo modelirovanija // *Materialy mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferencii Modelirovanie i komp'juternaja grafika 24–27 sentjabrja 2013 goda*, Doneck, DonNTU, 2013. pp. 403 – 423 (in Russian).
7. Anoprienko A.J. Budushhee komp'juternyh tehnologij v kontekste tehničeskoy i kodo-logičeskoy jevoljucii // *Vestnik Inzhenernoj Akademii Ukrainy. Teoreticheskij i nauchno-praktičeskij zhurnal. Issue 3 – 4, 2011*. – pp. 108 – 113 (in Russian).
8. Anoprienko A.J. Nookomp'jutering i budushhee informacionno-komp'juternoj infrastruktury // *Materialy Mezhduna-rodного nauchного kongressa po razvitiju informacionno-kommunikacionnyh tehnologij i razvitija informacionного obshhestva v Ukraine. K., 2011*. – pp. 12 – 13 (in Russian).
9. Anoprienko A.J. Komp'juternye nauki i tehnologii: sledujushhie 50 let // *Materialy II vseukrainskoj nauchno-tehnicheskoy konferencii Informacionnye upravljajushhie sistemy i komp'juternyj monitoring*. Doneck: DonNTU, 2011. T. 1. – pp. 7 – 22 (in Russian).
10. Anoprienko A.J. *Predely informatiki // Informacija i rynek*. – 1993. – no.2 – 3. – pp. 10 – 14 (in Russian).

References (transliteration)

1. Anoprienko A.J. Sistemodinamika nootehnosfery: osnovnye zakonornosti // *Sistemnyj analiz v naukah o prirode i obshhestve*. – Doneck: DonNTU, 2014, №1(6)–2(7). pp. 11 – 29 (in Russian).

11. Anoprienko A.J. Nooritmy – jeffektivnaja model' strukturirovanija istoricheskogo vremeni // Materialy I mezhdunarodnoj nauchnoj mezhdisciplinarnoj konferencii Vremja v zerkale nauki (Kiev, 19 marta 2011 goda). – K.: Centr uchebnoj literatury, 2011. – pp. 299 – 303 (in Russian).
12. Anoprienko A.J. Nooritmy: kompleksnaja jempiricheskaja model' noosfernoj dinamiki // Mezhdunarodnyj mezhdisciplinarnyj simpozium Nanotehnologija i noo-sferologija v kontekste sistemnogo krizisa civilizacii. Sbornik tezisov dokladov. Simferopol' – Jalta, 2011. – pp. 30 – 32 (in Russian).
13. Anoprienko A.J. Nooritmy i vremja v informacionnuju jepohu // Vremja v zerkale nauki. Special'nyj vypusk sbornika nauchnyh trudov Gumanitarnye studii. Chast' 1. – K.: Centr uchebnoj literatury, 2010. pp. 291 – 305 (in Russian).
14. Anoprienko A.J. Civilizacija, noosfera i nooritmy // Noosfera i civilizacija. Issue 7 (10). – Doneck, 2009, pp. 62 – 69 (in Russian).
15. Anoprienko A.J. Nooritmy: modeli sinhronizacii cheloveka i kosmosa. – Doneck: UNITEH, 2007. – 372 p. (in Russian).
16. Fersman A.E. Himicheskie problemy promyshlennosti. – M.: Nauchnoe him.-tehn. izdatel'stvo, 1924. – 52 p. (in Russian).
17. Fersman A.E. Izbrannye trudy. Tom III. – M.: Izdatel'stvo Akademii nauk SSSR. – 1955. – 798 p. (in Russian).
18. Vernadskij V.I. Neskol'ko slov o noosfere / Uspехи sovremennoj biologii. – 1944. – no.18, Issue 2. pp. 113 – 120 (in Russian).
19. Vernadskij V.I. Filosofskie mysli naturalista. – M.: Nauka, 1988. – 520 p. (in Russian).
20. Vernadskij V.I. Nauchnaja mysl' kak planetnoe javlenie. – M.: Nauka, 1991. – 273 p. (in Russian).
21. Moiseev N.N. Algoritmy razvitija. – M.: Nauka, 1987. – 304 p. (in Russian).
22. Moiseev N.N. Kak daleko do zavtrashnego dnja.... – M.: MNJePU, 1997. – 426 p. (in Russian).
23. Trudy N.N. Moiseeva po voprosam sovremenного obrazovanija. – M.: izd-vo MNJePU, 2012. – 213 p. (in Russian).
24. Shugrin S.M. Kosmicheskaja organizovannost' biosfery i noosfery. – Novosibirsk: Nauka, 1999. – 496 p. (in Russian).
25. Forrester Dzh. Mirovaja dinamika. – M.: OOO AST, 2003. – 379 p. (in Russian).
26. Averin G.V. Ob osnovanijah sistemodinamiki // Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii v naukah o prirode i obshchestve. Doneck: DonNTU. – 2011, no.1. – pp. 6 – 52 (in Russian).
27. Averin G.V. O fundamental'nyh osnovah sistemodinamiki: opytnye fakty, metodologija, prilozhenija // Intellektual'nyj analiz informacii. – K.: NTU “KPI”, 2011, – pp. 152 – 169 (in Russian).
28. Averin G.V. Sistemodinamika. – Doneck: Donbass, 2014. – 403 p. (in Russian).
29. Kondrat'ev N.D. Mirovoe hozjajstvo i ego konjunktury vo vremja i posle vojny. – Vologda, 1922. – 258 p. (in Russian).
30. Kondrat'ev N.D. Bol'shie cikly konjunktury / Voprosy konjunktury. – 1925. – Vyp.1, T.I. – pp. 28 – 79 (in Russian).
31. Kondrat'ev N.D. Osnovnye problemy jekonomicheskoy statiki i dinamiki: Predvaritel'nyj jeskiz. – M.: Nauka, 1991. – 567 p. (in Russian).
32. Kondrat'ev N.D. Bol'shie cikly konjunktury i teorija predvidenija. – M.: Jekonomika, 2002. – 767 p. (in Russian).
33. Gidlevskij A.V. Paradoksy antropnogo kosmologicheskogo principa // Vestnik Omskogo universiteta, 2007, no.3. – pp. 60 – 67 (in Russian).
34. Anoprienko A.J. Kosmojekologija i kosmoantropnyj princip // Jekogeosofskij al'manah Mudrost' doma Zemlja: O mirovozzrenii XXI veka. Rossijsko-ukrainskoe izdanie. – Sankt-Peterburg – Doneck, 2007. – pp. 128 – 135 (in Russian).
35. Martino Dzh. Tehnologicheskoe prognozirovanie. – M.: Progress, 1977. – 592 p. (in Russian).
36. Magee C.L., Devezas T. C. How many singularities are near and how will they disrupt human history? // Technological Forecasting & Social Change, Vol. 78. 2011, 8, pp. 1365 – 1378.
37. Buringh E., Zanden J. Charting the “Rise of the West”: Manuscripts and Printed Books in Europe, A Long-Term Perspective from the Sixth through Eighteenth Centuries // The Journal of Economic History, Vol. 69, no.2. 2009, pp. 409 – 445.
38. Aboukhalil R. The rising trend in authorship // The Winnower, 2014, <https://thewinnower.com/papers/37-the-rising-trend-in-authorship>.
39. Global Energy Assessment: Toward a Sustainable Future. – Cambridge: Cambridge University Press, 2012. – 93 p.
40. Janch Je. Prognozirovanie nauchno-tehnicheskogo progressa. – M.: Progress, 1970. – 568 p. (in Russian).
41. Bel'kind L.D. Istorija tehniki. – M.-L.: Gosjenergoizdat, 1956. – 491 p. (in Russian).
42. Sotnikov E.A. Zheleznye dorogi mira iz XIX v XXI vek. – M.: Transport, 1993. 200 p. (in Russian).

43. Mjeloun M. The Intel: kak Robert Nojs, Gordon Mur i Jendi Grouv sozdali samuju vlijatel'nuju kompaniju v mire. – M.: Jeksmo, 2015. – 680 p. (in Russian).
44. Tung H., Gupta A. Personal'nye komp'yutery // V mire nauki, 1983, no.8. pp. 52 – 65 (in Russian).
45. Anoprienko A.J. Na poroge informacionnogo obshhestva // Doneckij politehnik. – 1998. no.3. – p. 8 (in Russian).
46. Transcript: Pat Gelsinger Keynote with special guest appearance by Gordon Moore // PRESS KIT – Intel Developer Forum, September 18 – 20, 2007. – 68 p.
47. Bogapov G – 50 let – zakonu Mural' Itnews, 15 iyunja 2015 (in Russian).
<http://itnews.com.ua/analytics/524.html>.
48. Goldovskij B.I. Pochemu do sih por ne osushhestvilsja prognoz R.L. Bartini // Metodolog, 2012. (in Russian).
<http://www.metodolog.ru/node/1578>.
49. IEEE Industry Connections Ethernet Bandwidth Assessment // IEEE 802.3 BWA Ad Hoc Report, 19th July 2012. – 40 p.
50. Hecht J. Is Keck's Law Coming to an End? // IEEE Spectrum, 2016,
<http://spectrum.ieee.org/semiconductors/optoelectronics/is-kecks-law-coming-to-an-end>.

Аноприєнко О.Я. «Системодинаміка техносфери: як виміряти технічний прогрес». Системодинаміка техносфери може розглядатися як поєднання періодичних і експоненціальних закономірностей росту. Основною періодичної компоненти може служити модифікована концепція хвиль Кондратьєва. Суть модифікації при цьому полягає в прив'язці хвиль до 50-річних періодичних коливань зі змінною амплітудою в межах 500-літніх періодів. Аналіз великого обсягу реальних історичних даних підтверджує доцільність і достатню продуктивність такої моделі як мінімум при розгляді розвитку техносфери на протязі останнього тисячоліття. Експонентну складову запропоновано кількісно оцінювати на базі універсального показника швидкості зростання S . При цьому в якості базової шкали пропонується використовувати ту ж шкалу, яка використовується для опису різних закономірностей зростання ноотехносфери. Це дозволяє наочно порівнювати інтенсивність процесів розвитку в різних областях техніки з інтенсивністю прогресу в комп'ютерних технологіях, де в даний час спостерігаються найвищі та стійкі темпи зростання.

Ключові слова: системодинаміка, техносфера, періодичні процеси розвитку, експоненціальне зростання, закономірності розвитку технічних систем, швидкість технічного прогресу, узагальнений закон Мура.

Anopriyenko A. “Systemdynamics of technosphere: how to measure the technical progress”. System dynamics of technosphere can be presented as a combination of periodic and exponential growth patterns. The basis of the periodic component can be modified concept of Kondratieff waves. The essence of the modification is the combination of 50-year periodic oscillations with variable amplitude within a 500-year period. Analysis of a large volume of real historical data confirms the feasibility and efficiency of this model, sufficient at least when considering the development of a technosphere over the last millennium. Exponential component offered to quantify on the basis of universal indicator S . In this case the growth rate as the base of the scale is proposed to use the same scale, which is used to describe different patterns of growth for nootechnosphere. This allows simple comparing of the intensity of development processes in various fields of technology to the intensity of progress in computer technology, which currently has the highest and sustainable growth.

Keywords: system dynamics, technosphere, periodic processes of exponential growth, patterns of development of technical systems, the speed of technical progress, a generalization of Moore's Law.

Статья поступила в редакцию 22.06.2015
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук Г.В. Авериньым

Раздел 2

Прикладной системный анализ и моделирование

Событийная модель технологического объекта в системах реального времени

Достлев Ю.С., Чередникова О.Ю.

Донецкий национальный технический университет
dostlev@cs.dgtu.donetsk.ua, olga.donntu@gmail.com

Достлев Ю.С., Чередникова О.Ю. «Событийная модель технологического объекта в системах реального времени». Выполнен анализ особенностей параметрического представления технологических процессов в среде системы реального времени, как основы построения АСУ ТП. На основе анализа особенностей параметрической оценки состояний процессов предложена модель отображения текущих состояний технологических процессов на основе обработки двух множеств событий. Основой декомпозиции событий на два подмножества предложено использовать их функциональную значимость в среде контролируемых процессов и особенности инициализации их обработки в среде вычислителя системы реального времени. В соответствии с предложенной моделью строится системное и проблемное программное обеспечение системы реального времени. Рассмотрены вопросы синхронизации алгоритмической обработки состояний контролируемых технологических процессов в соответствии с особенностями событийного моделирования процессов. Выполнен анализ форматов представления, а также организации счета и учета параметров времени в среде алгоритмической обработки системы реального времени.

Ключевые слова: система реального времени, управление обработкой состояний технологических объектов, параметры систем реального времени, решение задачи реального времени, супервизор задач реального времени.

Введение

Системы реального времени (СРВ) являются аппаратно – программной основой построения АСУ технологическими процессами (ТП). В среде СРВ решается единая задача, в контур которой входит обработка совокупности параметров, обеспечивающих получение достоверной оценки текущего состояния технологического процесса. Совокупность существенных параметров технологического процесса образует модель контролируемого технологического объекта.

Текущее состояние процесса может быть представлено двумя множествами параметров:

– параметры, отображающие количественные характеристики текущего состояния объекта в рамках текущей конфигурации модели;

– множество параметров, характеризующих моменты и направления изменения структуры модели, описывающей процессы в объекте.

Параметры каждого из этих множеств функционально различны и их особенности существенно влияют на их алгоритмическую обработку при решении задачи контроля и управления процессами в объекте. Количественные параметры выступают в роли значений переменных в математическом описании модели объекта, а качественные должны быть учтены в изменении структуры описания процессов. В соответствии с этим

можно говорить о множестве моделей, переходы между которыми аналогичны изменениям состояний управляющего автомата. В соответствии с представлением модели процессов в виде ориентированного графа состояний, необходимо рассмотреть множества событий, которые позволяют выполнять обработку параметров процессов в рамках некоторого состояния и множество событий, каждое из которых инициирует переход моделирующей среды в новое состояние.

Модели и состояния технологических процессов в среде системы реального времени

В СРВ информационное взаимодействие среды алгоритмической обработки с параметрами объекта всегда реализуется как отображение состояния объекта на принятую для него модель. Выполнение алгоритмической обработки параметров в процессе решения единой задачи контроля и управления всегда в явном или неявном виде привязано к параметрам моментов реального времени в оценке текущих состояний объекта (рис. 1).

Алгоритмическая обработка в среде цифровых процессоров представляет собой последовательность шагов обработки текущих состояний объекта в соответствии с принятой его математической моделью.

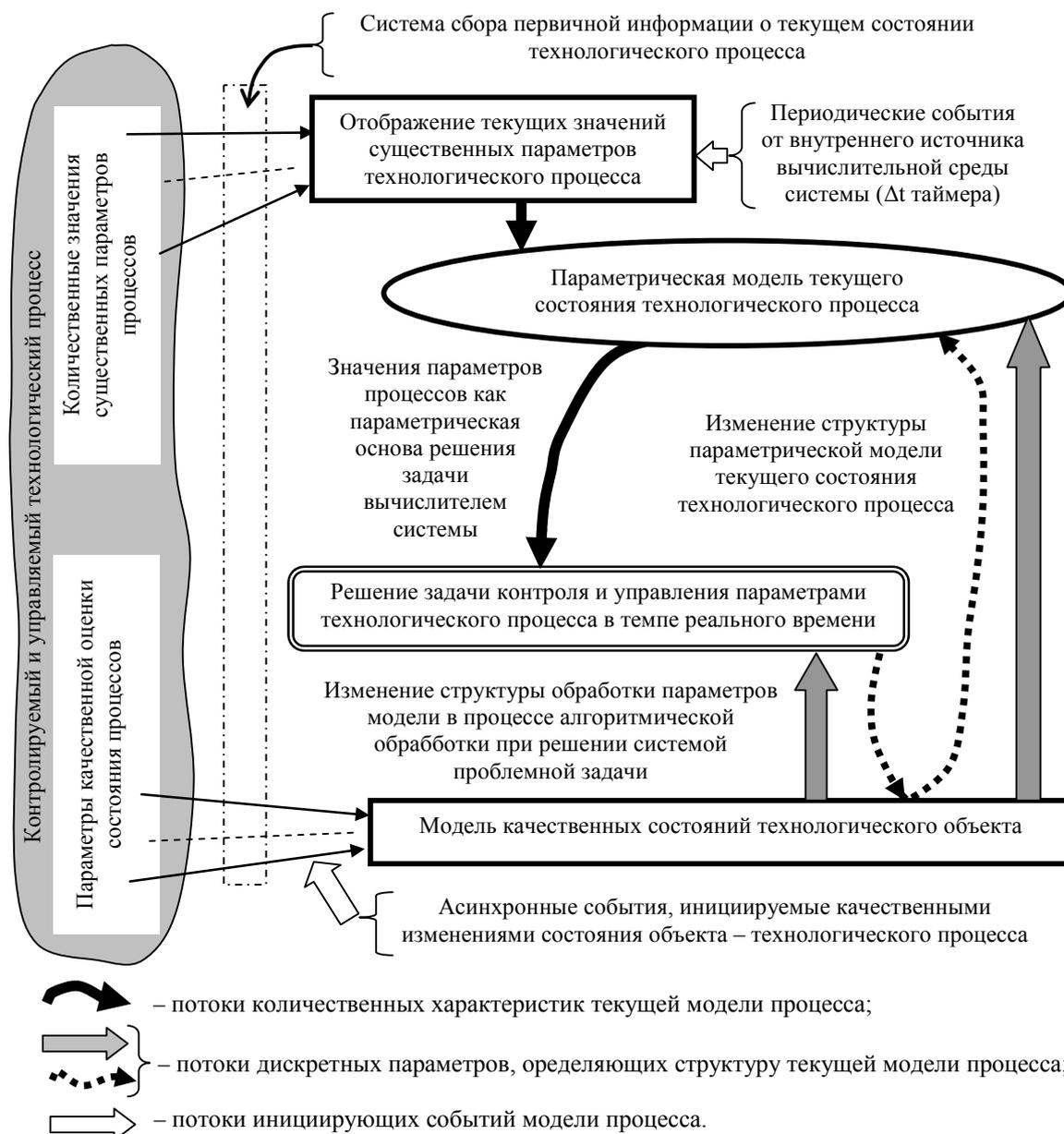


Рисунок 1. – Структура событийной модельной поддержки решения задачи в среде системы реального времени

Инициализация каждого из шагов в большинстве случаев требует завершения алгоритмической обработки предыдущего шага. Моменты планового начала алгоритмической обработки отдельных шагов могут инициироваться синхронно или асинхронно по отношению к организации счета времени в системе. Каждый из этих способов имеет свои достоинства и недостатки.

При асинхронной реализации вычислений удастся достичь минимального значения длительностей шагов, а соответственно и минимальных значений интервалов дискретизации контроля текущих состояний объекта, но затруднено численное

представление значений моментов времени оценки текущих состояний, а соответственно и моментов времени, характеризующих начала шагов обработки. Длительности интервалов дискретизации времени информационного взаимодействия с состояниями объекта зависят от длительностей интервалов выполнения расчетов на каждом из шагов.

При синхронном способе инициализации вычислений моменты времени оценки состояний объекта, а соответственно и выполнения шагов расчетов, всегда кратны интервалам времени, которые назначаются из среды системного программного обеспечения СРВ с учетом особенностей дискретизации

параметра времени. Таким образом, интервалы дискретизации в обработке текущих состояний не имеют непосредственной привязки к длительностям интервалов выполнения алгоритмической обработки на каждом из шагов, что резко упрощает учет параметров времени при реализации вычислений на каждом из шагов, и позволяет оптимизировать длительности интервалов самих шагов обработки.

События, модели и учет реального времени в системе

Достоверная оценка текущих состояний объекта на каждом из шагов выполняется с привязкой к некоторой модели объекта в совокупности с множеством существенных параметров, достаточных для достижения требуемой точности решения единой задачи контроля и управления. Все существенные параметры объекта обладают свойством непрерывности во времени.

Периодическое выполнение шагов обработки параметров объекта позволяет реализовать учет непрерывного изменения состояния объекта и соответственно корректно решать единую задачу контроля и управления.

Структурные особенности математической модели во многом зависят от особенностей протекания технологических процессов в объекте и в большинстве случаев полная математическая модель объекта обладает свойством переменности структуры. Моменты изменения структуры модели объекта всегда можно ассоциировать с некоторым множеством дискретных событий в среде объекта, которые отражаются в вычислительной среде соответствующим множеством дискретных сигналов. Характерной особенностью моментов изменения структур объектов является их асинхронность во времени и в большинстве случаев недетерминированность в параметрической области (рис. 2).

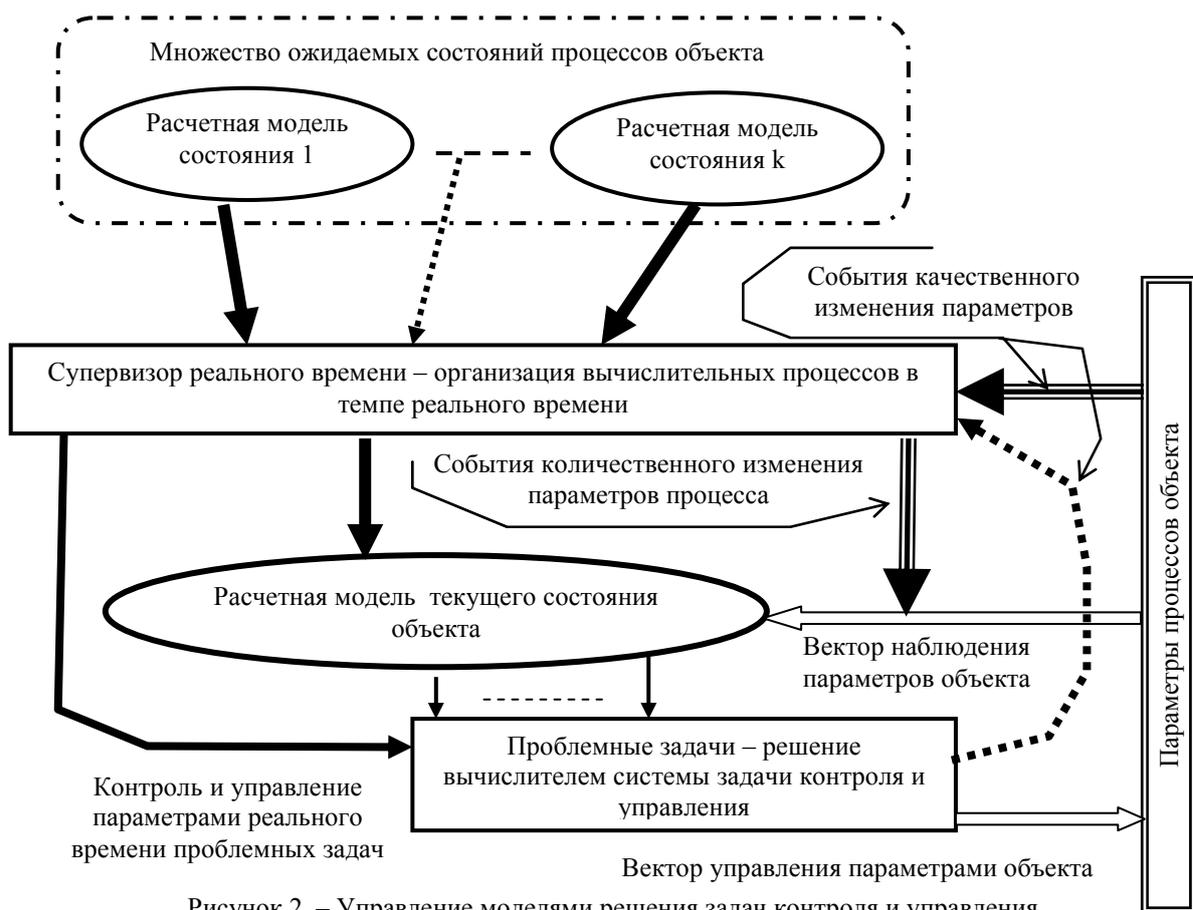


Рисунок 2. – Управление моделями решения задач контроля и управления в системе реального времени

Таким образом, полная модель состояния технологического объекта может быть представлена в виде некоторого вида модели текущего состояния, структура и параметры

которой управляются средствами системного программного обеспечения – супервизором реального времени на основе совокупности

множества априорно определенных в системе параметрических моделей процессов.

Событиями, инициирующими изменения текущей модели, являются параметры качественного изменения процессов в объекте, а событиями адаптации текущей модели настройки – ее текущие значения наблюдаемых параметров объекта. Таким образом, управление моделями решения задачи контроля и управления определяется двумя видами событий:

– периодические события, учитывающие количественные изменения параметров, которые позволяют достоверно выполнить оценку текущего состояния объекта в рамках реализации ранее используемой математической модели;

– асинхронные события, характеризующие качественные изменения параметров объекта, требующих изменения структуры математической модели в вычислительной среде.

Выводы. Организация управления модельным пространством СВВ средствами системного ПО

Представление множества возможных состояний объекта в виде ориентированного графа моделей позволяет решать две задачи системного программирования: управление информационным взаимодействием прикладной вычислительной среды с параметрами процессов объекта и обеспечить достоверное отображение текущих состояний технологических процессов на алгоритмическую структуру прикладной решающей среды (рис. 3).

Все виды событий модели в среде вычислителя обрабатываются множеством назначенных проблемных задач. Организация вычислительного процесса в соответствии с требованиями к обработке модельных событий возлагается на системное программное обеспечение (ПО) СВВ. Ядром системного ПО в структуре СВВ является супервизор реального времени. Информационно-параметрическая база супервизора позволяет реализовать индивидуальную настройку соответствия параметров событий модели и их обработку проблемными задачами.

Составляющие множества событий качественных изменений в объекте в ряде случаев могут инициироваться не только непосредственно из среды объекта, но и формироваться в вычислительной среде в процессе реализации текущего шага. То есть такие события могут иметь синхронную привязку аналогично периодическим событиям.

Способ генерации таких событий определяется особенностями инициирующих параметров и физическими возможностями их формирования с использованием инициативных датчиков в системе сбора параметров объекта или программно – вычислительными средствами в рамках среды текущей модели.



Рисунок 3. – Граф моделей технологического процесса с событийным управлением переходами:

$S_1 \div S_n$ – состояния моделей;
 $P_1 \div P_n$ – события параметрического изменения текущей модели без изменения состояния;
 $\{P_{j_m}\}$ – события изменения состояния модели;
 $C_1 \div C_j$ – первичные асинхронные события из среды объекта;
 T_m – таймер системы.

В первом случае обеспечивается минимальная длительность задержки между изменениями в состоянии объекта и их учете в изменении структуры вычислительной модели. На аппаратно – программном уровне системы это обеспечивается асинхронной обработкой физических сигналов прерываний с назначением требуемого уровня приоритетов.

Во втором случае величина задержки по времени между изменениями параметров текущего состояния объекта и его учете в изменении структуры модели объекта может достигать значения интервала периодической обработки в сумме с максимальным допустимым значением задержки обработки.

При построении событийной модели технологического объекта учитываются уровень точности имеющихся на данный момент математических описаний процессов в объекте, а также способы получения совокупности информации о текущих значениях параметров объекта.

Список литературы

1. Достлев Ю.С. Особенности формирования свойств модулей обработки периодических событий в системах реального времени // Системный анализ и информационные технологии в науках о природе и обществе. – №1(6)–2(7), 2014. – С. 117 – 120.
2. Достлев Ю.С. Повышение информационной надежности оценки текущего состояния объекта автоматизации // Системный анализ и информационные технологии в науках о природе и обществе. – №1(4)–2(5), 2013. – С. 96 – 99.
3. Лапко В.В., Чередникова О.Ю. Математическая модель переходных аэродинамических процессов в вентиляционных сетях с сосредоточенными и распределенными параметрами // Научные труды ДонНТУ, серия Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем. – №7 (150), 2008. – С. 40 – 51.
4. Дж. Мартин. Программирование для вычислительных систем реального времени. – М.: Наука, 1975.
5. Dostlev Y.S. Osobennosti formirovaniya svoystv modulej obrabotki periodicheskikh sobytij v sistemah real'nogo vremeni [Features of formation properties of processing units periodic events in real-time systems] // Sistemnyj analiz i informacionnye tekhnologii v naukah o prirode i obshchestve, no1(6)–2(7). 2014. pp. 117 – 120.
6. Dostlev Y.S. Povyshenie informacionnoj nadezhnosti ocenki tekushchego sostoyaniya ob"ekta avtomatizacii [Improving of information reliability for assessment of the current state of the automation object] // Sistemnyj analiz i informacionnye tekhnologii v naukah o prirode i obshchestve, no1(4)–2(5). 2013. pp. 96 – 99.
7. Lapko V.V., Cherednikova O.Y. Matematicheskaya model' perekhodnyh aehrodynamiceskikh processov v ventilyacionnyh setyah s sosredotochennymi i raspredelennymi parametrami [A mathematical model of transient aerodynamic processes in ventilation systems with concentrated and distributed parameters]. // Nauchnye trudy DonNTU, seriya Problemy modelirovaniya i avtomatizacii proektirovaniya dinamicheskikh sistem, no7(150), 2008. – pp. 40 – 51.
8. Dzh. Martin. Programmirovaniye dlja vychislitel'nyh sistem real'nogo vremeni [Programming for real-time computing]. – М.: Nauka, 1975.

References (transliteration)

1. Dostlev Y.S. Osobennosti formirovaniya svoystv modulej obrabotki periodicheskikh

Достлев Ю.С., Чередникова О.Ю. «Подієва модель технологічного об'єкта у системах реального часу». Виконано аналіз особливостей параметричного уявлення технологічних процесів у середовищі системи реального часу, як основи побудови АСУ ТП. На основі аналізу особливостей параметричної оцінки станів процесів запропонована модель відображення поточних станів технологічних процесів на основі обробки двох множин подій. Основою декомпозиції подій на дві підмножини запропоновано використовувати їхню активну роль у середовищі контрольованих процесів і особливості ініціалізації їхньої обробки у середовищі обчислювача системи реального часу. Відповідно до запропонованої моделі будуватиметься системне та проблемне програмне забезпечення системи реального часу. Розглянуто питання синхронізації алгоритмічної обробки станів контрольованих технологічних процесів відповідно до особливостей подієвого моделювання процесів. Виконано аналіз форматів представлення, а також організації розрахунку і обліку параметрів часу в середовищі алгоритмічної обробки системи реального часу

Ключові слова: система реального часу, управління обробкою станів технологічних об'єктів, параметри систем реального часу, рішення задачі реального часу, супервізор задач реального часу.

Dostlev Y.S., Cherednikova O.Y. “Event model of technological object in real-time systems”. The analysis of parametric representation of technological processes features in the real-time systems environment as the basis of APCS have been performed. Due to this analysis the model of technological processes current states reflection at the basis of two event sets have been offered. As the basis for event decomposition into two subsets is offered to use their functional significance in the controlled processes environment and initialization features of their processing in the environment of real-time systems' calculator. System and problem software for real-time systems is built in accordance with the proposed model. The article considers the questions of the timing of algorithmic processing states of the controlled processes according to features of processes event simulation. The analysis of the presentation formats, as well as the organization of time tracking within the algorithmic processing of real-time systems have been done.

Keywords: real time system, processing management of technological object states, the parameters of real-time systems, the real-time tasks supervisor.

Статья поступила в редакцию 05.06.2015

Рекомендована к публикации канд. техн. наук А.В. Звягинцевой

The use of natural science methods for phenomenological models development in the social and human sciences

Zviagintseva A.V., Averin G.V.

anna_zv@ukr.net, averin.gennadiy@gmail.com

Zviagintseva A.V., Averin G.V. "The use of natural science methods for phenomenological models development in the social and human sciences". This paper is an attempt to outline the ways of the solutions to some common problems in social and human sciences fields related with observation or experience data describing. Such data usually are represented by three-dimensional data arrays in the form "objects-figures-time". The main purpose of this paper is to study the possibility of phenomenological models development establishing on the such data basis having different multidimensional field representation of quantitative information about objects and systems status. The creation principles and phenomenological models theory construction in the social and human sciences are proposed. The relations and equations for applied problems solving are obtained. As an example of natural science methods applying in social and human knowledge areas there was made the country's development comprehensive assessment with use of the United Nations Development Program database, which is based on the joint monitoring events analysis of four basic human development indicators (HDI).

Keywords: *Natural scientific methods, phenomenological model, socio-economic and environmental systems.*

Introduction

Nowadays there is a clear division of human knowledge, which is characteristic for natural and social (humanitarian, social) sciences. The essence of differences affects the foundation of these sciences and determines the process of scientific paradigms formation in their knowledge fields.

Statement of any analytical problem is to translate its verbal description into a formal one. The creation of methodologies, methods and formal modeling languages is a natural process of development of any science, as this makes it possible to organize empirical knowledge and understand better the essence of the observed phenomena and processes. However, the modeling process should not be an end in itself, the construction of theoretical models should be based on experience and practice otherwise in theories (even at the front edge physics) there may be significant problems [1]. It is known that new fundamental discoveries are mostly established by experiment, experience and practice and are explained by the theory.

In many sciences in connection with the development of computer technology, various systems for collecting and processing information, experimental and statistical data accumulate very rapidly. In order to study this information, researchers are developing methods of analysis data that would be versatile in relation to systems of different nature. By this time in this field a whole

research area has been already formed which focuses on use of scientific research methods in Humanities. Probably, this research area, which is closely associated with systems analysis and General systems theory, is the most promising path to a new modeling paradigm.

While in theory of the modeling systems a crisis is brewing the number of methods and tools for analysis and simulation is growing at a very fast rate, and experimental base for their approbation is far behind. It cannot be said that data are not enough, often these data are not structured and represent of diverse information, which requires significant labor processing and data assimilation. The academician P.L. Kapitsa pointed out to the existence of such problems in physics fifty years ago, and he saw a symptom of a serious disruption of normal development of science in the ties between theory and experiment [2]. It has long been known that the development of an empirical base of scientific disciplines is formed more slowly than the researchers' aspirations in the construction of theoretical models which are not always confirmed by experience and practice.

That's why, in order to obtain a significant result in the application of scientific methods of research in the Humanities, it is necessary to return to scientific methods, which provide a close connection between theory and experiment. Here we can talk, primarily, about proven by generations of scientists phenomenological research methods

that are perfectly applicable to structured data sets characterizing the physical, biological, social and public processes.

Problem Statement

Today mathematization of biological, ecological, social Sciences and Humanities does not touch their initial positions, methodologies patterns, i.e. foundations of these sciences. If in economics mathematical and computer models are fairly widely used, but, for example, in philosophy and history the use of formalized models is rather rare. The possibility of the use of mathematical methods in philosophy very often provokes formal doubts and objections in many researchers' minds, even at the level of the discussion. The reason for this is that philosophy, like mathematics, largely determines the appearance of modern science and is a tool for the study of universal patterns in nature and society, therefore, the methodology of these Sciences cannot fundamentally have single research methods, except some general logical approaches.

However, recently certain preconditions have been already created for the quantitative approaches extension of the scope including simulation and mathematical models, in history, archaeology, anthropology, psychology, sociology and linguistics. This contributes to the accumulation of empirical data in these Sciences.

The difference between paradigms of natural and humanitarian knowledge is largely related to the degree of formalization of the studied processes and phenomena and, as a consequence, with the presentation of the model descriptions in the respective Sciences. One of the most urgent problems of modern science is concerned with the search for the answer to the question: is it possible a high degree of formalization in the description of objects and phenomena in the Humanities? In this paper an attempt is made to outline the ways of solving some general problems in the field of systems theory. That's why, the aim of this article is to find a system-wide principles, which would open up the opportunities for the formalized models creation in the field of social Sciences and Humanities.

Some principles of creating theories in subject areas

The original principles of scientific knowledge (the determinism of phenomena; the truth of theories and models, which are proven with practice; the relativity of knowledge) are initially based on pervasive observation of events that underlie the receipt of any data, facts and laws of objective reality. Determinism is the doctrine about the universal and natural connections of phenomena

and processes in the surrounding world. Indeterminism comes from the lack of any connection between phenomena. Both principles give the opposite point of view about the nature of the relationship of events, processes and phenomena in time. Of course, in nature the universal connection between phenomena cannot be described only in simple cases and extremes, an organic unity of these opposing points of view should be observed.

During studying this problem in relation to the modeling process, we base on the principle of determinism in the model descriptions. It is an accepted fact that determinism is inherent in the modeling – any credible physical, mathematical or algorithmic model describes the logical connection of the studied phenomena and processes, which may be both deterministic and probabilistic features.

Depending on the nature of these features in the description of systems there are two types of the causal link existence related to dynamic (deterministic) and statistical (probabilistic) laws. Historically this problem lies in the relationship between formalism and reality.

As the basis for establishing of any regularity is always an event, the distinction between the laws is regarding. This is due to the fact that any event in the strict sense of the word is always accidental, and in this case many significant events (deterministic events required) will determine the dynamic pattern, which is characteristic of predetermination. In turn, many random events (events that may occur or may not occur) will determine the statistical regularity that is characteristic of randomness.

Assumption whether dynamic or statistical regularities prevail in the process or phenomenon, is set on the basis of practical experience. The decision on selection of a reliable model is produced for a long time with practice, by trying many different models, while the experience does not confirm the best option of choice. In this case, general ideas are being formulated which are accepted by the scientific community. Many famous scientists see a new paradigm in the development of science in the synthesis of dynamic and statistical regularities of the objective reality. Thus, if statistical and dynamic patterns can be reduced to more general stochastic regularities, it is necessary to determine the criteria that would reflect this similarity. Therefore, based on the objectives set in this paper, we will try to find common features in the formation of characteristic events, which primarily reflect evolutionary processes in different systems [3].

Let's make the following assumptions. Firstly, as the dynamic and statistical regularities are the essence of the more general stochastic

regularities, the criterion of similarity should be determined on the basis of probabilistic beliefs about the feasibility of the event. That is, the criterion needs to take into account the relationship between events. Secondly, the basis of all models is the fundamental notion of mathematical analysis – the notion of a function. Thus, the studied problem is connected with use of probabilistic principles in the process of submitting functional dependencies.

In the simplest case, the notion of a function is given as: if the value x can take *arbitrary values*, and a certain rule is given, according to which specific values of the other quantities y are given in accordance with these values, in this case they say that y is a function of x and we write this relationship symbolically in the following way: $y = f(x)$. The modern definition of a function in terms of sets is: let for each *arbitrary number* x from a given set E there corresponds a certain number y denoted as $y = f(x)$, in this case they say, that the function $y = f(x)$ is determined on the set E .

If you imagine the target value x as an event, then, according to the highlighted phrases in the definitions: “*arbitrary values*”, “*arbitrary number*”, you can consider this event as equally possible. This indicates that the distribution of the variable x , as a probabilistic principle and premise for the model, will correspond to an uniform probability law. Consequently, an equally likely is the basic property of a dynamic pattern with its total original formulation in the frameworks of stochastic regularity. According to this fact, in a chosen space of variables different models (or other dependencies) developed by practice can be viewed as a simulation environment of a stochastic process that is observed in reality. The main features of this environment are an equally possible choice of values of the original independent variables and selection a set of the diverse functions for the simulation.

Thus, for the systems of very different nature, we come to the idea of a probability space for many variables, where elementary equally likely outcomes of selecting values from the original set of some independent variables are associated with not equally likely complex events for many other dependent variables and the relationship between these values is specified by defining a function on the original set.

In this case, the probability space represents a certain set of (Z, A, W) , which consists of the set Z (equally likely elementary events), of the class A of all subsets of Z (random complex events, observation or experience) and probability measure W , which is a real function and determines the relationship between the distributions on sets Z and

A . This probability measure W can be defined in terms of statistical or dynamic patterns, since, based on the definition of the function, it does not matter how correspondence between quantities has been determined. It follows that in terms of the concepts of probability space and a function it is possible to formulate a general stochastic pattern, which as special cases includes both dynamic and statistical regularities.

From the above it follows that the criterion of dynamic similarity and statistical regularities can be the probability of events observed upon the occurrence of different phenomena and processes in nature and society, as well as their probabilistic distributions of various kinds. However, further we will show that this is not the only value that can be used for phenomenological data analysis.

The main idea of this work is connected with the new methods of phenomenological analysis development of the data which are presented in the measurements time series form or various quantities observations. For a number of diverse nature systems, the formation of tabular-time data is possible. Usually the data have the table structure in the form of matrices “objects – parameters”, and multiple tables (t) is ordered according to time, such as years, months, hours, seconds, etc. As objects there are the same type of classes, for example, substances, organisms, species or individuals, products, devices, facilities, natural objects of one kind, technical systems, similar in production technology, specialized enterprises, cities, regions, countries, citizens of states or regions, etc. As parameters (indicators) that reflect the properties of certain types of systems can be various physical, chemical, biological, natural-resource, technological, socio-economic or identity values with quantitative measurement. For a specific object, each parameter in a table-temporary data array will be represented by a time series of experimental points of length t , which are specified with a certain time lag. In turn, each object at a specific point of observation is located in a certain state and is characterized by a set of parameters. Similar general approach allows to determine the state of an object as a set of its observed properties, the parameters of which are formed under the influence of environmental conditions at a particular point of time.

Suppose that for k of similar objects forming a certain nature system in a table-time data there is quantitative information about n of attribute parameters characterizing the various properties of this system. The list of attribute indices is determined by current views prevailing in the scientific community about the behavior of the studied system, correlation analysis or other methods of establishing the most significant

variables. Any set of n variables for parameters of properties sets n -dimensional space $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. The points of this space correspond to n -dimensional sets of values of all variables z_1, z_2, \dots, z_n . Thus, the state of any object in n -dimensional space at any moment of time will be displayed as multi-dimensional point $M = M(z_1, z_2, \dots, z_n)$, the process of changing the state of an object during the period of time – by multivariate curve that is described by a point $M = M(z_1, z_2, \dots, z_n)$ in this space. Let's consider a complex event A_j which represent simultaneous observation of several parameters and define that the state of a particular object at a given moment of time will be characterized not only by a set of parameters settings for this object, but by the observed event too. We assume that a probability of the event exists and can be determined. Let's call this the statistical probability as a probability of the state of the studied system. Statistical probabilities for a complex event A_j can be found using various algorithms of busting, grouping and counting frequencies of favourable events in the general sample of all observations [3]. The main condition for determining the statistical probability is due to the fact that the number of observations should be large enough, commensurate with the number $N = d \cdot f^p$, where f – the number of intervals of grouping data for one variable, which is usually taken equal to from 10 to 15; d – the number of experimental data on the same interval of grouping ($d = 5 - 7$); p – the number of parameters that form the event A_j .

The existence of statistical probabilities of events is the main probabilistic regularity of reality and connected with stability of relative frequencies of events. This property is true for systems of different nature and is a universal feature in the behavior of all systems. It should be noted that statistical probability of the most typical events that reflect the peculiarities in the change and development of specific systems, can act as some integrated characteristics of these systems. Therefore, for each n -dimensional point in space $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ different probabilities of salient events can be assigned to. You can go farther and assume that there are a variety of complex characteristics that determine the state of the systems with the parameters of properties. Similarly, to each n -dimensional point can be assigned some empirical values, which comprehensively reflect the state of objects and are closely associated with the parameters of properties. In general case, let's call such values as the empirical measure of the system states. We assume that the empirical measure W

can be determined in the experiment on the basis of some procedures of measurements, evaluations or calculations. The value W cannot be a parameter of one of the system properties z_1, z_2, \dots, z_n . Different complex values can be as the empirical measure, for example, the probability of different characteristic events, the amount of heat the empirical temperature, the value of the objects, various indices defined by experts, experienced quantities, which have a close relationship with many options, system properties, etc. Thus, on the basis of variables z_1, z_2, \dots, z_n it is possible to form an n -dimensional coordinate space $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, in which the possible states of the system form a certain area Q_n , covering all observable points in the experience. Each point M_i you can put into correspondence with some empirical measure of the state W_i .

The basic principle, which is accepted during construction data models consists of the continuity of the model environment.

Therefore, the first fundamental hypothesis is that we assume the continuity of the area Q_n . It means that in the area of states Q_n there are an infinite number of states for a general set of system objects of a certain nature and points of states $M = M(z_1, z_2, \dots, z_n)$ continuously fill this area. We also assume that an experienced points $M_i(z_1, z_2, \dots, z_n)$ are a limited sample of observations from a given general plurality. The second fundamental aspect lies in the acceptance of the hypothesis of the existence of some empirical measure for a comprehensive assessment of states of the studied system of a certain nature. For construction data models we also accept the hypothesis about the continuity of the empirical measure in the area Q_n in the form of a scalar field $W = W(M)$. All of the above allow us to formulate the following axioms.

1. Let in the state space of some system Q_n for each point M there is a corresponding number W , which will be called the empirical measure of the system state.

2. The value $W = W(M)$ is a function of the point and forms a scalar field, which is continuous in the area Q_n .

We suppose that in the area Q_n you can set continuous analytical function $\theta = \theta(z_1, z_2, \dots, z_n)$ on the basis which the mathematical model will be formed. For the known function $\theta = \theta(z_1, z_2, \dots, z_n)$ and the values of the variables z_1, z_2, \dots, z_n in the area Q_n you can construct one more scalar field, which we will call the simulation environment. On

this basis, in the general case to construct a phenomenological model of some system we formulate the axiom.

3. Let in the area of states Q_n of some system the scalar fields of values W and θ are definitely related. If in the neighborhood of any point M the object of the system implements some process l , then for line process l the ratio $dW = c_l \cdot d\theta$ is true, where c_l – empirical quantities which are the process functions.

In papers [3 – 5] it is shown that the axioms (1)–(3) are enough for phenomenological descriptions of the data, presented in tabular and temporal arrays of information. These descriptions are associated with multidimensional Pfaff's equations of the form:

$$dW = c_1 \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z_1} dz_1 + c_2 \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z_2} dz_2 + \dots + c_n \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z_n} dz_n, \quad (1)$$

where the phenomenological values c_l are determined according to observation data. Solutions of Pfaff's equations allow to obtain the general integrals, which in its form are close to the functions of the state and are widely used in thermodynamics – they are entropy and thermodynamic potentials. Entropy is a characteristic function of the state space of the system. Parametrically entropy is the length of the arc of some vector line of a field of directions which is generated by the system state W empirical measure's scalar field [3]. In the multidimensional area Q_n there is also a general integral (potential) of the form $U(z_1, z_2, \dots, z_n) = C$, which is a surface that is orthogonal to the vector lines of entropy. In general case, the modeling environment in the area Q_n can be represented in the form of various functional dependencies with respect to attribute parameters: multiplicative, power, additive, expert or other dependencies which belong to classes of homogeneous or multiplicative functions. In paper [3] it is shown that under these conditions the simulation environment θ in the area Q_n allows to use of multidimensional quasilinear PDEs of the first order, which are closely related to Pfaff's equations of the form (1). For example, for the case $\theta = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n / (z_{1_0} \cdot z_{2_0} \cdot \dots \cdot z_{n_0})$ entropy s and potential U for the equation (1), are defined as:

$$s - s_0 = c_1 \cdot \ln \left(\frac{z_1}{z_{1_0}} \right) + c_2 \cdot \ln \left(\frac{z_2}{z_{2_0}} \right) + \dots + c_n \cdot \ln \left(\frac{z_n}{z_{n_0}} \right), \quad (2)$$

$$U - U_0 = \frac{(z_1 - z_{1_0})^2}{c_1} + \frac{(z_2 - z_{2_0})^2}{c_2} + \dots + \frac{(z_n - z_{n_0})^2}{c_n}, \quad (3)$$

where $z_{1_0}, z_{2_0}, \dots, z_{n_0}$ – some reference state's parameters. As a simulation environment different functional dependence can be used, for example, multidimensional geometric probability, multiplicative power function according to the parameters z_1, z_2, \dots, z_n , the index of the area

$$\theta = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k_0})^2, \quad \text{based on the geometric}$$

representations of the homogeneity of the area Q_n , etc.

Entropy s and potential U can be taken as generalized criteria for assessing the state of systems of different nature in a multidimensional space Q_n . Their most important feature is that they are functions of the system state under condition of the existence of a scalar field of empirical measure W . The change of these functions depends only on the initial and final states of the system and does not depend on the path of the transition of the system between these states. Q_n .

Thus, an axiomatic theory of phenomenological analysis of data for systems of different nature is based on the postulation of existence of a multidimensional scalar field of empirical measure W and the description of the processes of change and development of systems through connection of value W with the simulation environment θ of the form $dW = c_l \cdot d\theta$. The values c_l are determined with the help of table-temporary arrays of experimental data. It shows that the proposed method is closely related to the logic construction of the theory of thermodynamics, as originally phenomenologically determined values c_l are introduced, which characterize the processes of change and development facilities. The application of this theory is limited by systems for which there are empirical measures of a comprehensive assessment of conditions and descriptions, that have different field representation of state space, can be formulated. The feature of the proposed approach lies in the fact that the initial hypothesis can be accepted or rejected in the result of available data experience or observations processing that characterize the system behavior.

Phenomenological Data Model Example

The use of this approach is demonstrated on the elaboration of methods of assessment of human development which is alternative to the method of calculating the human development index of the UN development Programme (UNDP).

In 2010 the UNDP methodology for calculating of the human development index was changed [7]. Firstly, the basic calculated dependencies were changed that have been constructed by expert. Secondly, as the attribute variables to calculate the index the following indicators were used: the average period of study

(z_1), years; the expected duration of study (z_2), years; gross national income (GNI) per capita in terms of purchasing power parity (PPP) in USD (z_3); life expectancy (z_4), years. We also take these indicators as attribute variables. To solve the problem, we will use databases of Reports of human development [6, 7], which cover data of the world countries from 2008 to 2013. The algorithms for calculating frequencies of favorable events [3] provide an opportunity to find the probability value of the system state, based on the available array of experimental data. The statistical probability w is calculated in the whole group of objects (169 countries) for all experimental data.

To search nonlinear relationships between variables we use the method of probit analysis. Taking into account (2) we correlate the obtained probability w with distributions of attribute variables in the array of experimental data and as the result of which we will have the following regression dependence of the probability from entropy of the system state:

$$\text{Pr ob} = -3,6717 + s; \quad w = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^{\text{Pr ob}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt;$$

$$s = 0,6525 \cdot \ln\left(\frac{z_1}{z_{1_0}}\right) + 0,9291 \cdot \ln\left(\frac{z_2}{z_{2_0}}\right) +$$

$$+ 0,0245 \cdot \ln\left(\frac{z_3}{z_{3_0}}\right) + 2,2575 \cdot \ln\left(\frac{z_4}{z_{4_0}}\right) \quad (4)$$

The correlation coefficient of the association (4) was 0,90 (fig. 1).

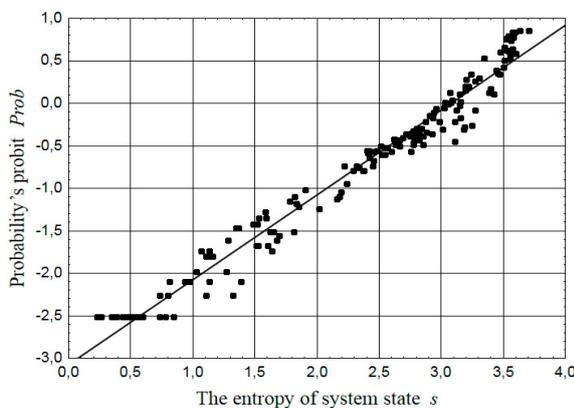


Figure 1. – The dependence of the statistical probability of the state w from entropy s for the shared values of the observed attribute variables

$$p_1, p_2, p_3, p_4$$

Attribute variables were related to values $z_{1_0}, z_{2_0}, z_{3_0}, z_{4_0}$, which correspond to a selected reference state. As a reference state the indicators of the country Niger development in 2008 were taken, as one of the most underdeveloped countries, which, in particular, are equal to: $\rho_{1_0} = 1,4$ years; $\rho_{2_0} = 4,3$ years; $\rho_{3_0} = 675$ \$; $\rho_{4_0} = 52,5$ years.

Taking into account the probabilistic evaluation of complex joint events associated with the joint monitoring indicators z_1, z_2, z_3, z_4 , based on the definition of potential values U , development for every world country was ranked, based on the level of human development of the countries during the period 2008 – 2013. The results of ranking of the countries are given in table 1.

The first ten countries with the highest level of development in 2013 are Qatar, Liechtenstein, Kuwait, Singapore, Brunei, Norway, Luxembourg, the UAE, Switzerland and Hong Kong. It is seen that among twenty countries (G20) in this list there is no any country from G20, and from the EU – there is only Luxembourg. According to the pace of development for the period 2008 – 2013 the top ten of the fastest growing countries include Qatar, Kuwait, Singapore, Brunei, Saudi Arabia, Switzerland, Liechtenstein, Luxembourg, Hong Kong and Iceland.

The ten countries with the lowest level of development are Ethiopia, Togo, Guinea, Guinea-Bissau, Mozambique, Niger, Liberia, Malawi, Burundi and the Central African Republic. All these countries are in Africa.

According to the pace of development in 2008 – 2013, the most lagging countries were: Uganda, Niger, Central African Republic, Malawi, Solomon Islands, England, Equatorial Guinea, Greece, Bahamas and Barbados. This list contains two European countries (England and Greece), which during the studied period there was a decrease in the specific GNI.

Russia took place number 44 in the ranking of the level of development in 2013, in its turn, Kazakhstan – 53, Belarus – 62, Ukraine – 97. According to the pace of development during 2008 – 2013 Russia occupied the 24th place, Kazakhstan – the 25th, Belarus – the 52nd, and Ukraine – the 95th. During the same period, Russia was ahead of Italy, France, Japan, England, Canada, Estonia in the pace of human development, however, lagged behind the US, Germany, Sweden, Lithuania, Latvia.

Ratings of countries in terms of development, identified by the method of calculation of human development index of UNDP, differ significantly from the rating, calculated on the basis of this approach (table 1). For most developed countries the UNDP methodology provides inflated ratings of level of development and many developing countries have low ratings.

All of this suggests that the human development index gives a more favorable integrated assessment for the countries of “Golden billion” (USA, Canada, Australia, Japan, EU countries) and less favorable for all other countries.

Table 1. – The values of the potential (U), its changes (ΔU) and the ratings of countries in the development processes of the countries in the world in 2008 and 2013

The World Countries	The potential of the country U (2013)	The potential change ΔU (2008 – 2013)	Ranks countries according to the proposed method		Countries' ranks according to the HDI of the UNDP methodology (2013)
			the level of development (2013)	the rate of growth (2008 – 2013)	
Norway	365995	56065	6	11	1
Switzerland	259015	116708	9	6	3
The USA	245219	46445	11	13	5
Germany	166119	54351	14	12	6
Canada	157264	23242	18	26	8
Singapore	469250	255069	4	3	9
Sweden	167274	44982	13	15	12
England	109843	-485,4	26	165	14
Japan	121041	13151	23	41	17
France	120260	14557	24	38	20
Italy	95662	17025	28	33	26
Greece	54522	-13679	39	167	29
Qatar	1269241	704098	1	1	31
Poland	41441	12999	49	43	35
Hungary	40482	13057	51	42	43
Latvia	44168	29103	45	20	48
Belarus	24179	9174	62	52	53
Romania	27282	12446	57	45	54
Russia	45899	25014	44	24	57
Turkey	30315	14329	55	39	69
Kazakhstan	33911	24475	53	25	70
Brazil	18266	8178	70	56	79
Georgia	4334	2101	103	99	79
Ukraine	6115	2220	97	95	83
China	11812	7084	80	62	91
India	2356	1380	116	106	135
Nigeria	2551	2153	114	98	152
Ethiopia	118,0	67,0	160	151	173
Niger	28,6	28,2	165	161	187

Conclusion

A phenomenological approach for the analysis and description of observations or experiences can be used in various subject areas where sufficient amounts of structured quantitative data are accumulated. Phenomenological models are characterized by a high level of formalization and versatility of the submission, they can be focused on the description of various problem-oriented arrays of quantitative information and allow you to create original principles and patterns for building theories. This approach has an importance for the development of the modeling theory, as it allows to offer objective research methods of objects and the systems of multivariate dimension, which include all the natural, biological and social systems.

References

1. Смолин Ли. Неприятности с физикой: взлет теории струн, упадок науки и что за этим следует / Перевод с англ. Penguin Book, London, 2007. – 226 с.
2. Капица П.Л. Эксперимент, теория, практика. – М: Наука, 1981. – 495 с.
3. Аверин Г.В. Системодинамика. – Донецк: Донбасс, 2014. – 405 с.
4. Аверин Г.В., Звягинцева А.В. Взаимосвязь термодинамической и информационной энтропии при описании состояний идеального газа // Системный анализ и информационные технологии в науках о природе и обществе. Донецк: Друк-инфо, 2013. – №1 (4) – 2 (5). – С. 46 – 55.

5. Аверин Г.В., Звягинцева А.В. Применение методов интеллектуального анализа данных при оценке развития Украины // Геотехническая механика. 2013. Выпуск 112. – С. 257 – 270. – Электр. ресурс URL: <http://geotm.dp.ua/index.php/ru/2013-god/vypusk-112> (12.06.15).
6. Human Development Reports (1990 – 2014 years). – Available at: <http://hdr.undp.org/en/reports/> (03.07.15).
7. Human Development Report 2010 “The real wealth of Nations: pathways to human development”. – 228 p.
3. Averin G.V. Sistemodinamika [Systemdynamik]. – Doneck: Donbass, 2014. – 405 p.
4. Averin G.V., Zvjaginцева A.V. Vzaimosvjaz' termodinamicheskoy i informacionnoj jentropii pri opisani sostojanij ideal'nogo gaza [The relationship of the thermodynamic and information entropy in the description of the ideal gas states] // Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii v naukah o prirode i obshhestve. Doneck: Druk-info, 2013. – no 1 (4) – 2 (5). – pp. 46 – 55.
5. Averin G.V., Zvjaginцева A.V. Primenenie metodov intellektual'nogo analiza dannyh pri ocenke razvitija Ukrainy [Application of data mining techniques for the assessment of Ukrain development] // Geotekhnicheskaja mehanika. – 2013. – Issue 112. – pp. 257 – 270. – Elektr. resurs. URL: <http://geotm.dp.ua/index.php/ru/2013-god/vypusk-112> (12.06.15).
6. Human Development Reports (1990 – 2014 years) – Available at: <http://hdr.undp.org/en/reports/> (03.07.2015).
7. Human Development Report 2010 “The real wealth of Nations: pathways to human development”. – 228 p.

References (transliteration)

1. Smolin Li. Neprijatnosti s fizikoj: vzlet teorii strun, upadok nauki i chto za jetim sleduet [The trouble with physics: the rise of string theory, the decline of science and what follows]. Perevod s angl. Penguin Book, London, 2007. – 226 p.
2. Kapica P.L. Jeksperiment, teoriya, praktika [Experiment, theory, practice]. – M: Nauka, 1981. – 495 p.
3. Averin G.V. Sistemodinamika [Systemdynamik]. – Doneck: Donbass, 2014. – 405 p.
4. Averin G.V., Zvjaginцева A.V. Vzaimosvjaz' termodinamicheskoy i informacionnoj jentropii pri opisani sostojanij ideal'nogo gaza [The relationship of the thermodynamic and information entropy in the description of the ideal gas states] // Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii v naukah o prirode i obshhestve. Doneck: Druk-info, 2013. – no 1 (4) – 2 (5). – pp. 46 – 55.
5. Averin G.V., Zvjaginцева A.V. Primenenie metodov intellektual'nogo analiza dannyh pri ocenke razvitija Ukrainy [Application of data mining techniques for the assessment of Ukrain development] // Geotekhnicheskaja mehanika. – 2013. – Issue 112. – pp. 257 – 270. – Elektr. resurs. URL: <http://geotm.dp.ua/index.php/ru/2013-god/vypusk-112> (12.06.15).
6. Human Development Reports (1990 – 2014 years) – Available at: <http://hdr.undp.org/en/reports/> (03.07.2015).
7. Human Development Report 2010 “The real wealth of Nations: pathways to human development”. – 228 p.

Звягинцева А.В., Аверин Г.В. «Применение естественнонаучных методов при разработке феноменологических моделей в общественно-гуманитарных науках». В данной работе делается попытка наметить пути решения некоторых общих задач в области общественных и гуманитарных наук, связанных с описанием данных наблюдения или опыта. Такие данные представляются чаще всего трехмерными массивами информации вида «объекты-показатели-время». Основная идея работы направлена на изучение возможности создания на основе таких данных феноменологических моделей процессов и явлений, отличающихся многомерным полемым представлением количественной информации о состоянии объектов и систем. Предложены принципы создания и теория построения феноменологических моделей в общественных и гуманитарных науках. Получены соотношения и уравнения для решения прикладных задач. В качестве примера применения естественнонаучных методов в социально-гуманитарных областях знаний выполнена комплексная оценка развития стран мира с использованием баз данных Программы развития ООН, которая основана на анализе событий совместного наблюдения основных четырех показателей человеческого развития.

Ключевые слова: естественнонаучные методы, феноменологические модели, социально-экономические и экологические системы.

Звягинцева Г.В., Аверин Г.В. «Застосування природничо-наукових методів при розробці феноменологічних моделей в суспільно-гуманітарних науках». У роботі робиться спроба намітити шляхи вирішення деяких загальних задач в галузі суспільних і гуманітарних наук, пов'язаних з описом даних спостереження або експерименту. Такі дані подаються найчастіше тривимірними масивами інформації виду «об'єкти-показники-час». Основна ідея роботи спрямована на дослідження можливості створення на основі таких даних феноменологічних моделей процесів і явищ, які відрізняються багатовимірним польовим поданням кількісної інформації про стан об'єктів і систем. Запропоновано принципи створення та теорія побудови феноменологічних моделей в суспільних і гуманітарних науках. Отримано співвідношення та рівняння для вирішення прикладних задач. Як приклад застосування природничо-наукових методів в соціально-гуманітарних галузях знань виконана комплексна оцінка розвитку країн світу з використанням баз даних Програми розвитку ООН, яка заснована на аналізі подій спільного спостереження основних чотирьох показників людського розвитку.

Ключові слова: природничо-наукові методи, феноменологічні моделі, соціально-економічні та екологічні системи.

Статья поступила в редакцию 20.05.2015

Рекомендована к публикации канд. техн. наук В.Н. Беловодским

Компьютерные эксперименты с задачей взаимодействия двух жидких гравитирующих тел

Андрюхин А.И.¹, Судаков С.Н.²

¹Донецкий национальный технический университет,

²Институт прикладной математики и механики
alexandruckin@ramber.ru, sudakov@iamm.su

Андрюхин А.И., Судаков С.Н. «Компьютерные эксперименты с задачей взаимодействия двух жидких гравитирующих тел». Получены уравнения движения для задачи двух тел, одно из которых – жидкий эллипсоид переменной вязкости, совершающий однородное вихревое движение, а другое – сферически симметричное твердое тело. Для решения уравнений использован численный метод Рунге-Кутты. В качестве примеров приведены расчеты движения системы с массово-геометрическими параметрами системы Земля-Луна, системы Юпитер-Солнце и Земля-Солнце. Эксперименты продолжаются в направлениях, связанных с увеличением длины рассматриваемого временного интервала, использованием иных взаимодействующих пар, увеличением числа тел и т.д.

Ключевые слова: жидкий эллипсоид, задача двух тел, Земля, Солнце, Юпитер

Введение

Динамике эллипсоидальных масс идеальной несжимаемой жидкости посвящена обширная литература [1 – 10]. В работе рассмотрена задача о движении двух тел, одно из которых представляет собой жидкий эллипсоид, а второе – сферически симметричное твердое тело (ССТТ). Частицы жидкости притягиваются друг к другу и к ССТТ по закону Ньютона. Жидкость считается несжимаемой и обладающей переменной вязкостью, допускающей ее однородное вихревое движение [6, 7].

Системы координат

Обозначим через $O\xi_1\xi_2\xi_3$ неподвижную систему координат, начало которой совпадает с общим центром масс рассматриваемой механической системы. Через $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ обозначим подвижные прямоугольные оси, начало которых O_1 совпадает с центром масс жидкого эллипсоида, а оси параллельны соответствующим осям системы $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Через $O_1x_1x_2x_3$ обозначим систему координат, оси которой являются главными осями жидкого эллипсоида. Соответствующие системы координат представлены на рисунке 1.

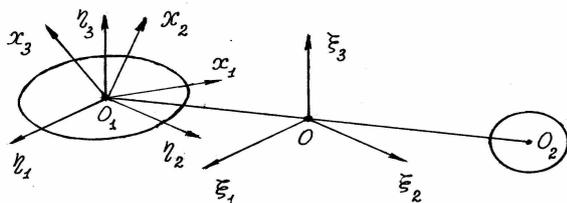


Рисунок 1. – Используемые системы координат

Координаты, скорости и ускорения центра масс жидкости

Положение точки O_1 определим сферическими координатами r_1, φ_1, θ_1 , где θ_1 – угол между плоскостью $O\xi_1\xi_2$ и радиусом-вектором OO_1 ; φ_1 – угол между $O\xi_1$ и проекцией вектора OO_1 на плоскость $O\xi_1\xi_2$.

Тогда координаты точки O_1 в осях $O\xi_1\xi_2\xi_3$ выразятся формулами:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1, \\ \xi_2 &= r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1, \\ \xi_3 &= r_1 \sin \theta_1.\end{aligned}\quad (1)$$

Дифференцируя формулы (1) по времени t , находим проекции скорости центра масс жидкости (точки O_1) на оси $O\xi_1\xi_2\xi_3$:

$$\begin{aligned}u_1 &= \dot{r}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\varphi}_1 r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1 r_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1, \\ u_2 &= \dot{r}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + \dot{\varphi}_1 r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1 r_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1, \\ u_3 &= \dot{r}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1 r_1 \cos \theta_1.\end{aligned}\quad (2)$$

Дифференцируя равенства (2) по t , находим проекции ускорения точки O_1 на оси $O\xi_1\xi_2\xi_3$:

$$\begin{aligned}w_1 &= \ddot{r}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \\ & r_1 \ddot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 - r_1 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \cos \varphi_1 \cos \theta_1 + \\ & + 2r_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - 2\dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \\ & - 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1, \\ w_2 &= \ddot{r}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + r_1 \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \\ & - r_1 \ddot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - r_1 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \\ & - 2r_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 + 2\dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \\ & - 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1,\end{aligned}$$

$$w_3 = \ddot{r}_1 \sin \theta_1 + r_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - r_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1. \quad (3)$$

Положение осей $O_1x_1x_2x_3$ относительно $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ определим углами Эйлера φ, ψ, θ . Матрица перехода $A = (a_{ij})$ от осей $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ к осям $O_1x_1x_2x_3$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi \\ a_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi \\ a_{13} &= \sin \psi \sin \theta \\ a_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi \\ a_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi \\ a_{23} &= -\cos \psi \sin \theta \\ a_{31} &= \sin \theta \sin \varphi \\ a_{32} &= \sin \theta \cos \varphi \\ a_{33} &= \cos \theta \end{aligned}$$

Используя матрицу перехода A , находим проекции ускорения точки O_1 на оси $O_1x_1x_2x_3$:

$$w_{x_i} = \sum_{j=1}^3 \dot{a}_{ij} w_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Координаты центра масс сферически симметричного твердого тела

Центр масс ССТТ обозначим O_2 . Предполагая, что внешние силы на систему не действуют и центр масс системы неподвижен, получаем соотношение:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2, \quad (5)$$

где m_1 – масса жидкого эллипсоида, m_2 – масса ССТТ, $r_i = |\overline{OO_i}|$, $i = 1, 2, 3$. При движении точки O , O_1 , O_2 будут лежать на одной прямой. Используя (5), находим координаты точки O_2 в осях $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$:

$$\begin{aligned} \eta_{21} &= -m^{-1} r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1, \\ \eta_{22} &= -m^{-1} r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1, \\ \eta_{23} &= -m^{-1} r_1 \sin \theta_1, \end{aligned} \quad (6)$$

где $m = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$. Тогда в осях $O_1x_1x_2x_3$ точка O_2 будет иметь координаты:

$$x_{2i} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \eta_{2j}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Гравитационные силы, действующие на жидкость со стороны сферически симметричного твердого тела

Проекции на оси $O_1x_1x_2x_3$ силы, действующей на единичный объем жидкости со стороны ССТТ, определяются формулами:

$$f_i = G \rho m_2 \frac{\tilde{x}_{2i} - \tilde{x}_i}{r^2 [S]^{3/2}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $S = (\tilde{x}_{21} - \tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_{22} - \tilde{x}_2)^2 + (\tilde{x}_{23} - \tilde{x}_3)^2$, G – гравитационная постоянная, ρ – плотность жидкости, $r^2 = x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{23}^2$, $\tilde{x}_{2i} = x_{2i}/r$, $\tilde{x}_i = x_i/r$, x_1, x_2, x_3 – координаты в осях $O_1x_1x_2x_3$ рассматриваемой частицы жидкости.

Линеаризация

В дальнейшем будем рассматривать только те случаи, когда расстояние r между точками O_1 и O_2 настолько велико, что можно провести линеаризацию величин f_i по \tilde{x}_i , $i = 1, 2, 3$. Такая линеаризация необходима для существования однородного вихревого движения жидкости и сохранения ее эллипсоидальной формы. После линеаризации будем иметь:

$$f_1 = \frac{G \rho m_2}{r^2} \left(\frac{x_{21}}{r} + \left(\frac{3x_{21}^2}{r^2} - 1 \right) \frac{x_1}{r} + \frac{3x_{21}x_{22}x_2}{r^3} + \frac{3x_{21}x_{23}x_3}{r^3} \right) \quad (123),$$

где символ циклической перестановки индексов (123) не применяется к величине m_2 и к первому индексу величин x_{21}, x_{22}, x_{23} .

Уравнения гидродинамики

Движение жидкости переменной вязкости описывается уравнениями [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \Delta \mathbf{v} - \mathbf{w} - \dot{\omega} \times \mathbf{x} - \\ &- \omega \times (\omega \times \mathbf{x}) - 2\omega \times \mathbf{v} - \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – скорость движения жидкости относительно осей $O_1x_1x_2x_3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – координатный вектор, ρ – плотность жидкости, p – давление, ω – угловая скорость осей $O_1x_1x_2x_3$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ – полудлины главных осей жидкого эллипсоида, $\mathbf{w} = (w_{x_1}, w_{x_2}, w_{x_3})$ – абсолютное ускорение точки O_1 , $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$.

Кинематическая вязкость $\nu(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ определяется выражением:

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} - \frac{x_3^2}{c_3^2} \right),$$

где $\nu_0 = \text{const}$.

Граница жидкости в осях $O_1x_1x_2x_3$ задается уравнением:

$$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} = 1.$$

Следовательно, на границе жидкости $\nu = 0$.

Компоненты тензора скоростей деформаций жидкости σ имеют вид:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial v_j} + \frac{\partial v_j}{\partial v_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Потенциал Φ гравитационных сил, порождаемых жидкостью, в ее внутренних точках описывается формулой [2]:

$$\Phi = \pi \rho G (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 - \chi_0),$$

$$\text{где } \alpha_i = c_1 c_2 c_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c_i^2 + \lambda) D}, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\chi_0 = c_1 c_2 c_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D}, \quad D = [(c_1^2 + \lambda)(c_2^2 + \lambda)(c_3^2 + \lambda)]^{1/2}.$$

Уравнения движения

В случае однородного вихревого движения компоненты скорости жидкости v_1, v_2, v_3 и давление p ищем в виде:

$$v_i = \frac{\dot{c}_i}{c_i} x_i - \frac{c_1}{c_2} \omega_3^* x_2 + \frac{c_1}{c_3} \omega_2^* x_3 \quad (123),$$

$$p = -p_0(t) \left(\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} - 1 \right), \quad (9)$$

где $\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$ и $p_0(t)$ – неизвестные функции времени t .

Подставляя (9) в уравнения движения жидкости (8), получаем:

$$k_{i0} + k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 + k_{i3}x_3 = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

$$\text{где } k_{i0} = w_{x_i} - Gm_2 \frac{x_{2i}}{r^3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$k_{11} = \frac{\ddot{c}_1}{c_1} - \omega_3^{*2} - \omega_2^{*2} - \frac{2p_0}{\rho c_1^2} + 4v_0 \frac{\dot{c}_1}{c_1^3} - \omega_2^2 - \omega_3^2 -$$

$$- 2 \frac{c_3}{c_1} \omega_2^* \omega_2 - 2 \frac{c_2}{c_1} \omega_3^* \omega_3 + + 2\pi \rho G \alpha_1 -$$

$$- \frac{Gm_2}{r^5} (3x_{21}^2 - r^2) \quad (123),$$

$$k_{12} = - \frac{c_1}{c_2} \dot{\omega}_3^* - \frac{2\dot{c}_1}{c_2} \omega_3^* + \frac{c_1}{c_2} \omega_1^* \omega_2^* +$$

$$+ \frac{2v_0}{c_2^2} \frac{c_2^2 - c_1^2}{c_2 c_1} \omega_3^* - \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 + 2 \frac{c_3}{c_2} \omega_1^* \omega_2 -$$

$$(11)$$

$$- 2 \frac{\dot{c}_2}{c_2} \omega_3 - 3Gm_2 \frac{x_{21}x_{22}}{r^5} \quad (123),$$

$$k_{13} = \frac{c_1}{c_3} \dot{\omega}_2^* + \frac{2\dot{c}_1}{c_3} \omega_2^* + \frac{c_1}{c_3} \omega_1^* \omega_3^* +$$

$$+ \frac{2v_0}{c_3^2} \frac{c_1^2 - c_3^2}{c_1 c_3} \omega_2^* + \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 + \frac{2\dot{c}_3}{c_3} \omega_2 +$$

$$+ \frac{2c_2}{c_3} \omega_1^* \omega_3 - 3Gm_2 \frac{x_{21}x_{23}}{r^5} \quad (123).$$

Равенства (10) должны выполняться при любых значениях координат x_1, x_2, x_3 из области, занимаемой жидкостью. Отсюда следуют уравнения:

$$k_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (12)$$

где k_{ij} определены выражениями (11). Из

условия несжимаемости следует, что

$$c_1 c_2 c_3 = R^3 = const. \quad (13)$$

Движение осей $O_1x_1x_2x_3$ относительно $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ описывается кинематическими уравнениями Эйлера, которые запишем в виде:

$$\dot{\varphi} = \omega_3 - (\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta,$$

$$\dot{\psi} = (\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) / \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = \omega_1 \cos \varphi - \omega_2 \sin \varphi, \quad (14)$$

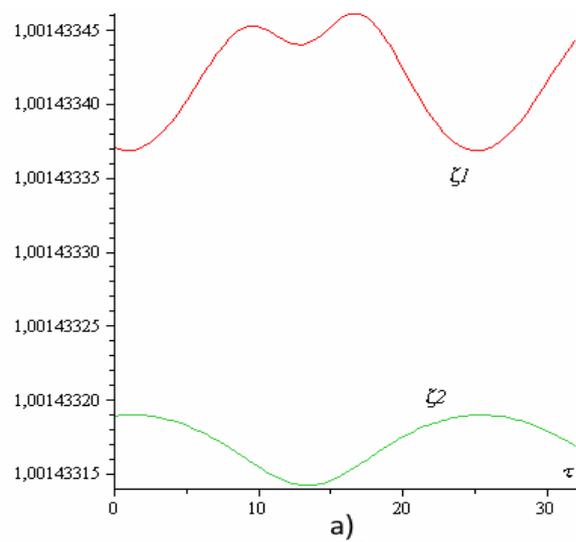
где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – проекции угловой скорости осей $O_1x_1x_2x_3$ на себя.

Соотношения (12) – (14) представляют собой систему шестнадцати обыкновенных дифференциальных уравнений относительно шестнадцати неизвестных $\omega_i^*, \omega_i, c_i, i = 1, 2, 3, p_0, \varphi, \psi, \theta, r_1, \varphi_1, \theta_1$ и после задания начальных условий, полностью описывают движение системы.

Для решения уравнений был использован численный метод Рунге-Кутты 4-5. Единицей времени являются земные сутки.

На рисунке 2а представлен один из результатов расчетов для системы Земля-Луна (в земных радиусах). На рисунке 2б представлен один из результатов расчетов для системы Юпитер-Солнце.

Более детально выполнялись расчеты для системы Земля-Солнце. Они представлены на рисунках 3 – 15 в различных временных шкалах.



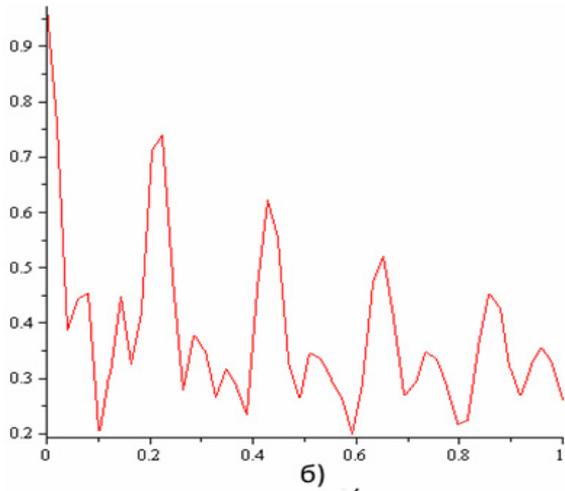


Рисунок 2. – Изменение полюсов $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ в модели (в м): а) для системы Земля-Луна; б) для системы Юпитер-Солнце

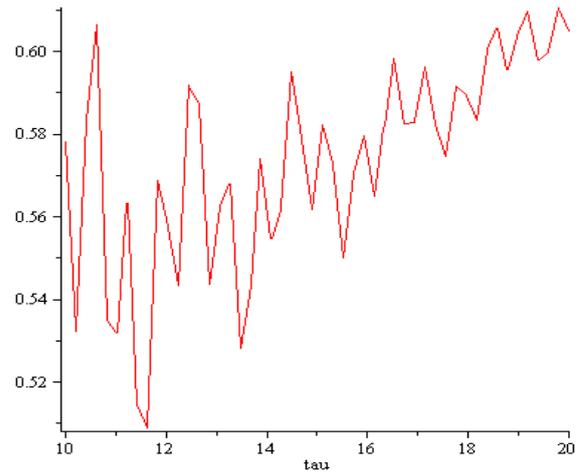


Рисунок 5. – Изменение полюсов $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ в модели Солнце-Земля за вторые 10 суток (в м)

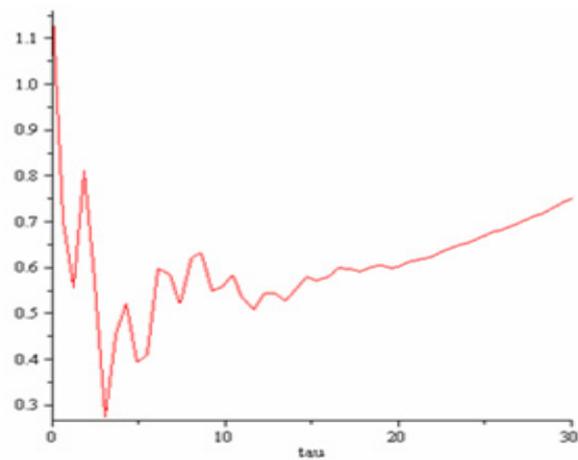


Рисунок 3. – Изменение полюсов $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ в модели Солнце-Земля за первые 30 суток (в м)

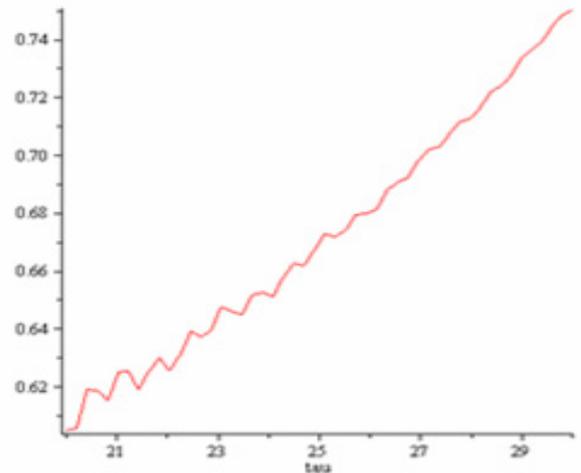


Рисунок 6. – Изменение полюсов $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ в модели Солнце-Земля за третьи 10 суток (в м)

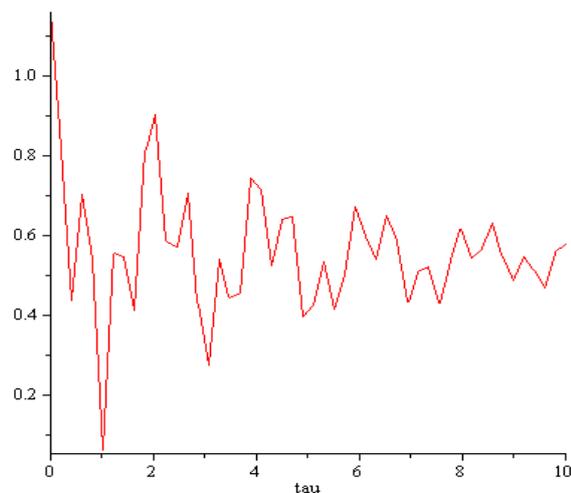


Рисунок 4. – Изменение полюсов $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ в модели Солнце-Земля за первые 10 суток (в м)

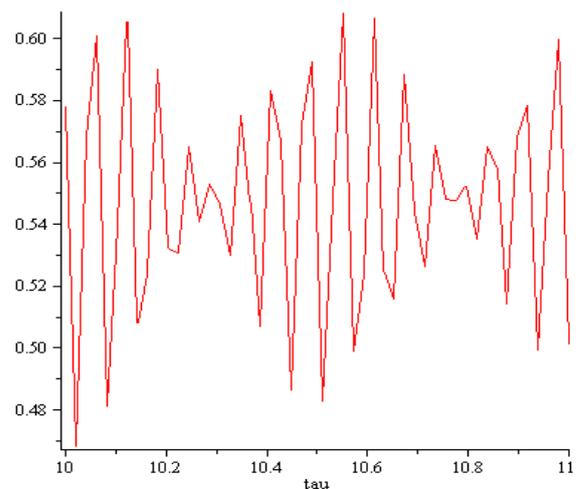


Рисунок 7. – Изменение полюсов $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ в модели Солнце-Земля за 11 сутки (в м)

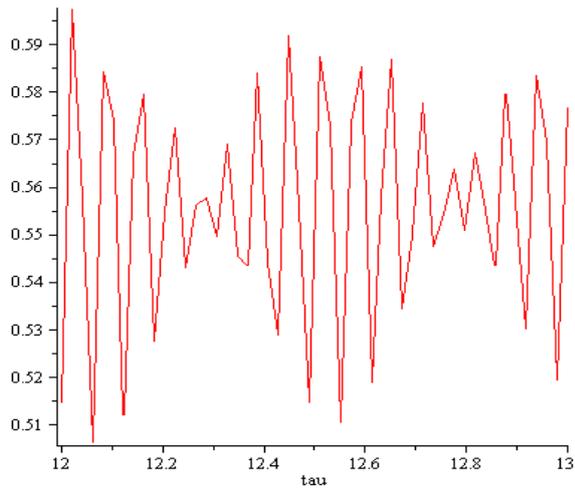


Рисунок 8. – Изменение полюсов $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ в модели Солнце-Земля за 13 сутки (в м)

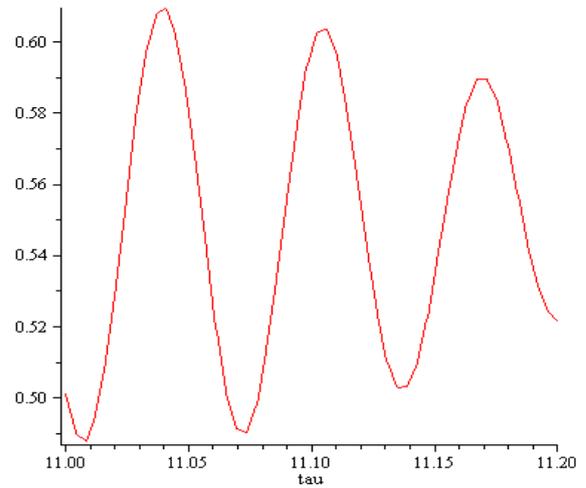


Рисунок 11. – Изменение полюсов $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ в модели Солнце-Земля в начале 11 суток (в м)

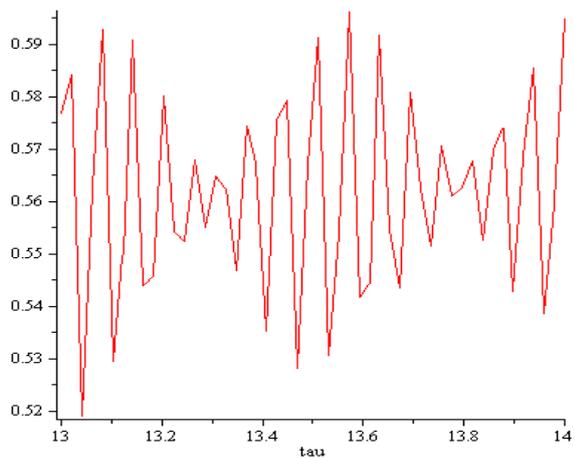


Рисунок 9. – Изменение полюсов $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ в модели Солнце-Земля за 14 сутки (в м)

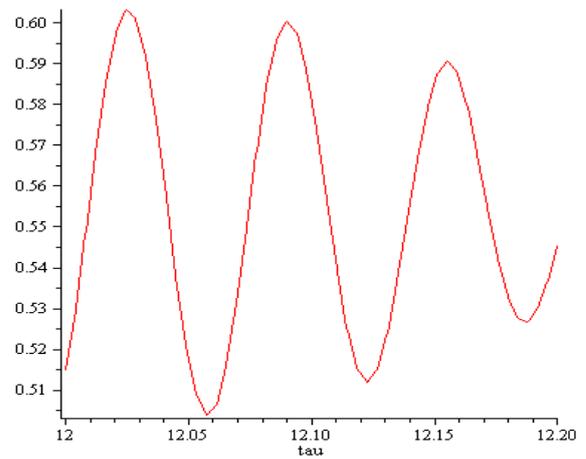


Рисунок 12. – Изменение полюсов $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ в модели Солнце-Земля в начале 12 суток (в м)

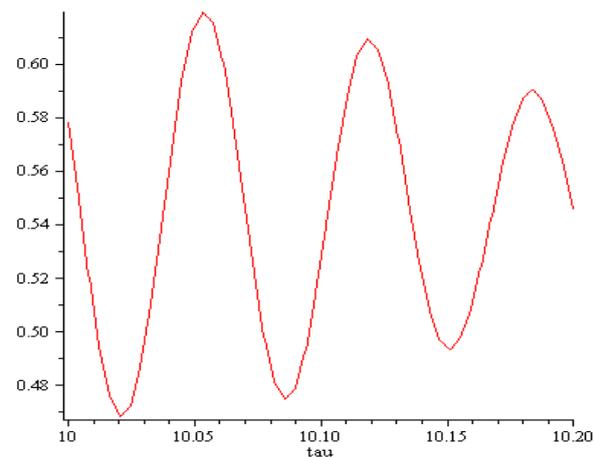


Рисунок 10. – Изменение полюсов $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ в модели Солнце-Земля в начале 11 суток (в м)

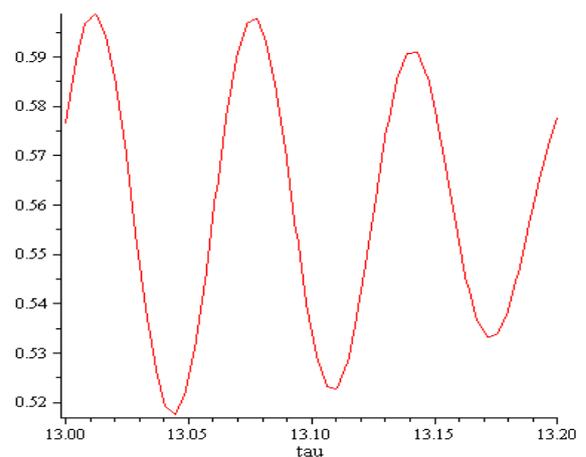


Рисунок 13. – Изменение полюсов $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ в модели Солнце-Земля в начале 13 суток (в м)

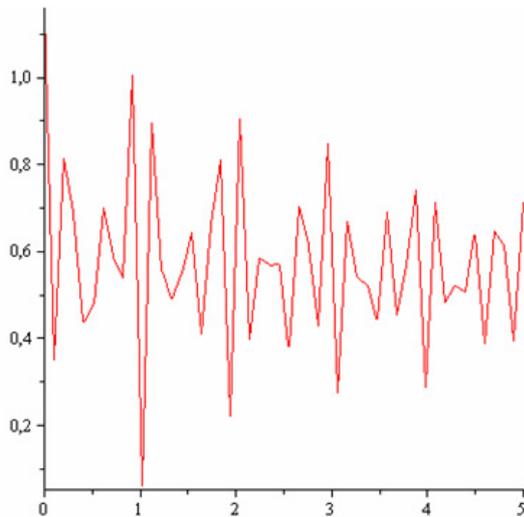


Рисунок 14. – Изменение полуосей $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ в модели Солнце-Земля за первые 5 суток (в м)

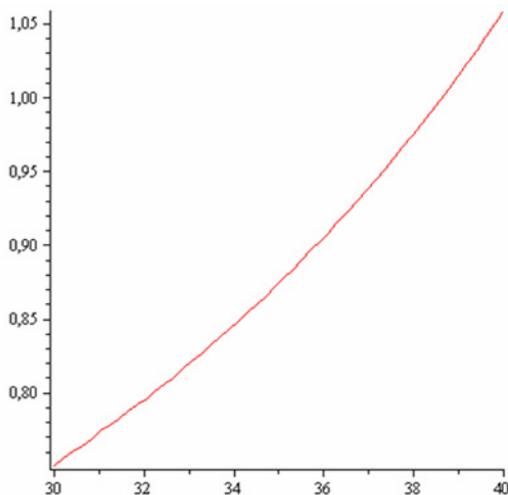


Рисунок 15. – Изменение полуосей $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ в модели Солнце-Земля за 4 десятка суток (в м)

Выводы

Расчет моделей достаточно трудоемкий процесс. Построение графика отклонений полуосей за временной промежуток 10 суток занимает примерно 1,5 часа работы процессора I3 модели 4170 с частотой 3,7 ГГц. Время расчета за более длинный временной период в лучшем случае прямо пропорционально его длине.

Эксперименты продолжают в следующих направлениях:

а) увеличение длины рассматриваемого временного интервала;

б) использование иных взаимодействующих пар, как Юпитер и его основные спутники, такие как Ио, Ганимед, Каллисто, Европа, система Земля-Луна и т.п.;

в) увеличение числа тел, т.е. выполнение компьютерных экспериментов с задачей трех и более тел.

Расчеты производились в пакетах Maple и Mathematica и сравнивались.

Список литературы

1. Динамика жидких и газовых эллипсоидов / Сборник статей // Ред. А.В. Борисов, И.С. Мамаев. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 364 с.
2. Ламб Г. Гидродинамика. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
3. Петкевич Е.В. Задача двух жидких тел // Письма в Астрономический журнал. – 1977. – 3. – № 9. – С. 424 – 428.
4. Петкевич Е.В. Уравнения внешней задачи двух тел // Письма в Астрономический журнал. – 1977. – 3. – № 11. – С. 522 – 525.
5. Стеклов В.А. Работы по механике. – М.-Ижевск: ИКИ, 2011. – 492 с.
6. Субботин М.Ф. Курс небесной механики. – Т. 3. – М.: Гостехиздат, 1949. – 280 с.
7. Судаков С.Н. Об уравнениях движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной жидкостью переменной вязкости // Труды ИПММ НАН Украины. – 2000. – 5. – С. 141 – 144.
8. Судаков С.Н. О колебаниях вращающихся жидких гравитирующих эллипсоидов переменной вязкости // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 217 – 226.
9. Chandrasekhar S. Ellipsoidal figures of equilibrium. – New Haven and London: Yale university press, 1969. – 98 p.
10. Ядрицкий В.С. Теория фигур небесных тел. – М.-Ижевск: ИКИ, 2011. – 300 с.
11. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с.

References (transliteration)

1. Dinamika zhidkih i gazovyh jellipsoidov [Dynamics of liquid and gas ellipsoids]. / Sbornik statej // Red. A.V. Borisov, I.S. Mamaev. – Moskva-Izhevsk: NIC “Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika”, 2010. – 364 p.
2. Lamb G. Hidrodinamika [Lamb G. The hydrodynamics]. – M.-L.: Gostehizdat, 1947. – 928 p.
3. Petkevich E.V. Zadacha dvuh zhidkih tel // Pis'ma v Astronomicheskij zhurnal. 1977. 3. – no. 9. – pp. 424 – 428.
4. Petkevich E.V. Uravnenija vneshnej zadachi dvuh tel [The equations of the external problem of two bodies] // Pis'ma v Astronomicheskij zhurnal. – 1977. – 3. – no.11. – pp. 522 – 525.
5. Steklov V.A. Raboty po mehanike [The works on mechanics]. – M.-Izhevsk: IKI, 2011. – 492 p.
6. Subbotin M.F. Kurs nebesnoj mehaniki [The course of celestial mechanics]. – Т. 3. – М.: Gostehizdat, 1949. – 280 p.

7. Sudakov S.N. Ob uravnenijah dvizhenija tverdogo tela s jellipsoidal'noj polost'ju, celikom zapolnennoj zhidkost'ju peremЕННОj vjazkosti [The equations of motion of a rigid body with an ellipsoidal cavity is entirely filled with a liquid of variable viscosity] // Trudy IPMM NAN Ukrainy. – 2000. – 5. – pp. 141 – 144.
8. Sudakov S.N. O kolebanijah vrashhajushhihsja zhidkih gravitirujushhih jellipsoidov peremЕННОj vjazkosti [Oscillations of rotating liquid gravitating ellipsoids with variable viscosity] // Mehanika tverdogo tela. – 2002. – Issue 32. – pp. 217 – 226.
9. Chandrasekhar S. Ellipsoidal figures of equilibrium. – New Haven and London: Yale university press, 1969. – 98 p.
10. Jadrckij V.S. Teorija figur nebesnyh tel [The theory of figures of celestial bodies]. – M.-Izhevsk: IKI, 2011. – 300 p.
11. Lojcjanskij L.G. Mehanika zhidkosti i gaza [Fluid Mechanics]. – M.: Nauka, 1973. – 848 p.

Андрюхін О.І., Судаков С.Н. «Комп'ютерні експерименти з задачею взаємодії двох гравітуючих рідких тіл». Отримано рівняння руху для задачі двох тіл, одне з яких рідкий еліпсоїд змінної в'язкості, що здійснює однорідний вихровий рух, а інше – сферично симетричне тверде тіло. Для вирішення рівнянь використано чисельний метод Рунге-Кутта. Для прикладу наведено розрахунки руху системи з масово-геометричними параметрами системи Земля-Сонце та системи Юпітер-Сонце. Експерименти продовжуються в таких напрямках, як збільшення довжини розглянутого часового інтервалу, використання інших взаємодіючих пар, збільшення числа тіл. Розрахунки проводилися в пакетах Maple і Mathematica та порівнювалися.

Ключові слова: рідкий еліпсоїд, проблема двох тіл, Земля, Сонце, Юпітер

Andruckin A.I., Sudakov C.N. “Computer experiments with the problem of interaction of two gravitating liquid bodies”. The equations of motion for the two-body problem, one of which is a liquid ellipsoid of variable viscosity, a homogeneous rotational motion, and the other is spherically symmetrical solid. To solve the equations used numerical method of Runge-Kutta. As an example we calculate the motion of the system with mass-geometric parameters of the Earth-Sun and Sun-Jupiter system. Experiments are continuing in these areas as increasing the length of the time interval under consideration, the use of other interacting pairs, like Jupiter and its major moons, such as Io, Ganymede, Callisto, Europa, the Earth-Moon system and the like, increase in the number of bodies, that is, the implementation of computer experiments with the task of three or more bodies.

The calculations were made in Maple and Mathematica packages and compared.

Keywords: liquid ellipsoid, the problem of two bodies, the Earth, the Sun, Jupiter

Статья поступила в редакцию 29.06.2015

Рекомендована к публикации д-ром техн. наук С.Г. Ехилевским

Исследование функций аппроксимации градуировочной характеристики термоанемометра в неизотермическом газовом потоке

Пометун Е.Д., Лебедев В.Н.
Донецкий национальный университет
Alternativa19031992@rambler.ru

Пометун Е.Д., Лебедев В.Н. «Исследование функций аппроксимации градуировочной характеристики термоанемометра в неизотермическом газовом потоке». Предложена методика пересчета выходного электрического сигнала термоанемометрического комплекса, состоящего из термометра и термоанемометра постоянной температуры, в мгновенные значения температуры и скорости неизотермического потока воздуха, в предположении, что сложная функция, описывающая теплообмен нагретого элемента, может быть представлена в виде произведения двух более простых функций, причем первая функция зависит от числа Рейнольдса, а вторая – от относительного перегрева чувствительного элемента термоанемометра. Проверка показала хорошее совпадение экспериментальных и расчетных значений скорости потока воздуха в диапазоне $3 \div 20$ м/с.

Ключевые слова: аппроксимирующие функции, термоанемометр постоянной температуры, погрешность, неизотермический поток.

Введение

Термоанемометр постоянной температуры находит широкое применение, в основном, для измерения скорости воздушных потоков. Наряду с достоинствами этого метода измерений, такими как: сравнительная простота и дешевизна прибора, а так же малая область осреднения датчика, особенно при использовании микропровода или малогабаритных термисторов. Существенным недостатком термоанемометра является сильная зависимость выходного электрического сигнала от температуры. Известно, что универсального способа устранения температурной зависимости (термокомпенсации) не существует. В каждом конкретном случае выбирается оптимальный метод, основанный на различных технических решениях.

Метод термокомпенсации, разработанный авторами данной работы, предполагает использование микроконтроллера при обработке электрических сигналов в реальном времени, или стандартных математических программ при разделении во времени процесса измерения и обработки сигналов. Метод основан на гипотезе о возможности представления сложной функции, описывающей теплообмен нагретого датчика термоанемометра постоянной температуры, зависящей от двух параметров (скорости и температуры), в виде произведения двух более простых функций (скорости потока воздуха и его температуры).

Целью данной работы является исследование функций аппроксимации выходного сигнала термоанемометра в неизотермическом газовом потоке, поиск некоторых математических соотношений для

разделенных функций и экспериментальная проверка полученных результатов.

Основная часть

На кафедре физики неравновесных процессов, метрологии и экологии им. И.Л. Повха ДонНУ был разработан и изготовлен измерительный комплекс, состоящий из комбинированного датчика: термоанемометра постоянной температуры (ТА ПТ) и термометра. Комбинированный датчик состоит из двух идентичных малогабаритных термисторов СТЗ-18. Один из термисторов, расположенный впереди по потоку, является датчиком температуры, второй термистор находится на расстоянии около 2 мм за датчиком термометра и используется в качестве чувствительного элемента ТА ПТ.

Выходными электрическими сигналами является электрическое напряжение по двум каналам: температуры и скорости. Если в некоторых конкретных условиях изменяются только скорость и температура, тогда:

$$E_{TA} = f_1(V, T), \quad (1)$$

$$E_T = f_2(T), \quad (2)$$

где E_{TA} – напряжение ТА ПТ, E_T – напряжение термометра.

Определим вид функции $E_T = f_2(T)$. Зависимость между электрическим сопротивлением и температурой термистора имеет нелинейный характер и, в первом приближении, описывается экспоненциальной функцией с двумя постоянными коэффициентами β и R_0 , индивидуальными для каждого термистора. В данной работе

использовался более точный способ, предложенный в [1]. Для каждого из термисторов была получена экспериментальная зависимость между электрическим сопротивлением и температурой термистора в диапазоне 18 – 100 °С. Причем в диапазоне 18 – 45 °С погрешность не превышала 0,2 °С. На основании этих результатов построена аппроксимирующая функция для вычисления температуры потока и определено сопротивление термистора ТА ПТ при температуре, равной 100 °С. Для расчета температуры потока использовалось следующее соотношение:

$$R_t = R_0 \cdot e^{\frac{(B_0 + B_1 \cdot \ln(Rt))T_0 - T}{T_0 T}}, \quad (3)$$

где R_t – текущее сопротивление при температуре T , T_0 – сопротивление термистора при температуре $T_0 = 25$ °С, B_0 – справочная константа, B_1 – экспериментальная константа, определяемая в процессе градуировки.

Определим вид функции $E_{TA} = f_1(V, T)$. Теплоотдача длинного цилиндра (нити), обтекаемого потоком воздуха, описывается уравнением Кинга [2]:

$$Nu = 0,42 \cdot Pr^{0,2} + 0,5 \cdot Pr^{0,33} \cdot Re^{0,5}, \quad (4)$$

где Pr – число Прандтля, Re – число Рейнольдса.

Таким образом, $Nu = f(Re, Pr)$, но для большинства двухатомных газов число Прандтля слабо зависит от температуры и для воздуха в диапазоне 18...45 °С может быть принято равным $Pr = 0,699...0,703$, что позволяет при обработке экспериментальных данных полагать $Nu = f(Re)$ [2].

Представим характеристическое число Нуссельта в виде [3]:

$$Nu = \frac{E_{TA}^2 d}{R_w \lambda_g S (T_w - T_g)}, \quad (5)$$

где T_g – температура газа, T_w – температура нити, d – диаметр нити, R_w – сопротивление нагретой нити, S – площадь поверхности, λ_g – теплопроводность газа.

В ограниченном диапазоне скоростей зависимость между теплообменом и числом Рейнольдса может быть представлена соотношением вида:

$$Nu = \left(A + B Re^n \right) \cdot \left(\frac{T_g}{T_w} \right)^{-m} \dots \quad (6)$$

или

$$\frac{E_{TA}^2 d}{R_w \lambda_g S (T_w - T_g)} \left(\frac{T_g}{T_w} \right)^m = A + B Re^n. \quad (7)$$

Правая часть уравнения $A + B Re^n = f(V)$ есть функция только от числа Рейнольдса, а

выражение $\frac{E_{TA}^2 d}{R_w \lambda_g S (T_w - T_g)} \left(\frac{T_g}{T_w} \right)^m = f(T_g)$ – зависимость от электрической мощности и температуры газа.

Практика показывает [4], что общий вид зависимости между теплообменом и числом Рейнольдса, заданной соотношением (6), сохраняется для разных типов термоанемометрических датчиков, в том числе, для термисторов.

Представим соотношение (7) в виде

$$E_{TA} = f(T_g) \cdot f(V). \quad (8)$$

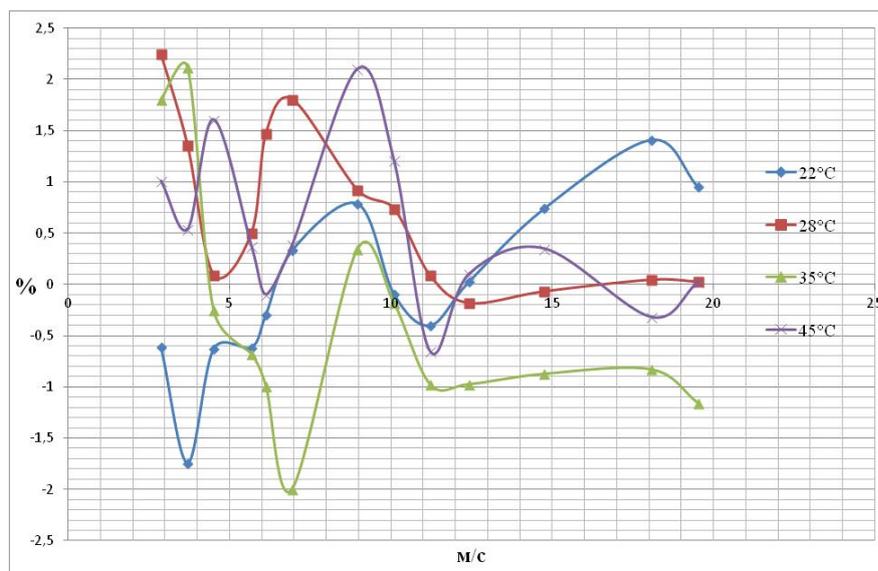
Было определено, что условию термокомпенсации удовлетворяет функция вида:

$$f(T_g) = C \cdot (T_w - T_g), \quad (9)$$

где C – экспериментальная константа.

Экспериментальные исследования выполнялись на установке АДС-200/250 [5], предоставленной ДонНУ ВНИИМ им. Д.И. Менделеева. Автоматическая система управления позволяет устанавливать стабилизированные значения следующих параметров: температуры – от комнатной до 60 °С и скорости потока воздуха – от 1,5 до 40 м/с. Были получены градуировочные характеристики термоанемометрического комплекса: в диапазоне температуры – от 18 °С до 45 °С и по скорости потока – от 3 до 20 м/с.

Для сравнения проверено два способа аппроксимации функции $f(V)$: с помощью уравнения Кинга (6) и полиномиальной функции. Вычисление коэффициентов в уравнении Кинга с учетом (7) свелось к вычислению коэффициентов n и A, B , при этом расчетная погрешность составила около 4%. Можно предположить, что аппроксимирующая функция в правой части уравнения (7), имеющая большее количество коэффициентов, обеспечит более высокую точность. Для решения этой задачи использовалась полиномиальная зависимость. Было определено, что оптимальная степень полинома $N = 4$. При дальнейшем увеличении степени полинома расчетная погрешность не уменьшалась. Результаты для $N = 4$ представлены на рисунке 1. Максимальная погрешность составляет менее 2,5 % при минимальной скорости, равной 3 м/с.

Рисунок 1. – График погрешностей при аппроксимации полиномом $N = 4$

Исследования показали, что при скорости менее 3 м/с гипотеза о разделении параметров не выполняется. Такое ограничение связано, возможно, с особенностями конструкции термистора СТЗ-18 и с техническими ограничениями используемого оборудования. В частности, уравнение Кинга в виде (3) не учитывает зависимость теплообмена от конвективных потоков, возникающих вокруг нагретого элемента и оказывающих существенный вклад в теплообмен при скоростях, сравнимых со скоростью тепловой конвекции. Вероятно, учет этого эффекта позволит расширить диапазон применимости гипотезы в область малых скоростей. Необходимо учитывать, что поверхностная температура покрытого стеклом термистора СТЗ-18 в уравнении (9) зависит от скорости потока.

Выводы

1. Доказана принципиальная возможность представления выходного сигнала ТА ПТ в виде произведения двух более простых функций скорости и температуры.
2. Определено, что гипотеза о разделении параметров температуры и скорости выполняется в диапазоне 3 – 20 м/с.
3. По сравнению с уравнением Кинга использование полиномиальной зависимости для аппроксимации функции скорости позволяет уменьшить погрешность.
4. В данной серии экспериментов со степенью полинома $n \geq 4$ погрешность перестает уменьшаться. Максимальная погрешность составляет 2,5 % при минимальной скорости, равной 3 м/с.

Список литературы

1. Кузнецов Д.Н. Исследование некоторых функций аналитического описания экспериментальных градуировочных характеристик термисторов / Д.Н. Кузнецов, В.Н. Лебедев, Ю.Д. Украинский // Материалы восьмого международного научно-практического семинара «Практика и перспективы развития партнерства в сфере высшей школы». – 2007. – Т. 3. – С. 104.
2. Ярин Л.П. и др. Термоанемометрия газовых потоков / Л.П. Ярин, А.Л. Генкин, В.И. Кукес. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1983. – 198 с.
3. Ю.Д. Украинский. Аппроксимация степенной функцией теплоотдачи термистора в режиме датчика термоанемометра постоянной температуры / тез. докл. Мелекино, 2002. – 3 с.
4. Пометун Е.Д. Сравнение чувствительности термоанемометров двух типов: импульсного и постоянной температуры / Е.Д. Пометун, Д.Н. Кузнецов // Системный анализ и информационные технологии в науках о природе и обществе. – 2013. – №1(4)–2(5). – С. 107.
5. Кузнецов Д.Н., Дьяченко А.А., Чупис Д.А. Настройка оптимального регулятора температуры воздушного потока аэродинамического стенда АДС – 200/250 // Научные труды Донецкого национального технического университета. Серия: Вычислительная техника и автоматизация. Выпуск 21 (183) – Донецк: ДонНТУ, 2011. С. 171 – 177.

Referents (transliteration)

1. Kuznecov D.N. Issledovanie nekotorykh funkcij analiticheskogo opisaniya jeksperimental'nyh graduirovocnykh karakteristik termistorov [A study of certain functions analytic description of the experimental calibration characteristics thermistor] / D.N. Kuznecov, V.N. Lebedev, J.D. Ukrainskij // Materialy vos'mogo mezhdunarodnogo nauchno-prakticheskogo seminaru "Praktika i perspektivy razvitija partnerstva v sfere vysshej shkoly". – 2007. – t. 3. – p. 104.
2. Jarin L.P. i dr. Termoanemometrija gazovykh potokov [Thermoanemometer of gas flows] / L.P. Jarin, A.L. Genkin, V.I. Kukes. – L.: Mashinostroenie, Leningr. otd-nie, 1983, – 198 p.
3. J.D. Ukrainskij. Approksimacija stepennoj funkciej teplootdachi termistora v rezhime datchika termoanemometra postojannoju temperatury [Approximation of exponential function in the heat of the thermistor sensor mode, a constant temperature anemomete] / tez. dokl. Melekino, 2002. – 3 p.
4. Pometun E.D. Sravnenie chuvstvitel'nosti termoanemometrov dvuh tipov: impul'snogo i postojannoju temperatury [Comparison of the sensitivity thermoanemometers two types: pulse and a constant temperature] / E.D. Pometun, D.N. Kuznecov // Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii v naukah o prirode i obshhestve. – 2013. – no.1(4)–2(5). – p. 107.
5. Kuznecov D.N., D'jachenko A.A., Chupis D.A. Nastrojka optimal'nogo reguljatora temperatury vozdušnogo potoka ajerodinamicheskogo stenda ADS – 200/250 [Setting the Optimal airflow regulator aerodynamic stand ADS temperature – 200/250] // Nauchnye trudy Doneckogo nacional'nogo tehničeskogo universiteta. Serija: Vychislitel'naja tehnika i avtomatizacija. Issue – 21 (183) – Doneck: DonNTU, 2011, pp. 171 – 177.

Пометун К.Д., Лебедев В.М. «Дослідження функцій апроксимації градувальної характеристики термоанемометра в неізотермічному газовому потоці». Запропоновано методику перерахунку вихідного електричного сигналу термоанемометричного комплексу, який включає в себе термометр та термоанемометр постійної температури, в миттєві значення температури і швидкості неізотермічного потоку повітря, в припущенні, що складна функція, яка описувала теплообмін нагрітого елемента, може бути представлена у вигляді добутку двох простіших функцій, причому перша функція залежить від числа Рейнольдса, а друга – від відносного перегріву чутливого елемента термоанемометра. Перевірка показала гарний збіг експериментальних і розрахункових значень швидкості потоку повітря в діапазоні $3 \div 20$ м / с.

Ключові слова: апроксимаційні функції, термоанемометр постійної температури, похибка, неізотермічний потік.

Pometun E., Lebedev V. "Investigation of the approximation functions of calibration characteristics thermoanemometer in non-isothermal gas flow". The method of conversion the output electrical signal at the thermoanemometer's complex in an instant temperature and non-isothermal air flow rate is proposed. Hot-wire complex is consists of a thermometer and a constant temperature anemometer. It is assumed that a complex function describing the heated heat transfer element can be represented as the product of two simpler functions, the first function dependent on the Reynolds number, and the second – on the relative heat sensitive element anemometer. The audit is showed good agreement of experimental and calculated values of air flow rate in the range of $3 \div 20$ m / s. The method of temperature compensation, developed by the authors, is requires the use of a microcontroller in processing electrical signals in real time, or standard mathematical software, the separation in time of the measurement process and signal processing.

Keywords: approximation function, wire anemometers constant temperature, error, non-isothermal air flow.

Статья поступила в редакцию 20.06.2015
Рекомендована к публикации канд. техн. наук А.В. Звягинцевой

Раздел 3

Информационные технологии и программное обеспечение

УДК 539.12

Математическая обработка двумерных изображений и подавление шума геометрическими фильтрами типа медианной фильтрации

Ехилевский С.Г., Голубева О.В., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.

Полоцкий государственный университет
ekhilevskiy@mail.ru, dmitrij.pastuhov@mail.ru

Ехилевский С.Г., Голубева О.В., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. «Математическая обработка двумерных изображений и подавление шума геометрическими фильтрами типа медианной фильтрации». Разработан программный продукт для анализа микропор в графических изображениях различных объектов. Использование данного продукта позволяет проводить статистический анализ эффективных диаметров пор, увеличивать контраст изображения, подавлять случайные шумы в графическом файле с нарушением непрерывности рассматриваемых распределений. При тестировании программы использованы различные изображения – треугольник Серпинского, фрактал Мандельброта и распределения пузырей на поверхности геотермального озера Банное на кальдере Узон. Показано, что распределение пузырей описывается мультифракталом биномиального распределения шестого поколения.

Ключевые слова: задача распознавания графических образов, медианная фильтрация, фильтры Гаусса, Лапласа, Прюитта, Собеля.

Введение

Во многих технических приложениях применяются геометрические методы обработки графических файлов. Как правило, обработка сигнала уменьшает случайные помехи и увеличивает контраст изображения [1 – 5]. Иногда необходимо сохранить все детали изображения. Методы геометрической обработки применяются при сжатии и архивировании файлов, когда увеличивается контраст крупных видеофрагментов, а мелкие детали теряются вовсе. Метод медианной фильтрации при обработке видеосигнала исправляет случайные помехи, видимые на рисунках как мелкие детали с большим контрастом относительно среднего по контрасту фона. Качество обработки зависит от геометрии применяемого окна-фильтра. В разработанном программном продукте реализованы следующие методы обработки: Гаусса, Лапласа, Собеля, Прюитта, пороговый, линейный, прямоугольный, геометрический, минимум-фильтр. Применен новый краевой принцип подавления помех (используются функции антизатемнения и шумоподавления). Настройки интерфейса программы позволяют последовательно применять любое количество фильтров для обработки изображения – для этого соответствующий фильтр приводится переключателем в состояние «включено».

Сжатие видеоданных, реанимация слабоконтрастных изображений в математической постановке задачи относится к обратным задачам математической физики. Методы геометрической фильтрации актуальны в криминалистике и искусствоведении (отделение

подлинника-оригинала картины от её копии). Дело в том, что поверхность полотна-оригинала со временем покрывается микротрещинами, структура которых может быть фрактальной с определенной фрактальной размерностью, в то время как подделка оригинала, то есть новая картина, имеет другую структуру трещин, не образующих фрактал, либо представляющих собой фрактал с другой размерностью. Подробное изучение распределения структуры микротрещин с помощью предложенной программы облегчит обнаружение подделки оригинала.

Геометрическая обработка сигнала может быть применена в механике, например, для подсчёта пор и анализа их геометрических характеристик на поверхности срезов образцов (большое количество микропор-дефектов может привести к качественным изменениям физических свойств). Фрактальный анализ распределения угольной пыли в шахтном забое по фрактальным размерностям позволит обнаружить пороговую фрактальную размерность во взрывоопасном состоянии.

Постановка математической задачи и разработка алгоритма

Ниже приводится фрагмент программы для медианной фильтрации и фильтра Min-St-Max. Конфигурация фильтра – прямоугольник, который изменяется в интерфейсе настройками. Качество обработки геометрическими методами можно оценить при анализе фрактальных множеств, в которых на протяжении нескольких порядков масштаба встречаются как большие поры, так и мелкие в равном долевым отношении.

*Программа для фильтра медианной
фильтрации:*

```

subroutine median_filtration(na,nb,dimin,dim_out)
use globals
use xflogm
use xft
implicit none
include 'resource.fd'
integer(4),intent(in):: na,nb
integer(4),allocatable,intent(inout):: & dimin(:,)
integer(4),allocatable,intent(inout):: & dim_out(:,)
integer(4),allocatable:: dim0(:,)
type(t_rect):: rect
integer(4):: ist,i1,j1,la,lb,lad,lbd, &
iminx,iminy,imaxx,imaxy,
integer(4):: medval,ires1,k1,k2
real(4):: xres1,xrestek
character(200):: string
logical:: flag
integer(4):: ixsqmin,ixsqmax
integer(4):: iysqmin,iysqmax,dims
xrestek=0.
if(allocated(dimin)) then
continue
else
return
endif
imaxx=ubound(dimin, dim=1)
iminx=lbound(dimin, dim=1)
imaxy=ubound(dimin, dim=2)
iminy=lbound(dimin, dim=2)
if(allocated(dim_out)) then
deallocate(dim_out)
endif
allocate(dim_out(iminx:imaxx, &
iminy:imaxy))
flag=dlgset(xw_frame, &
idc_static50, медианная фильтрация... ')
do i1=iminy,imaxy,1
do j1=iminx,imaxx,1
iysqmin=max(i1-nb,iminy)
iysqmax=min(i1+nb,imaxy)
ixsqmin=max(j1-na,iminx)
ixsqmax=min(j1+na,imaxx)
dim_out(j1,i1)=median_small &
(ixsqmin,ixsqmax,iysqmin,iysqmax,dimin&
(ixsqmin:ixsqmax,iysqmin:iysqmax))
enddo
xres1=1000.*real(i1)/real(imaxy-lb+1)
if(xres1-xrestek>=10) then
xrestek=xres1
ires1=int(xres1)
write(string,'(f5.1)') xres1/10.
string=adjustl(string)
string=trim(string)//%'
flag=dlgset(xw_frame,idc_progress1,ires1)
flag=dlgset(xw_frame,idc_static51,string)
endif
enddo
flag=dlgset(xw_frame,idc_static50, & выполнено!)
```

```

end subroutine median_filtration
Программа для фильтра min-sr-max...
subroutine b_min_max(na,nb,dimin,dim_out)
use globals
use xflogm
use xft
implicit none
include 'resource.fd'
integer(4),intent(in):: na,nb
integer(4),allocatable,intent(inout):: & dimin(:,)
integer(4),allocatable,intent(inout):: & dim_out(:,)
integer(4), allocatable:: dim0(:,)
type(t_rect):: rect
integer(4):: ist,i1,j1,la,lb,lad,lbd
integer(4):: iminx,iminy,imaxx, & imaxy,medval, &
ires1,k1,k2,numkol
real(8):: xres1,xrestek,rkol
character(200):: string
logical:: flag
integer(4):: ixsqmin,ixsqmax,iysqmin, &
iysqmax
xrestek=0.0
if(allocated(dimin)) then
continue
else
return
endif
imaxx=ubound(dimin, dim=1)
iminx=lbound(dimin, dim=1)
imaxy=ubound(dimin, dim=2)
iminy=lbound(dimin, dim=2)
if(allocated(dim_out)) then
deallocate(dim_out)
endif
allocate(dim_out(iminx:imaxx,iminy:imaxy))
dim_out=dimin
lad=2*na
lbd=2*nb
la=2*na+1
lb=2*nb+1
numkol=la*lb
flag=dlgset(xw_frame,idc_static50, &
'фильтр min-sr-max...')
do i1=iminy,imaxy,1
do j1=iminx,imaxx,1
iysqmin=max(i1-nb,iminy)
iysqmax=min(i1+nb,imaxy)
ixsqmin=max(j1-na,iminx)
ixsqmax=min(j1+na,imaxx)
dim_out(j1,i1)=
minval(dimin(ixsqmin:ixsqmax,iysqmin: &
iysqmax)) + &
maxval(dimin(ixsqmin:ixsqmax,iysqmin: &
iysqmax)) - & sum(dimin(ixsqmin:ixsqmax,iysqmin: &
&
iysqmax))/rkol
rkol=real(ixsqmax-ixsqmin+1)* &
(iysqmax-iysqmin+1)
enddo
xres1=1000.*real(i1)/real(imaxy-iminy+1)
```

```

if(xres1-xrestek>=10) then
  xrestek=xres1
  ires1=int(xres1)
  write(string,'(f5.1) xres1/10.
  string=adjustl(string)
  string=trim(string)//%'
  flag=dlgset(xw_frame, IDC_PROGRESS1 &
,ires1 )
  flag=dlgset(xw_frame, IDC_STATIC51, string)
endif
enddo
flag=dlgset(xw_frame, IDC_STATIC50, &
'выполнено!')
end subroutine b_min_max
  
```

Программный продукт для анализа графических изображений написан на языке программирования Visual Fortran. С использованием программы можно выделять на рисунках области однородной освещенности, подсчитывать их количество, размеры в пикселях, эффективные диаметры, площади, изобразить функции распределения случайной величины, в качестве которой используется эффективный диаметр.

Эффективный диаметр равен радиусу круга равновеликой области однородной освещенности и вычисляется по формуле:

$$d = \sqrt{\frac{4n}{\pi}}, \quad (1)$$

где n – число пикселей, содержащихся в данной области.

Из формулы (1) следует, что эффективный диаметр является безразмерной величиной, т.е. размер поры равен произведению d на диаметр одного пикселя.

Программа строит распределения пор, когда эффективный диаметр изменяется в диапазоне от минимального n_1 до максимального n_2 при делении интервала эффективных диаметров на N равных частей, где $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq N$. Параметры n_1, n_2, N можно менять в интерфейсе в диалоговом режиме. В этом случае обработка распределений и построение графика происходит при нажатии на кнопку «график».

С использованием программы можно анализировать микроструктуры поликристаллических твердых тел.

Ниже приведены результаты работы программы с классическими фракталами – треугольником Серпинского (рис. 1 – 3) и фракталом Мандельброта (рис. 4 – 6).

В работе преимущественно используются алгоритмические подходы обработки графического файла. Некоторые формулы обработки находятся внутри вызываемых функций из стандартной математической библиотеки Dflib Visual Fortran, а также библиотеки Xeffort.

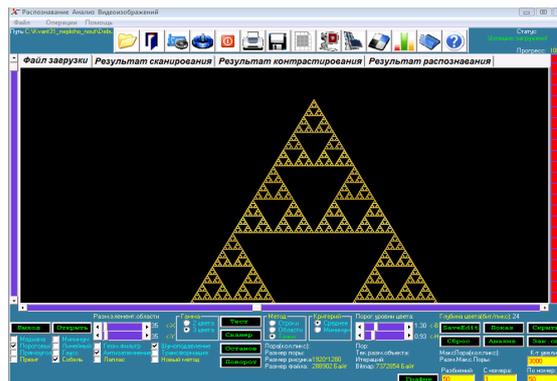


Рисунок 1. – Изображение треугольника Серпинского, загруженного в интерфейс программы

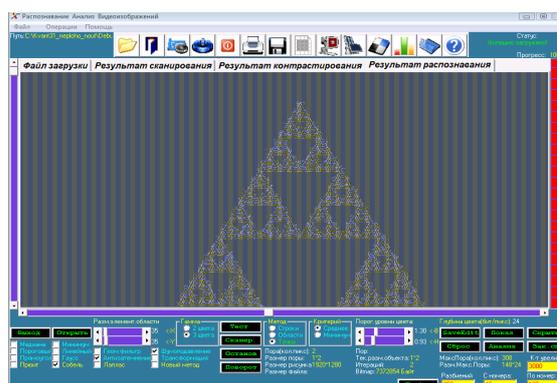


Рисунок 2. – Результат распознавания треугольника Серпинского

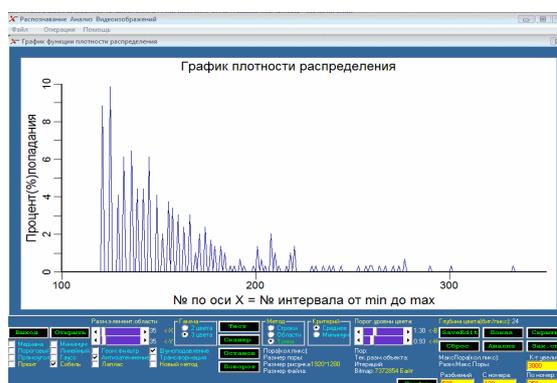


Рисунок 3. – График плотности распределения числа пор как функции эффективного диаметра ($N = 500, n_1 = 120, n_2 = 350$)

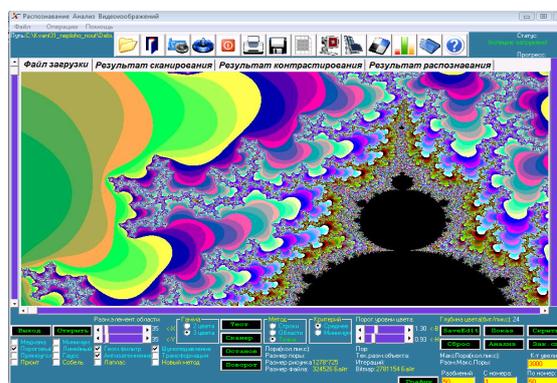


Рисунок 4. – Изображение фрактала Мандельброта, загруженного в интерфейс программы

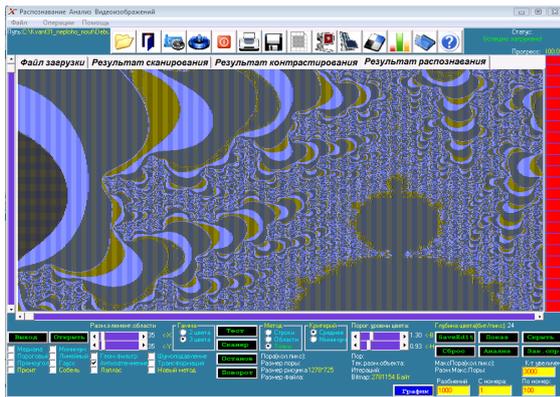


Рисунок 5. – Результат распознавания фрактала Мандельброта

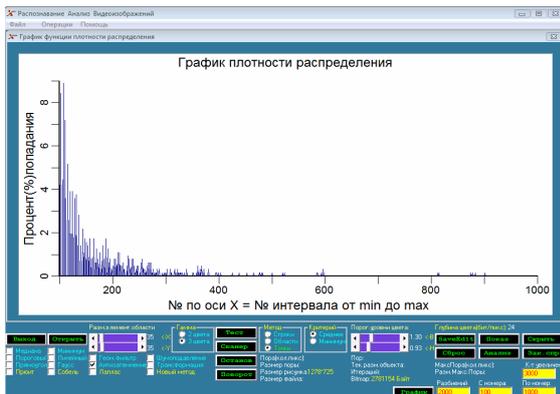


Рисунок 6. – График плотности распределения числа пор для фрактала Мандельброта как функции эффективного диаметра ($N = 2000, n1 = 100, n2 = 1000$)

Ниже приведены результаты обработки изображений в прикладных областях, в частности, в геофизике.

Показана обработка пузырей под сульфидной плёнкой на поверхности вулканического озера Банное (полуостров Камчатка). При обработке получено свыше $N = 2700$ пор.

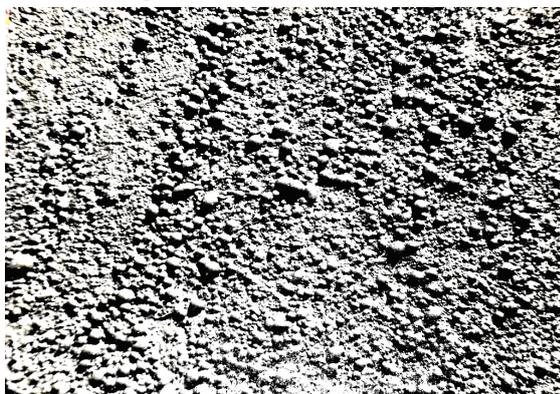


Рисунок 7. – Фотография пузырей на поверхности геотермального озера

Пузыри образуются на глубине геотермального озера из растворённых в воде мельчайших пузырьков. Со дна озера

выбрасывается в воду расплавленная сера и кристаллизуется в воде. В результате нагрева воды пузырьки воздуха практически с нулевым начальным объёмом расширяются до конечного объёма, прямо пропорционального плотности мощности источника плавучести турбулентной конвективной струи, затрачивая энергию $\varepsilon_j = V_j p = V_j (\rho g h_j + p_0)$. В указанной формуле используются принятые обозначения объёма пузыря, гидростатического давления, плотности воды, ускорения свободного падения и высоты столба жидкости и атмосферное давление соответственно. Как известно, турбулентный развитой горизонтальный поток имеет мультифрактальное пространственное распределение, называемое биномиальным, с параметрами распределения на геометрическом носителе $p = 0,7, q = 0,3$. Геометрическая мера одинаковых по длине 2^{-n} участков (n – номер поколения фрактала) геометрического носителя с числом участков носителя $N = 2^n$ с одинаковой удельной физической мерой определяется формулой:

$$X_n^k = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (2)$$

в то время как физическая мера биномиального мультифрактала, сосредоточенная на множестве X_n^k , имеет вид:

$$F_n^k = p^k q^{n-k} X_n^k = p^k q^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (3)$$

Всего фрактальных подмножеств $n + 1$. Известно, что фракталы – это множества дробной размерности. У биномиального мультифрактала размерность принимает интервал значений (размерность Хаусдорфа-Бизиковича).

Число пузырей каждого подмножества должно быть прямо пропорционально величине X_n^k , а произведение объёма пузырей на их число пропорционально F_n^k .

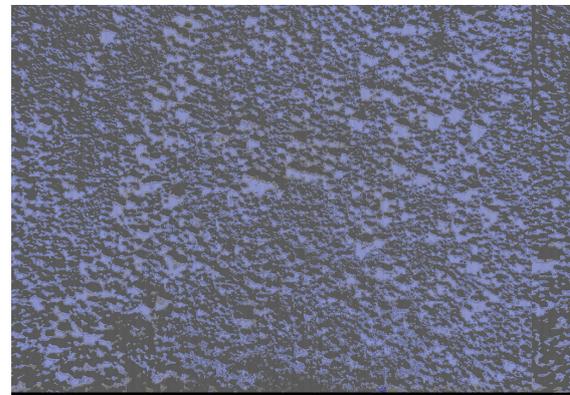


Рисунок 8. – Результат распознавания фотографии пузырей

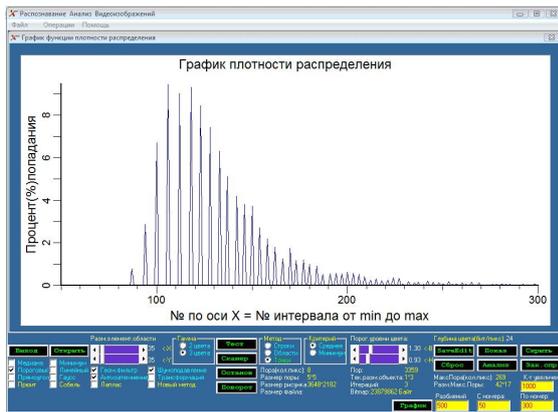


Рисунок 9. – График плотности распределения числа пузырей как функции эффективного диаметра ($N = 500, n_1 = 50, n_2 = 300$)

Сравнивая распределения, представленные на рисунках 3, 6 и 9, видно, что распределение числа пузырей от эффективного диаметра, также как и для фракталов треугольника Серпинского и фрактала Мандельброта, представляет собой немонотонную кривую с квазипериодическим распределением максимумов.

Для более точного расчёта упорядочим фрактальные подмножества по мере роста удельной физической меры $p^k q^{n-k}$, $k = \overline{0, n}$, которая прямо пропорциональна объёму пузыря $V_i, i = \overline{0, n_0}, V_i \leq V_{i+1}$.

Построим параметрическую функцию для биномиального распределения (теоретическая зависимость):

$$\begin{cases} X_l = \sum_{k=0}^l C_n^k / 2^n, l = \overline{0, n} \\ \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n \\ Y_l = \sum_{k=0}^l C_n^k p^k q^{n-k}, l = \overline{0, n} \\ \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = 1 \end{cases} \quad 0 \leq X_l, Y_l \leq 1. \quad (4)$$

Построим аналогичную функцию по экспериментальным точкам (рис. 10):

$$\begin{cases} y_l = \sum_{k=0}^l N_k V_k / \sum_{k=0}^{n_0} N_k V_k, l = \overline{0, n_0} \\ x_l = \sum_{k=0}^l N_k / \sum_{k=0}^{n_0} N_k, l = \overline{0, n_0} \end{cases} \quad 0 \leq x_l, y_l \leq 1. \quad (5)$$

Теоретическая кривая биномиального распределения построена по формуле (4), рисунок 11, а экспериментальная кривая описывается формулой (5).

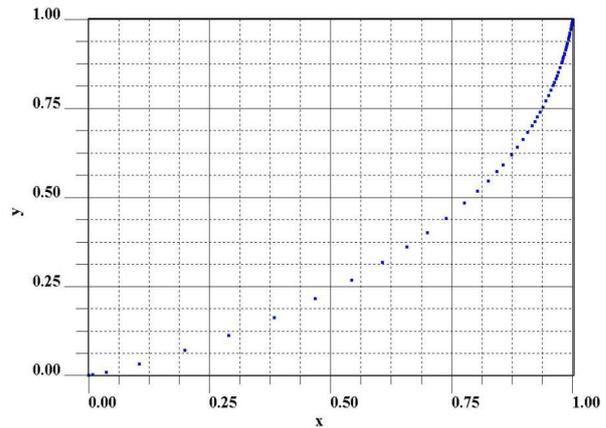


Рисунок 10. – Экспериментальная кривая – функция $y_l(x_l), l = \overline{1, n_0}, n_0 = 94$

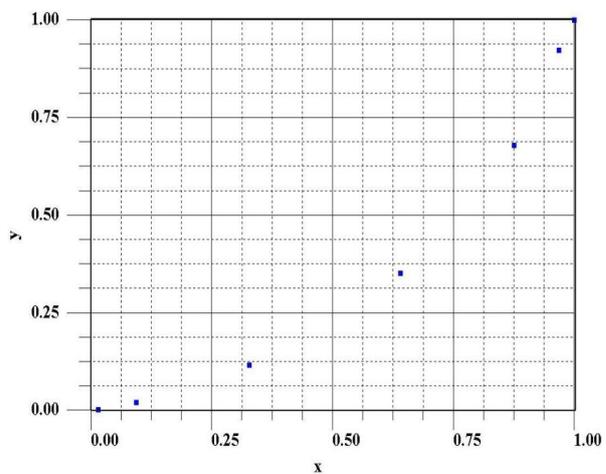


Рисунок 11. – Биномиальное распределение 6-го поколения $p = 0,65; q = 0,35$, функция $Y_l(X_l), l = \overline{1, n}, n = 6$

Мы видим, что мультифрактал 6-го поколения с параметрами $p = 0,65; q = 0,35$ хорошо описывает распределение пузырей, т.е. источник плавучести турбулентной конвективной струи распределён по биномиальному закону и является мультифрактальным множеством.

Можно предположить, что в результате изменения давления по высоте, т.е. дополнительной зависимости удельной физической меры от высоты все $N = 94$ фрактальных подмножеств «расщепляются» на такое число удельных значений объёмной мощности источника плавучести. Отметим, что параметры турбулентной горизонтальной струи $p = 0,7$ и вертикальной конвективной турбулентной струи $p = 0,65$ немного различаются, так как сила тяжести и эффекты плавучести могут внести изменения в энергетические распределения, в том числе во фрактальную размерность.

Источник плавучести расположен в нижней трети геотермального озера Фрактальное распределение как бы «размывается» по двум причинам. Во-первых, пузыри равного объема из одного подмножества, рожденные на разных высотах, должны соответствовать уже множествам с различной физической удельной мерой, т.е. получаем противоречивые требования. Во-вторых, пузыри под сульфидной пленкой могут объединяться или терять часть воздуха со временем, что также приводит к ограничениям на порядок мультифрактального множества пузырей. То есть, детали фрактальных множеств размываются по физическим причинам, а не из-за ограничения при анализе пузырей программой.

Выводы

Исходя из приведенных результатов можно сделать вывод, что с помощью разработанной программы можно анализировать графики плотности распределения с высоким разрешением, например, фрактальные множества.

Интерфейс программы имеет большое количество опций, с использованием которых можно анализировать графические файлы.

Программа может быть использована для сжатия графических файлов и видеоданных, реанимации слабоконтрастных изображений. Данная программа может быть применена в криминалистике, при анализе результатов физических экспериментов и решении технических задач.

Єхилевський С.Г., Голубєва О.В., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. «Математична обробка двовимірних зображень та пригнічення шуму геометричними фільтрами типу медіанної фільтрації». Розроблено програмний продукт для аналізу мікропор в графічних зображеннях різних об'єктів. Використання даного продукту дозволяє проводити статистичний аналіз ефективних діаметрів пор, збільшувати контраст зображення, пригнічувати випадкові шуми в графічному файлі з порушенням безперервності розглянутих розподілів. При тестуванні програми використано різні зображення – трикутник Серпінського, фрактал Мандельброта та розподіли бульбашок на поверхні геотермального озера Банное на кальдері Узон. Показано, що розподіл бульбашок описується мультифракталом біноміального розподілу шостого покоління.

Ключові слова: задача розпізнавання графічних образів, медіанна фільтрація, фільтри Гаусса, Лапласа, Прюїтт, Собеля.

Ehilevskiy S., Golubeva O., Pastuhov D., Pastuhov Y. "Mathematical processing the two-dimensional scenes and suppression of the noise geometric filter type median filtering". Mathematical processing the two-dimensional scenes and suppression of the noise geometric filter type median filtering. The program complex is written for analysis of micropores in graphic files. He conducts the statistical analysis of efficient diameter times, enlarges the contrast of the scene, suppresses the casual noises in graphic file with breach of continuity of the considered distribution. The Used examples of the processing the graphic files - a triangle of Serpinsky, fractal of Mandelbrot and sharing the bladders on surfaces geothermal lake Bath on caldera Uzon. It is shown that sharing the bladders is described multi fractal of binomial sharing the sixth generation.

Keywords: task of the recognition graphic image, median of filtering, filters Gauss, Laplas, Pruyitt, Sobel.

Список литературы

1. Алгазин С.Д., Кондратьев В.В. и др. Программирование на Visual Fortran. М.: Диалог-МИФИ, 2008. – 472 с.
2. Бартенев О.В. Математическая библиотека IMSL. Ч. 3. – М.: Диалог МИФИ, 2001. – 368 с.
3. Маркус Арьен. Современный Fortran на практике. ДМК Пресс, 2015. – 308 с.
4. Штыков В.В. FORTRAN & WIN32 API. Создание программного интерфейса для Windows средствами современного Фортрана. М.: Диалог-МИФИ, 2000. – 304 с.
5. Бухтияров А.М., Маликов Ю.П. Практикум по программированию на фортране. М.: Наука, 1979. – 304 с.

References (transliteration)

1. Algazin S.D., Kondrat'ev V.V. i dr. Programirovanie na Visual Fortran. M.: Dialog-MIFI, 2008. – 472 p.
2. Barten'ev O.V. Matematicheskaja biblioteka IMSL. Ch. 3. – M.: Dialog MIFI, 2001. – 368 p.
3. Markus Ar'en. Sovremennyy Fortran na praktike. DMK Press, 2015. – 308 p.
4. Shtykov V.V. FORTRAN & WIN32 API. Sozдание programmogo interfejsa dlja Windows sredstvami sovremenogo Fortrana. M.: Dialog-MIFI, 2000. – 304 p.
5. Buhtijarov A.M., Malikov Ju.P. Praktikum po programirovaniju na fortrane. M.: Nauka, 1979. – 304 p.

Статья поступила в редакцию 07.06.2015

Рекомендована к публикации канд. техн. наук А.В. Звягинцевой

УДК 004.7

Система формирования трафика компьютерной сети на основе самоорганизованной критичности

Бельков Д.В., Едемская Е.Н.

Донецкий национальный технический университет
belkov65@list.ru

Бельков Д.В., Едемская Е.Н. «Система формирования трафика компьютерной сети на основе самоорганизованной критичности». В данной работе для формирования трафика при дифференцированном обслуживании (DiffServ) предлагается система, основанная на понятии самоорганизованной критичности (Self-Organized Criticality, SOC). Разработана модель SOC BTWIDm, являющаяся модификацией модели Бака-Танга-Вайзенфельда. Предложена структура системы формирования трафика, которая выполняет алгоритм BTWIDm. Приведены результаты вычислительного эксперимента при формировании самоподобного трафика. Эксперимент выполнен в среде Matlab. Самоподобный входной трафик был сглажен с помощью предложенной системы. Коэффициент пачечности исходного потока уменьшился на 20 единиц относительно коэффициента пачечности входного потока.

Ключевые слова: самоподобный трафик, качество обслуживания, дифференциальное обслуживание, система формирования трафика, самоорганизованная критичность, модель Бака-Танга-Вайзенфельда.

Введение

В условиях развития телекоммуникаций до уровня сетей следующего поколения NGN (Next Generation Networks), обеспечивающих предоставление неограниченного набора услуг с заданными характеристиками качества обслуживания QoS (Quality of Service), становятся все более актуальными задачи повышения качества обслуживания. Расширение спектра услуг и рост сложности телекоммуникационных систем и сетей требует решения проблемы разработки адекватных методов анализа и синтеза таких систем с целью получения достоверных оценок их характеристик, реализации задач их оптимизации в соответствии с выбранным критерием качества обслуживания и разработки соответствующих алгоритмов управления.

Количественная сторона процессов обслуживания потоков сообщений (трафика) в системах распределения информации (СРИ) является предметом теории трафика. По этой теории разрабатываются научно обоснованные методы оценки характеристик качества обслуживания. В первую очередь учитывается стохастический характер трафика. Основным содержанием теории трафика является исследование пропускной способности СРИ, которое тесно связано с оценкой QoS.

Теория трафика оперирует не с самими СРИ, а с их математическими моделями. Многообразие видов и топологии сетей, структур систем и способов выделения сетевого ресурса для обслуживания трафика требует

разработки моделей, которые учитывают реальный характер потоков сообщений и детали обслуживания мультисервисного трафика различных коммуникационных приложений (речь, видео, данные). Построить единственную модель, которая бы давала ответы на все вопросы относительно функционирования компьютерных сетей практически невозможно. На основе моделей СРИ разрабатываются методы оценки характеристик QoS, достоверность которых зависит от адекватности модели реальной ситуации, которая может возникнуть при проектировании и эксплуатации. Оценка качества обслуживания трафика является одним из важнейших научных направлений в исследованиях компьютерных сетей. В современных сетях потоки пакетов формируются множеством источников требований на предоставление сетью услуги и сетевых приложений, обеспечивающих услуги передачи информации. Пользователи, создающие потоки пакетов, существенно отличаются между собой значениями удельной интенсивности нагрузки, и поэтому трафик является разнородным и с долгосрочными зависимостями в интенсивности (например, из-за повторной передачи неверно принятых пакетов) и с определенными требованиями к QoS. Передачу потоков различных служб обеспечивает единая сеть. Поскольку источники каждой службы могут иметь разные скорости передачи информации или изменять ее в процессе сеанса связи, то потокам пакетов свойственна пачечность (burstness). В реализации трафика присутствует некоторое

количество больших пульсаций при относительно малом среднем уровне трафика. Пакеты поступают на узел не по отдельности, а пачкой. Это явление ухудшает характеристики (увеличивает потери, задержки, джиттер пакетов) при прохождении трафика через узлы сети. При анализе пачечного трафика может быть использована модель самоподобного (self-similarity) процесса [1].

Для формирования самоподобного трафика согласно определенным требованиям в данной работе предлагается система, основанная на понятии самоорганизованной критичности (Self-Organized Criticality, SOC).

Целью статьи является разработка системы формирования трафика на базе SOC. В работе решаются задачи построения модели SOC BTW1Dm и создания структуры системы формирования трафика, которая выполняет алгоритм BTW1Dm. Показаны результаты вычислительного эксперимента.

Теория самоорганизованной критичности, модели BTW1D, BTW1Dm

В нелинейной динамике до настоящего времени разработаны три парадигмы. В рамках первой было показано, что во многих открытых нелинейных системах вдали от равновесия происходит самоорганизация. При этом возникают пространственно-неоднородные стационарные структуры, которые И. Р. Пригожин предложил называть диссипативными структурами. Во второй парадигме основное внимание было уделено динамическому хаосу – сложному непериодическому поведению в детерминированных системах, где нет случайных факторов. Основным результатом исследований стало установление факта границ прогнозирования, т.е. существования конечного времени, через которое предсказание поведения системы становится невозможным. В основе этих парадигм лежат представления о самоорганизации и выделении из большого числа переменных, описывающих систему, небольшого числа величин, которые называются параметрами порядка. К ним на больших интервалах времени подстраиваются остальные степени свободы системы.

Третья парадигма связана с теорией самоорганизованной критичности. Эта теория призвана объяснить такие закономерности, как масштабная инвариантность, прерванное равновесие, фликкер-шум [2]. Нужно отметить, что именно такие закономерности экспериментально найдены при исследованиях современного трафика.

В 1988 году американскими учеными П. Баком, Ч. Тангом и К. Вайзенфельдом было введено понятие о самоорганизованной критичности [3]. Базовой моделью теории SOC

является куча песка. Рассмотрим кучу песка, изображенную на рисунке 1.

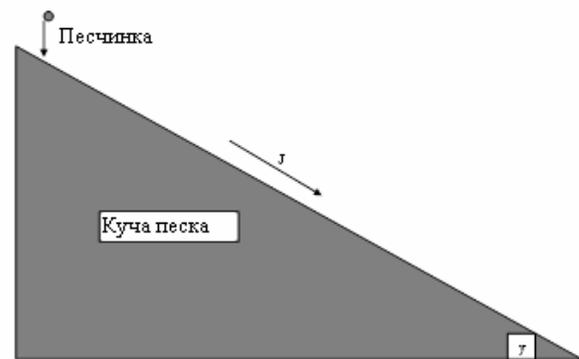


Рисунок 1. – Куча песка

Будем предполагать сцепление между песчинками достаточно большим. При этом возможно лишь поверхностное перемещение песка, причем инерцией его движения можно пренебречь. В таком случае состояние системы полностью определяется наклоном поверхности. В тех местах, где локальный наклон оказывается больше порога устойчивости, происходит осыпание песчинок вниз по склону на соседние участки поверхности. Состояние песка определяется углом наклона поверхности γ . При его изменении происходит фазовый переход от неподвижного состояния к состоянию непрерывного тока песка. При токе, соответствующем добавлению одной песчинки за один шаг, система самоорганизуется в состояние с критическим наклоном $\gamma = \gamma_c$. Если средний наклон поверхности γ меньше чем γ_c , то песок неподвижен. Если наклон превышает значение γ_c , возникает спонтанный ток песка J по поверхности. Возникает фазовый переход, в котором управляющим параметром является наклон γ , а параметром порядка – ток песка J . Критическое значение наклона γ_c разделяет хаотическую ($\gamma < \gamma_c$) и упорядоченную ($\gamma > \gamma_c$) фазы. Обе эти фазы соответствуют состоянию системы устойчивому к малым возмущениям. В хаотической фазе они еще быстро затухают во времени и пространстве, а в упорядоченной – уже не могут существенно влиять на величину тока. И только в критической точке, одна добавленная песчинка может вызывать лавину. В песчаной куче существует много областей неустойчивости, но критическое состояние является устойчивым. Такие характеристики тесно связаны с фракталами.

Самым простым вариантом модели кучи песка является одномерная модель Бака-Танга-Вайзенфельда (BTW-1D). Ее работу рассмотрим на примере [4], показанном на рисунке 2.

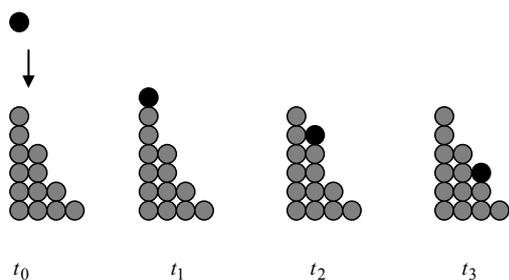


Рисунок 2. – Модель BTW-1D

Пусть задан критический порог $z_c = 2$ и куча песка, имеющая 4 слоя. В начальном состоянии первый слой кучи содержит 6 песчинок, второй – 4, третий – 2 и четвертый слой – 1 песчинку. Уровень песка в каждом слое отличается от уровня предыдущего слоя не больше, чем на величину z_c : $(6 - 4) = 2$, $(4 - 2) = 2$, $(2 - 1) = 1$. По этой причине куча песка находится в устойчивом состоянии (песок неподвижен). Пуск модели выполняется добавлением новой песчинки на вершину. При этом уровень песка в первом слое повышается, и он становится неустойчивым: $(6 + 1) = 7$, $(7 - 4) = 3 > z_c$. В таком случае песчинка не остается на первом слое, а передвигается на второй слой и количество песка в первом слое возвращается к значению 6. Уровень песка во втором слое повышается и он становится неустойчивым: $(4 + 1) = 5$, $(5 - 2) = 3 > z_c$. Поэтому песчинка не останавливается на втором слое, передвигается на третий слой и количество песка во втором слое возвращается к значению 4. Уровень песка в третьем слое повышается, но он остается устойчивым: $(2 + 1) = 3$, $(3 - 1) = 2 = z_c$. Поэтому песчинка останавливается на третьем слое. Первый шаг моделирования завершен. На нем прошла лавина перемещений от первого к третьему слою.

Каждый новый шаг будет начинаться добавлением новой песчинки на вершину. На одном шаге моделирования возможно 3 ситуации: 1) новая песчинка остается на вершине (лавина нет), 2) новая песчинка останавливается на каком-то слое кучи, то есть лавина не достигает основания кучи, 3) новая песчинка не останавливается ни на одном слое кучи и покидает кучу (лавина достигает основания кучи).

Такой процесс формирования кучи песка является процессом самоорганизации потому, что он идет без внешнего управляющего сигнала. Рост уровня слоев управляется правилами (1), где z_i – количество песчинок, содержащихся в слое i .

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= z_{i+1} + 1, z_i - z_{i+1} > z_c \\ z_i &= z_i + 1, z_i - z_{i+1} \leq z_c \end{aligned} \quad (1)$$

Величины z_i являются управляющими параметрами системы, значение z_c является критическим значением для управляющих параметров. Достижение этого значения качественно изменяет поведение системы. Процесс формирования кучи песка является процессом самоорганизации управляющих параметров в критическое состояние и поэтому система является системой самоорганизованной критичности.

В данной статье для системы формирования трафика предлагается модифицированная модель BTW-1Dm. Модификация заключается в следующем: 1) каждая песчинка имеет свой объем, т.е. песчинки не являются одинаковыми, 2) каждый слой имеет свой критический уровень (порог), 3) рост уровня слоев управляется правилами (2), где $z_{i,j}$ – количество песчинок, содержащихся в слое i на временном шаге j , x_j – объем песчинки j , z_{ci} – критический порог слоя i . Если добавление песчинки j к слою i приводит к превышению критического порога z_{ci} , то она перемещается на следующий уровень, иначе – песчинка добавляется на уровень i .

$$\begin{aligned} z_{i+1,j} &= z_{i+1,j} + x_j, z_{i,j} + x_j - z_{i,j-1} > z_{ci} \\ z_{i,j} &= z_{i,j} + x_j, z_{i,j} + x_j - z_{i,j-1} \leq z_{ci} \end{aligned} \quad (2)$$

Величины $z_{i,j}$ являются управляющими параметрами системы, значения z_{ci} являются критическими значениями для управляющих параметров. Такая модификация сохраняет самоорганизованную критичность системы.

Разработка системы формирования трафика

Для обеспечения гарантированного качества обслуживания комитет ИЕТР разработал модель дифференцированного обслуживания разнотипного трафика – DiffServ. Пакеты каждого класса должны обрабатываться в соответствии с определенными для этого класса требованиями качества обслуживания. Модель DiffServ описывает архитектуру сети как совокупность пограничных участков и ядра. Пример сети, соответствующий этой модели, показан на рисунке 3. Пограничные маршрутизаторы классифицируют и нормализуют трафик. Нормализация трафика предусматривает измерение его параметров, проверку соответствия заданным правилам предоставления услуг, профилирование. При этом пакеты, которые не удовлетворяют установленным правилам, теряются.

Преимущество модели DiffServ заключается в том, что она позволяет разделить весь трафик на небольшое количество классов и не анализировать каждый информационный поток отдельно. Для DiffServ при независимом поведении маршрутизаторов (PHB) определены два варианта обслуживания:

- срочная пересылка пакетов (Expedited Forwarding, EF);
- гарантированная пересылка пакетов (Assured Forwarding, AF).

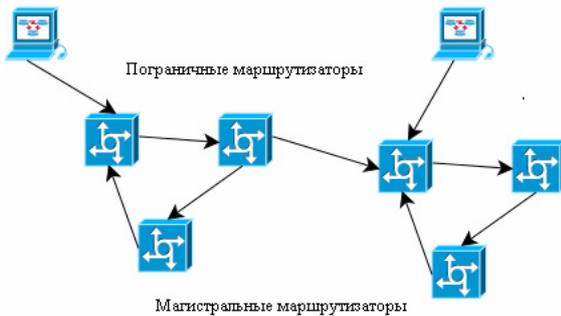


Рисунок 3. – Модель DiffServ

Вариант EF является наивысшим уровнем качества обслуживания. Любой трафик, с интенсивностью превышающей заданный уровень, отбрасывается. Вариант AF предусматривает четыре класса трафика. Трафик, интенсивность которого превышает заданный уровень, доставляется с меньшей вероятностью. Качество его обслуживания может быть снижено.

Механизм обеспечения QoS на уровне сетевого устройства в DiffServ, использует четыре операции. Сначала пакеты классифицируются на основании их заголовков. Потом они маркируются в соответствии с выполненной классификацией (в поле DiffServ). В зависимости от маркировки выбирается алгоритм передачи, позволяющий избежать заторов в сети. Заключительная операция состоит в организации очередей с учетом приоритетов.

На рисунке 4 показана структура сетевого процессора C5e фирмы Motorola [5]. Выделена часть структуры, совпадающая по своему назначению со структурой, которая разрабатывается в статье на базе SOC. В сетевом процессоре C5e используется разновидность алгоритма Token Bucket – stTCM. Он контролирует пиковую (PIR) и выполнимую (CIR) скорость трафика, создает поток зеленых конформных пакетов, поток желтых малоконформных пакетов, поток красных неконформных пакетов.

Предлагаемая в статье система формирования трафика выполняет алгоритм BTWIDm при следующей интерпретации для

входного трафика EF PHB: $z_{1,j}$ – уровень скорости выходного потока зеленых конформных пакетов на такте j , $z_{2,j}$ – уровень скорости выходного потока красных неконформных пакетов на такте j , x_j – скорость входного потока на такте j , z_{c1} – заданная достижимая скорость трафика. Система по формулам (2) формирует и маркирует выходные потоки.

Diffserv QoS Implementation for Wireless Network Interface (WNI)

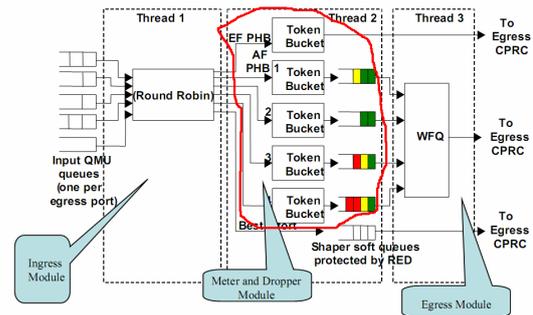


Рисунок 4. – Структура сетевого процессора C5e

Если система применяется для входного трафика AF PHB определенного класса, то используется алгоритм BTWIDm при следующей интерпретации: $z_{1,j}$ – уровень скорости выходного потока зеленых конформных пакетов на такте j , $z_{2,j}$ – уровень скорости выходного потока желтых малоконформных пакетов на такте j , $z_{3,j}$ – уровень скорости выходного потока красных неконформных пакетов на такте j , x_j – скорость входного потока на такте j , z_{c1} – заданная достижимая скорость трафика z_{c2} – заданная пиковая скорость трафика.

Рассмотрим предложенную систему в сравнении с Token Bucket. Система Token Bucket имеет: входной буфер пакетов, буфер выходных пакетов, буфер жетонов и сервер для сравнения входного потока с потоком жетонов. Жетоны генерируются с заданной интенсивностью и помещаются в очередь. Если буфер жетонов полон, то новый жетон теряется. В случае отсутствия жетонов пакеты должны сохраняться в буфере. Алгоритм Token Bucket основан на сравнении трафика с эталонным потоком, который представлен жетонами. Реализация алгоритма требует наличия счетчика, считающего жетоны. Счетчик увеличивается на N байт через равные интервалы времени и уменьшается при передаче пакета на объем переданного пакета. Когда

счетчик уменьшается до нуля, передача пакетов останавливается. В случае обслуживания EF пакет перемещается сервером из входного буфера в выходную очередь зеленых пакетов, если в ведре достаточно жетонов, иначе сервер перемещает пакет в очередь красных пакетов.

Состав системы Token Bucket показан на рисунке 5а.

В предложенной системе входной пакет попадает во входной буфер, его копия поступает в модуль BTW1Dm, который маркирует пакет по формулам (2). Сервер согласно маркировке перемещает пакет в выходную очередь зеленых пакетов или в очередь красных пакетов.

Разработанная система предназначена для достижения того же результата, что и Token Bucket. В данной статье не ставится цель показать преимущества предложенной системы перед Token Bucket. Такая задача нуждается в дополнительных исследованиях. Однако разработанная система имеет принципиальное отличие от ведра жетонов. Система Token Bucket является организационной (кибернетической) системой. Объект управления (входной пакет) изменяет свое состояние (перемещается из входного буфера в выходную очередь) при поступлении внешнего управляющего сигнала (жетона из ведра жетонов). Предложенная в статье система является самоорганизованной (синергетической) системой. Объект управления (входной пакет) изменяет свое состояние (перемещается из входного буфера в выходную очередь) без внешнего управляющего сигнала. Такое перемещение выполняется при поступлении внутреннего управляющего сигнала (маркированной копии пакета из модуля BTW1Dm). Состав системы показан на рисунке 5б.

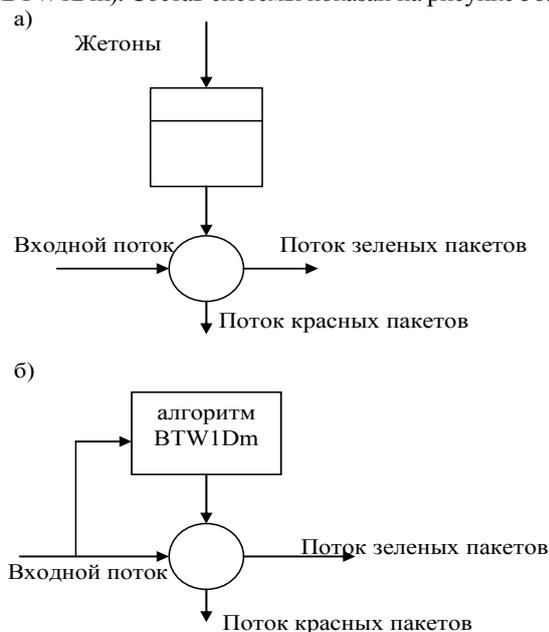


Рисунок 5. – Структуры Token Bucket и BTW1Dm

Для проверки работы предложенной системы выполнен вычислительный эксперимент в среде Matlab. Входной трафик показан на рисунке 6. Это временной ряд скорости (Мбайт/с.) пакетов беспроводной сети доступа [6]. Работа системы исследовалась для случая передачи в режиме AF PHB при $z_{c1} = 3$ Мбайт/с. (CIR) и $z_{c2} = 3,5$ Мбайт/с. (PIR). Результаты эксперимента показаны на рисунках 6 – 9.

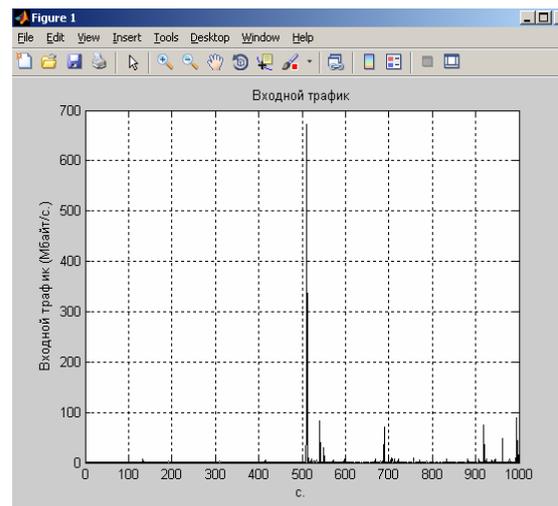


Рисунок 6. – Входной трафик

Система сформировала выходной поток зеленых пакетов, который является сглаженным потоком по отношению ко входному трафику. Были сформированы желтый поток малоформных пакетов, который составляют более скоростные пакеты и красный поток пакетов, имеющих недопустимо большую скорость. Максимальная скорость входного трафика превышает 6 Мбайт/с., максимальная скорость желтого трафика превышает 3 Мбайт/с., а максимальная скорость зеленого трафика не достигает 3 Мбайт/с. Скорость красного трафика находится в пределах от 4,5 до 6,3 Мбайт/с. Входной трафик имеет показатель Херста $H_{input} = 0,419$, коэффициент пачечности $b_{input} = 50,632$. Выходной зеленый трафик имеет показатель Херста $H_{green} = 0,463$, коэффициент пачечности $b_{green} = 27,037$. Таким образом, коэффициент пачечности зеленого трафика был снижен по отношению ко входному трафику. Коэффициенты пачечности желтого и красного трафика выросли относительно входного трафика и составили соответственно: $b_{yellow} = 229,274$, $b_{red} = 295,868$.

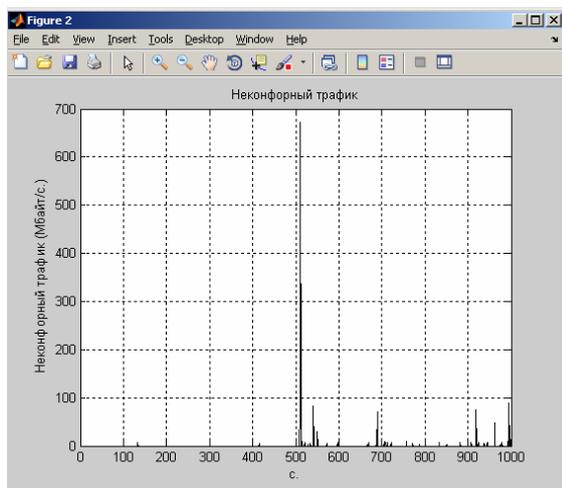


Рисунок 7. – Режим AF PNB. Неконформный трафик

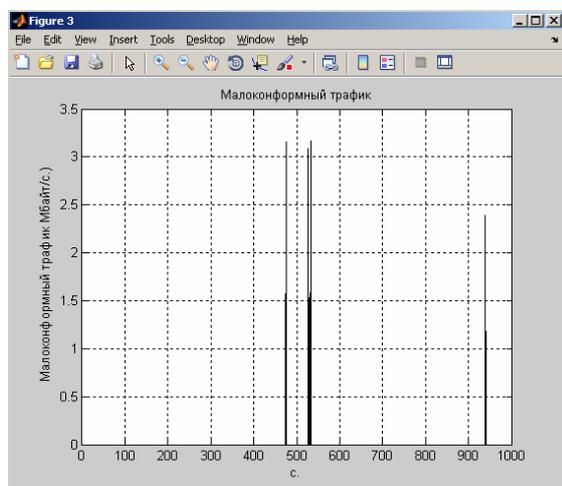


Рисунок 8. – Режим AF PNB. Малоконформный трафик

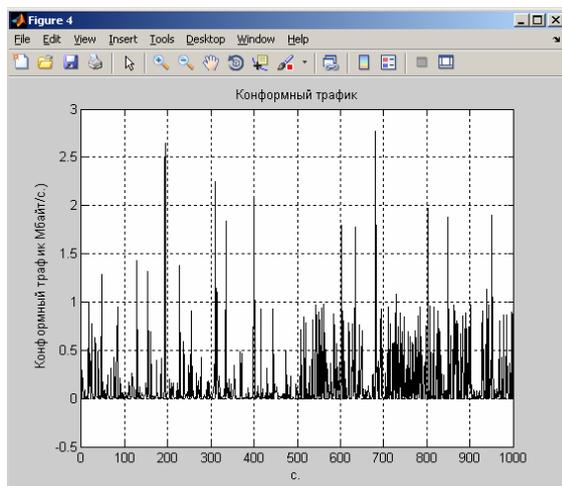


Рисунок 9. – Режим AF PNB. Конформный трафик

Во втором варианте эксперимента работа системы исследовалась для случая передачи в режиме EF PNB при $z_{c1} = 3,5$ Мбайт/с. Входной

трафик не изменился. Результат эксперимента показан на рисунке 10.

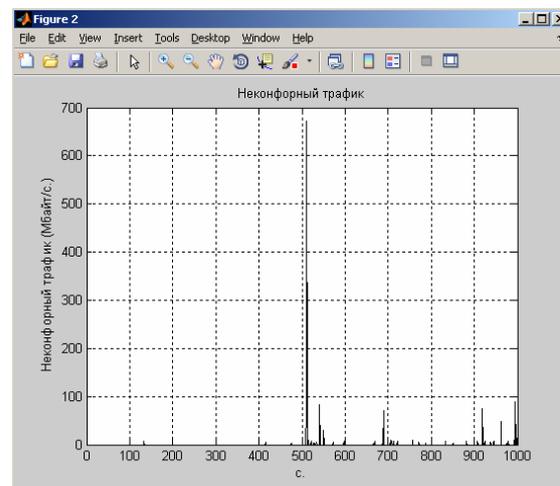


Рисунок 10. – Режим EF PNB. Неконформный трафик

Система сформировала выходной поток зеленых пакетов, который является сглаженным потоком относительно входного трафика. Был сформирован красный поток пакетов, имеющих сверхбольшую скорость. Максимальная скорость зеленого трафика достигает 3,2 Мбайт/с. Скорость красного трафика находится в пределах от 4,5 до 6,3 Мбайт/с. Выходной зеленый трафик имеет показатель Херста $H_{green} = 0,328$, коэффициент пачечности $b_{green} = 30,344$. Таким образом, коэффициент пачечности зеленого трафика снижен по отношению ко входному трафику. Коэффициент пачечности красного трафика не изменился по сравнению с первым экспериментом: $b_{red} = 295,868$.

Выводы

В работе получены следующие результаты:

1. Разработана модель BTW1Dm, которая является модификацией модели Бака-Танга-Вайзенфельда.
2. Разработана структура системы формирования трафика, выполняющая алгоритм BTW1Dm.
3. В среде Matlab выполнен вычислительный эксперимент, при котором самоподобный входной трафик был сглажен с помощью предложенной системы. Коэффициент пачечности исходного потока уменьшился на 20 единиц относительно коэффициента пачечности входного потока. Перспективным направлением является исследование разработанной модели при анализе систем обеспечения качества обслуживания в компьютерных сетях.

Список литературы

1. Ложковський А.Г. Аналіз і синтез систем розподілу інформації в умовах мультисервісного трафіка. Автореферат дисертації / Ложковський А.Г. – Одеса, 2010. – 38 с.
2. Подлазов А.В. Теория самоорганизованной критичности – наука о сложности. 2008. – Электр. ресурс, URL: <http://www.nonlin.ru/articles/podlazov/soc> (05.05.15).
3. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality // Physical review, Vol 38, № 1, 1988. – pp. 364 – 375.
4. Aschwanden M. Self-organized criticality in astrophysics, 2012. – Электр. ресурс, URL: <http://ua.bookfi.org/book/1076440> (13.05.15).
5. C-5e Network Processor, 2012. – Электр. ресурс, URL: http://www.freescale.com/files/netcomm/doc/data_sheet/C5ENPA1-DS.pdf (17.05.15).
6. DieselNet Fall 2007 – AP Connectivity, Электр. ресурс, URL: <http://traces.cs.umass.edu/index.php/Network/Network> (17.05.15).

References

1. Lozkovsky A.G. Analysis and synthesis of the systems of distributing of information in the conditions of multiservice traffic. Abstract of thesis of the dissertation. / Lozkovsky A.G. Odessa, 2010. – 38 p.
2. Podlazov A.V. The Self-Organized Criticality theory is the science of complexity. – Electr. resurs. URL: <http://www.nonlin.ru/articles/podlazov/soc> (05.05.15).
3. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality // Physical review, Vol 38, no.1, 1988. – pp. 364 – 375.
4. Aschwanden M. Self-organized criticality in astrophysics. Electr. resurs, URL: <http://ua.bookfi.org/book/1076440> (13.05.15).
5. C-5e Network Processor. – Electr. resurs, URL: http://www.freescale.com/files/netcomm/doc/data_sheet/C5ENPA1-DS.pdf (17.05.15).
6. DieselNet Fall 2007 – AP Connectivity. Electr. resurs, URL: <http://traces.cs.umass.edu/index.php/Network/Network> (17.05.15).

Бельков Д.В., Едемська Є.М. “Система формування трафіку комп’ютерної мережі на основі самоорганізованої критичності”. У даній роботі для формування трафіка при диференційованому обслуговуванні (DiffServ) пропонується система, яка заснована на понятті самоорганізованої критичності (Self-Organized Criticality, SOC). Розроблена модель SOC BTWIDm, що є модифікацією моделі Бака-Танга-Вайзенфельда. Розроблена структура системи формування трафіку, яка виконує алгоритм BTWIDm. Показані результати обчислювального експерименту при формуванні самоподібного трафіку. Експеримент виконано у середовищі Matlab.

Ключові слова: самоподібний трафік, якість обслуговування, диференційне обслуговування, система формування трафіку, самоорганізована критичність, модель Бака-Танга-Вайзенфельда.

Belkov D.V., Edemskaya E.N. “The traffic from a computer network formed system based self-organized criticality”. Recent studies of real traffic in modern computer networks have shown that traffic exhibits self-similar (or fractal) properties over a wide range of time scales. The use of traditional models in networks characterized by self-similar processes can lead to incorrect conclusions about the performance of analyzed networks. One of the most important tasks of network research is to construct adequate models for the concerned traffic flows. Known area in the network traffic studies is using the methods of nonlinear analysis (chaos theory) for its parameter modeling and prediction. This theory is one of the synergetic paradigms. Another synergetic paradigm is the theory of self-organized criticality (SOC). It has been used to model phenomena as diverse as the dynamics of granular materials, evolution, earthquakes, forest fires, landscape formation, solar flares, river networks, mountain ranges, volcanic activity and the spreading of epidemics, to mention just a few. SOC is a group of models that are related to each other via formal analogy. In case SOC approach, fractal signal is the output signal of the nonlinear dynamic system, but this system is in the critical state. The output signal is the result of the self-organization (synergetic) process. The organization process is process of the control parameters exact tuning for the order parameters setting in the necessary values. In case SOC, the self-organization process is process of the order parameters robust setting in the necessary values, which causes the control parameters tuning. In this article the traffic formed system based self-organized criticality (SOC) is present for the difference service (DiffServ). The SOC model BTWIDm is design. It is the modification of the Bak–Tang–Wiesenfeld (BTW-1D) model. The system structure to run the BTWIDm algorithm is design. The results of the calculating experiments for self-similar traffic formed is present. An experiment was executed in the Matlab environment.

Keywords: self-similar traffic, quality of service, differential service, traffic formed system, Self-Organized Criticality, Bak–Tang–Wiesenfeld model.

Статья поступила в редакцию 20.06.2015
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук С.Г. Ехилевским

Алгоритм нейро-нечеткого выбора тайм-аута повторной передачи в самоорганизующейся сети

Польщикова К.А.

Белгородский государственный университет
polshchikov@bsu.edu.ru

Польщикова К.А. «Алгоритм нейро-нечеткого выбора тайм-аута повторной передачи в самоорганизующейся сети». Предложено решение научной задачи, направленной на повышение оперативности доставки данных в беспроводной самоорганизующейся сети. Приведен алгоритм нейро-нечеткого выбора тайм-аута повторной передачи в этой сети. Алгоритм предусматривает измерение текущих значений времени ожидания подтверждений, нейро-нечеткое прогнозирование значений этой величины в следующем цикле и вычисление тайм-аута повторных передач на основе полученного прогноза. В соответствии с предложенным алгоритмом текущее значение тайм-аута повторной передачи периодически обновляется в рамках установленного логического соединения. Представлена блок-схема алгоритма. Имитационные эксперименты показали, что применение предложенного алгоритма обеспечивает существенное снижение отклонений тайм-аута повторной передачи от времени ожидания подтверждений, минимизацию повторных передач и уменьшение среднего времени передачи потоков данных.

Ключевые слова: самоорганизующаяся сеть, повторные передачи, тайм-аут, алгоритм.

Введение

Беспроводные самоорганизующиеся сети (Mobile Ad-Hoc Networks, MANET) являются перспективным направлением развития телекоммуникационных технологий. Главная отличительная особенность таких сетей состоит в их децентрализованной изменяемой структуре. Кроме того, MANET характеризуется отсутствием базовых станций (фиксированных узлов) и способностью каждого узла выполнять функции маршрутизатора [1].

Вследствие быстрого изменения сетевой топологии беспроводная самоорганизующаяся сеть отличается кратковременностью существования соединений, высокой вероятностью искажения информации, значительными задержками пакетов и их потерями. Влияние этих факторов приводит к снижению оперативности доставки данных в MANET [2, 3]. Как известно, для повышения этого показателя требуется увеличить производительность сети [4–6]. Анализ известных научно-технологических подходов, ориентированных на повышение производительности телекоммуникационных сетей показал, что в протоколах транспортного уровня важную роль играет правильная установка тайм-аута повторной передачи ζ – интервала времени, в течение которого узел-источник ожидает получение подтверждения на ранее отправленный пакет [7–10].

В сетях, работающих в соответствии с протоколом TCP (Transmission Control Protocol),

выбор значения тайм-аута осуществляется на основе алгоритма Джекобсона [11]. При этом используются модели, в которых значения коэффициентов были подобраны экспериментальным путем для сетей с фиксированной топологией. Несовершенство алгоритма Джекобсона приводит к тому, что при высокой вероятности потери данных вследствие искажений или сетевых перегрузок доставка сообщений существенно замедляется.

Для осуществления в MANET теоретически обоснованного выбора тайм-аута повторной передачи предложено использовать гибридную нейро-нечеткую интеллектуальную систему [12–14]. На вход этой системы подаются следующие величины: M – значение времени ожидания подтверждения, измеренное в текущем цикле; M^{pr1} – значение времени ожидания подтверждения, измеренное в предыдущем цикле; M^{pr2} – значение времени ожидания подтверждения, измеренное в цикле, предшествующем предыдущему. Выходной величиной системы является переменная \tilde{M} – значение времени ожидания подтверждения, прогнозируемое в следующем цикле. Эта величина определяется в результате выполнения процедуры нейро-нечеткого вывода.

В соответствии с предлагаемым методом процесс выбора тайм-аута повторной передачи должен включать следующие этапы: измерение текущих значений M ; сохранение значений M^{pr1} и M^{pr2} ; ввод значений M , M^{pr1} и M^{pr2} в качестве входных величин нейро-

нечеткой системы прогнозирования времени ожидания подтверждений; определение выходной величины \tilde{M} на основе выполнения нейро-нечеткого вывода; установка в следующем цикле тайм-аута повторной передачи, значение которого вычисляется по формуле:

$$\zeta = \tilde{M} + \Delta\zeta, \quad (1)$$

где $\Delta\zeta > 0$ – добавочная величина, используемая для устранения ошибочных повторных передач.

Выбор параметров нейро-нечеткой системы, особенности ее настройки и функционирования изложены в [14]. Данная статья посвящена разработке алгоритма выбора тайм-аута повторной передачи в самоорганизующейся сети на основе нейро-нечеткой системы прогнозирования времени ожидания подтверждений.

Разработка алгоритма

Для осуществления нейро-нечеткого выбора тайм-аута повторной передачи в самоорганизующейся сети разработан алгоритм, блок-схема которого представлена на рисунке 1. В соответствии с предлагаемым алгоритмом текущее значение тайм-аута повторной передачи в рамках установленного логического соединения периодически обновляется. Период цикла перерасчета этой величины составляет $I\Delta t$, где I – количество тактов в цикле, Δt – длительность такта.

В начале алгоритма осуществляется ввод следующих величин: M_0 , M_0^{pr1} и M_0^{pr2} – начальных значений M , M^{pr1} и M^{pr2} соответственно, N – числа циклов обновления величины ζ , а также величин I и $\Delta\zeta$. При этом значение величины $\Delta\zeta$ рекомендуется выбирать в пределах $\Delta\zeta = 0,1M_{\max} \dots 0,2M_{\max}$, где M_{\max} – максимальное из измеренных ранее значений времени ожидания квитанций. Далее в рамках установленного логического соединения величинам M , M^{pr1} и M^{pr2} присваиваются начальные значения. Затем организуется циклический перерасчет величины межпакетного интервала, при этом n – номер цикла, изменяющийся с шагом 1. В рамках каждого цикла организуется выполнение I элементарных тактов длительностью Δt . В ходе каждого такта выполняются следующие операции:

- 1) осуществляется проверка получения подтверждения на пакет, который повторно не отправлялся;
- 2) при получении в текущем такте подтверждения измеряется значение M .

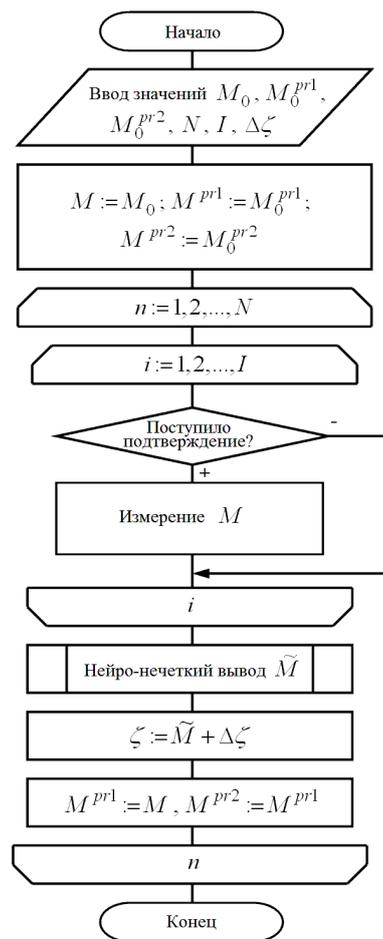


Рисунок 1. – Блок-схема алгоритма

После выполнения I тактов осуществляется процедура нейро-нечеткого вывода величины \tilde{M} . Далее по формуле (1) выполняется перерасчет значения тайм-аута повторных передач. В конце каждого цикла обновляются значения M^{pr1} и M^{pr2} .

Для оценки эффективности применения указанного алгоритма использовалась имитационная модель передачи информационных потоков в MANET, созданная в программной среде MatLab & Simulink [15]. Проведены вычислительные эксперименты, в которых имитировался выбор тайм-аута повторной передачи на основе алгоритма Джекобсона, а также на основе нейро-нечеткого прогнозирования величины M . Полученные экспериментальные кривые в качестве примера представлены на рисунке 2. Результаты моделирования показали, что применение нейро-нечеткого выбора тайм-аута повторной передачи в самоорганизующейся сети обеспечивает снижение отклонений этой величины от времени ожидания подтверждений на 5,7 – 19,2 %. Это способствует минимизации повторных передач и уменьшению среднего времени передачи потоков данных на 4,2 % – 9,6 %.

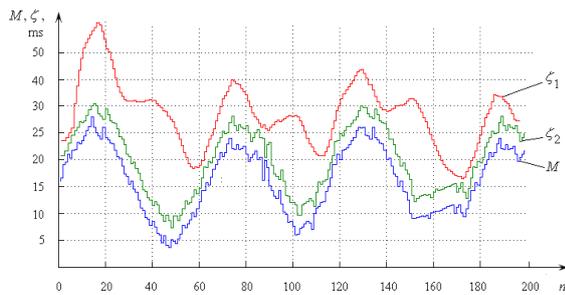


Рисунок 2. – Результаты моделирования:
 M – значения времени ожидания подтверждений в каждом текущем цикле n ; ζ_1 – значения тайм-аута повторной передачи, получаемые на основе выполнения алгоритма Джекобсона; ζ_2 – значения тайм-аута повторной передачи, получаемые на основе нейро-нечеткого выбора

Выводы

Повышение оперативности доставки данных в самоорганизующейся сети является актуальной задачей. Для ее решения разработан алгоритм нейро-нечеткого выбора тайм-аута повторной передачи. Основными этапами данного алгоритма являются измерение текущих значений времени ожидания подтверждений, нейро-нечеткое прогнозирование значений этой величины в следующем цикле и вычисление тайм-аута повторных передач на основе полученного прогноза.

В результате имитационных экспериментов установлено, что применение предложенного алгоритма обеспечивает существенное снижение отклонений тайм-аута повторной передачи от времени ожидания подтверждений, минимизацию повторных передач и уменьшение среднего времени передачи потоков данных.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (уникальный идентификатор проекта RFMEFI57815X0138).

Список литературы

1. Basagni S., Conti M., Giordano S. and Stojmenovic I., 2004. Mobile Ad Hoc Networking. IEEE Press, 461 p.
2. Polshchikov K.O., 2013. Synthesis of neuro-fuzzy systems of data flows intensity control in mobile ad-hoc network. Proceedings of the 23rd International Crimean Conference "Microwave and Telecommunication Technology (CriMiCo)", pp: 517 – 518.
3. Polshchikov K.O., 2012. Functional model of data flows intensity control in the mobile radio network of the DSEA, 1, pp: 127 – 135.
4. Polshchikov K., Olexij S. and Rvachova N., 2010. The Methodology of Modeling Available for Data Traffic Bandwidth Telecommunications Network Proceedings of the International

- Conference "Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (TCSET)", 158 p.
5. Konstantinov I.S., Lazarev S.A., Polshchikov K.O. and Mihalev O.V., 2015. Theoretical aspects of evaluation of the corporative portal network traffic management. International Journal of Applied Research, 24: 45691 – 45696.
6. Polshchikov K., Kubrakova K. and Odaruschenko O., 2013. Methods and Technologies Analysis of The Real-Time Traffic Transmission Requests Servicing. World Applied Programming, 3(9): 446 – 450.
7. Kurose J. F. and Ross K.W., 2004. Computer Networking. A Top-Down Approach Featuring the Internet. Addison-Wesley Longman, 765 p.
8. Rvachova N., Sokol G., Polshchikov K. and Davies J., 2015. Selecting the intersegment interval for TCP in Telecomms networks using fuzzy inference system. Proceedings of the Sixth International Conference "2015 Internet Technologies and Applications (ITA)", pp: 256 – 260.
9. Koucheryavy Y.A., 2004. Traffic control and quality of service in the Internet. St. Petersburg, Science and Technology, 336 p.
10. Польщиков К.А. Об управлении интенсивностью потоков данных в мобильной радиосети специального назначения // Научные ведомости БелГУ. – 2014. – № 21 (192). – Вып. 32(1). – С. 196–201.
11. Jacobson V., 1988. Congestion Avoidance and Control. Computer Communication Review, 4: 314 – 329.
12. Polshchikov K., Zdorenko Y. and Masesov M., 2015. Neuro-Fuzzy System for Prediction of Telecommunication Channel Load. Proceedings of the Second International Scientific-Practical Conference "Problems of Infocommunications Science and Technology (PIC S&T)", pp: 33 – 34.
13. Polshchikov K.O., Zdorenko Y.M. and Masesov M.O., 2014. Method of telecommunications channel throughput distribution based on linear programming and neuro fuzzy predicting. Elixir International Journal. Network Engineering, 75: 27327 – 27334.
14. Польщиков К.А. Система прогнозирования длительности ожидания подтверждений в телекоммуникационной сети // Инфокоммуникационные технологии. – 2015. – № 2. – С. 148 – 152.
15. Константинов И.С., Польщиков К.А., Лазарев С.А. Имитационная модель передачи информационных потоков в мобильной радиосети специального назначения // Научные ведомости БелГУ. – 2015. – № 13 (210). – Вып. 35(1). – С. 156 – 163.

References (transliteration)

1. Basagni S., Conti M., Giordano S. and Stojmenovic I., 2004. Mobile Ad Hoc Networking. IEEE Press, 461 p.
2. Polshchikov K.O., 2013. Synthesis of neuro-fuzzy systems of data flows intensity control in mobile ad-hoc network. Proceedings of the 23rd International Crimean Conference "Microwave and Telecommunication Technology (CriMiCo)", pp: 517 – 518.
3. Polshchikov K.O., 2012. Functional model of data flows intensity control in the mobile radio network of the special setting. Scientific herald of the DSEA, 1, pp: 127 – 135.
4. Polshchikov K., Olexij S. and Rvachova N., 2010. The Methodology of Modeling Available for Data Traffic Bandwidth Telecommunications Network Proceedings of the International Conference "Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (TCSET)", 158 p.
5. Konstantinov I.S., Lazarev S.A., Polshchikov K.O. and Mihalev O.V., 2015. Theoretical aspects of evaluation of the corporative portal network traffic management. International Journal of Applied Research, 24: 45691 – 45696.
6. Polshchikov K., Kubrakova K. and Odaruschenko O., 2013. Methods and Technologies Analysis of The Real-Time Traffic Transmission Requests Servicing. World Applied Programming, 3(9): 446 – 450.
7. Kurose J.F. and Ross K.W., 2004. Computer Networking. A Top-Down Approach Featuring the Internet. Addison-Wesley Longman, 765 p.
8. Rvachova N., Sokol G., Polshchikov K. and Davies J., 2015. Selecting the intersegment interval for TCP in Telecomms networks using fuzzy inference system. Proceedings of the Sixth International Conference "2015 Internet Technologies and Applications (ITA)", pp: 256 – 260.
9. Koucheryavy Y.A., 2004. Traffic control and quality of service in the Internet. St. Petersburg, Science and Technology, 336 p.
10. Polshchikov K.A., 2014. About control of data flows intensity in the mobile radio network for special purpose. Belgorod State University Scientific Bulletin, 21(192): 196 – 201.
11. Jacobson V., 1988. Congestion Avoidance and Control. Computer Communication Review, 4: 314 – 329.
12. Polshchikov K., Zdorenko Y. and Masesov M., 2015. Neuro-Fuzzy System for Prediction of Telecommunication Channel Load. Proceedings of the Second International Scientific-Practical Conference "Problems of Infocommunications Science and Technology (PIC S&T)", pp: 33 – 34.
13. Polshchikov K.O., Zdorenko Y.M. and Masesov M.O., 2014. Method of telecommunications channel throughput distribution based on linear programming and neuro fuzzy predicting. Elixir International Journal. Network Engineering, 75: 27327 – 27334.
14. Polshchikov K.A., 2015. System of prediction of confirmation waiting time in telecommunication network. Infokommunikacionnye tehnologii, 13(2): 148 – 152.
15. Konstantinov I.S., Lazarev S.A. and Polshchikov K.A., 2015. Simulation model of information flows transmission in mobile ad-hoc network for special purpose. Belgorod State University Scientific Bulletin, 13(210): 156 – 163.

Polshchikov K. "Neuro-fuzzy algorithm selection timeout retransmission in ad hoc network". Mobile ad hoc networks (MANET) are a promising direction of development of telecommunication technologies. MANET is characterized by the absence of base stations (fixed points) and the ability of each node act as a router. Mobile ad hoc network of different short duration of the connection, a high probability of distortion of information, significant delays and packet losses. The impact of these factors leads to a decrease in the delivery of operational data in a MANET. As it is known, it is required to increase network performance to increase this parameter. The transport layer protocols, an important role is played by the correct setting timeout retransmission. During the timeout the source node waits for the confirmation of a previously sent packet. Through proper selection of the parameter values, you can improve network performance. Imperfect choice timeout retransmission leads to the fact that with a high probability of data loss due to network congestion or distortion of message delivery is slowed down considerably. The solution to a scientific problem, aimed at improving the efficiency of data delivery in ad hoc network. An algorithm for neuro-fuzzy selection timeout retransmission in the network. The algorithm provides a measure of the current timeout values confirmations, neuro-fuzzy prediction of the magnitude of the values in the next cycle and the calculation of a timeout retransmissions based on that forecast. According to the proposed algorithm, the current value of the timeout retransmission is periodically updated within the established logical connection. Is a block diagram. Simulation experiments have shown that the use of the algorithm provides minimize reduction in the average transmission time of data flows.

Keywords: ad hoc network, retransmission, timeout, algorithm.

Статья поступила в редакцию 25.06.2015
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук Г.В. Авериньм

Способы виртуальной реконструкции памятников архитектуры

Руденко М.П.

Донецкий национальный технический университет
m.p.rudenko@gmail.com

Руденко М.П. «Способы виртуальной реконструкции памятников архитектуры». Процесс создания виртуальной реконструкции архитектурной среды представляет не только научный, но и культурный интерес, так как виртуальная реконструкция утраченных памятников архитектуры – вклад в культурное и историческое наследие общества. В статье рассматриваются и анализируются основные способы геометрического построения частично или полностью утраченных памятников архитектуры для их виртуальной реконструкции. Способы построения объектов разделены на: способы, использующие для построения проективную геометрию, способы, использующие для построения геометрические примитивы и способы, использующие для построения моделирование из «облака точек». Проводится системный анализ каждого способа построения объекта. Выявляются их основные достоинства и недостатки при создании виртуальной реконструкции памятника архитектуры с целью выбора оптимального решения для применения на реальных примерах.

Ключевые слова: памятник архитектуры, моделирование, виртуальная реконструкция, фотограмметрия, визуализация, 3D модель.

Введение

Геометрическое моделирование утраченных памятников архитектуры представляет целый ряд решений объемно-пространственных задач, связанных с виртуальной реконструкцией полностью или частично утраченных архитектурных объектов. Методики, позволяющие проводить архитектурный, археологический, исторический анализы на основе трехмерного моделирования, стали сегодня довольно востребованными. В связи с этим быстрыми темпами набирает рост разработка и совершенствование программного обеспечения, способствующего выполнять различные запросы и другие необходимые работы в области виртуальной реконструкции. Создание трехмерной модели любого вида сложности сейчас не представляет особого труда, так как современные графические редакторы, позволяющие осуществлять трехмерное моделирование, обладают всеми необходимыми инструментами для задания не только любой формы объекту, но и его текстуры и освещения.

В этой области актуальной задачей является работа по совершенствованию моделирования архитектурных памятников, направленная на разработку методов, позволяющих сократить время моделирования, улучшить качество построения, визуализации и детализации, а также основанных на применении интеллектуального анализа данных для виртуальной реконструкции с использованием электронных баз данных

основных конструктивных и декоративных элементов.

Цель статьи – рассмотреть основные способы создания виртуальной реконструкции частично или полностью утраченных памятников архитектуры, позволяющих качественнее и точнее воссоздать облик реконструируемых объектов, а также классифицировать их.

Построение модели с использованием проективной геометрии

Для реконструкции утраченных памятников архитектуры используют всевозможные иконографические материалы, т.е. старые фотографии объекта, чертежи и рисунки, изображения архитектурных объектов, выполненных в стиле соответствующей эпохи, а для частично утраченных объектов – фотографии их натурных съемок.

Принцип построения объекта по фотографии называется фотограмметрией. Стандартный путь построения объекта в фотограмметрии – проецирование основных линий объекта с фотографии на плоскость для нахождения точек схода. По точкам схода выстраивается безмасштабная пропорциональная форма объекта. Определение основных размеров объекта можно определить либо при проведении обмерных работ его оставшейся части, либо, если памятник полностью утрачен – по оставшемуся чертежу. Если от утраченного памятника осталось несколько фотографий, по которым сложно определить размеры, то во

внимание берутся похожие по стилю, построенные в тот же отрезок времени уцелевшие памятники архитектуры.

Построение объекта таким способом в графическом редакторе AutoCAD позволяет корректно воссоздать все его архитектурно-планировочные чертежи, а также задать правильный масштаб.

Следует отметить научные работы в этом направлении – работа Маркова Б.Г., посвященная геометрическому моделированию утраченных памятников архитектуры, используя теорию нечетных множеств [1], и работа Рачкиной Н.Г., автора графической программы CRec по компьютерной реконструкции фотоперспективы памятников архитектуры [2].

Марков Б.Г. предлагает при геометрическом построении объекта заменить идеальные геометрические понятия на нечеткие и вероятностные, при которых точка будет представлять собой эллиптическую область с заданными границами (рис. 1). На основе своей теории он автоматизировал процесс геометрического моделирования утраченных архитектурных памятников в программе AutoCAD с помощью языка программирования AutoLisp [3].

Рачкина Н.Г. предлагает автоматизировать процесс построения архитектурного памятника, используя точки схода. Ею создана компьютерная программа Crec (Computer Reconstruction), которая строит параллелепипед на основе ввода координат точек схода для построения треугольника схода и габаритные точки коробки здания (рис. 2, 3).

Крейдун Ю.А. предлагает свой программный продукт для компьютерного построения утраченного памятника архитектуры по прямым линиям, сходящимся в точках схода на основе одной фотографии [4].

Свой математический аппарат по перспективному проектированию объектов он автоматизировал в программе 3D Recoverer, который строит каркасную модель объекта на основе одной фотографии (рис. 4).

Все эти работы объединяет способ построения утраченного памятника архитектуры на основе фотоизображения. Он сводится к построению перспективы объекта для нахождения точек схода.

Достоинством данного метода является четкое геометрическое перспективное построение архитектурного объекта, на основе которого можно построить фронтальные и боковые фасады, а также определить схему плана здания и основные размеры объекта.

Недостатком данного метода является дополнительная затрата времени, по сравнению с другими методами, на последовательное построение объекта.

Построение модели с использованием геометрических примитивов

Построение модели с использованием геометрических примитивов предлагает трехмерную реализацию. Научная работа Пола Дебевека, специалиста в области компьютерной графики, – яркий пример использования примитивов для построения архитектурных объектов [5]. Результатом его работы является графический редактор «Facade», в котором на фоне фотографии маркируются основные грани архитектурного объекта для того, чтобы определить его геометрию. Далее, редактор подбирает оптимальные геометрические формы для построения объекта. Заключительным этапом становится наложение материалов и текстур на объект для дальнейшей визуализации.

Данный метод является наглядным примером быстрой визуализации. Он также может использоваться для построения всего одну фотографию или даже рисунок (рис. 5).

К сожалению, в нынешнее время метод не используется на практике, хотя его доработка могла бы улучшить качество реконструкции утраченных памятников архитектуры. Графический редактор «Facade» был выкуплен компанией Adobe и на его основе был разработан редактор «Canoma», который позже не усовершенствовался [6].

Построение модели с использованием моделирования из «облака точек»

Моделирование из «облака точек» сейчас является наиболее популярным способом построения геометрической модели утраченного памятника архитектуры. Модель такого типа получают либо путем лазерного сканирования объекта [7], либо обработкой фотографий архитектурного объекта в фотограмметрических графических редакторах, использующихся в среде архитекторов и археологов [8].

Модель, полученная в результате лазерного сканирования, состоит из тысячи полигонов и соответственно имеет большой вес, поэтому не все графические редакторы способны открыть и редактировать ее. Это либо такие гиганты, как компания Autodesk, либо компании, создающие ПО для обработки отсканированной трехмерной модели (рис. 6) [9]. Явным преимуществом такого способа построения утраченных архитектурных памятников является уже воссозданная виртуальная модель, требующая незначительной доработки. Однако, с виду законченная модель не так проста в редактировании, так как содержит огромное

количество полигонов, редактирование которых превращается в долгий процесс.

Использование оборудования для лазерного сканирования является дорогостоящим, требует определенного навыка работы с ним и не всегда удобно для далеких поездок. Поэтому, специалисты в области архитектуры и археологии, занимающиеся оцифровкой и 3D реконструкцией утраченных памятников архитектуры, используют более дешевые и легкие методы получения полигональной модели объекта [10, 11], (рис. 7, 8). А именно: применение обычной цифровой камеры вместо лазерного сканера, что значительно облегчает вес оборудования в полевых работах, а также использование доступных графических редакторов для обработки сделанных фотографий и превращения их в трехмерную модель из «облака точек».

Способ создания модели из «облака точек» предполагает наличие нескольких фотографий объекта, желательно с натурной съемки и сделанных по всему периметру объекта, и поэтому не особо подходит для случаев, когда от архитектурного памятника осталось лишь одно фотоизображение или чертеж.

Выводы

Рассмотрены и проанализированы основные способы геометрического построения моделей объектов для создания виртуальной реконструкции частично или полностью

утраченных памятников архитектуры. Проведена их классификация по пути построения на: способы, использующие для построения проективную геометрию; способы, использующие для построения геометрические примитивы и способы, использующие для построения полигональное моделирование. Выявлены их основные достоинства и недостатки при построении трехмерной модели для создания виртуальной реконструкции архитектурного памятника. Оптимальным решением для создания виртуальной реконструкции полностью утраченного архитектурного памятника по оставшимся фотографиям и рисункам является его воссоздание с использованием геометрических примитивов, так как этот процесс сокращает время на построение геометрической модели объекта. Реконструкцию частично утраченного архитектурного памятника, модель которого можно воссоздать по оцифрованным фотографиям с натурных съемок, оптимальным будет сделать с применением фотограмметрических графических редакторов, работающих с «облаком точек».

В дальнейшей в работе предлагается использовать полученные выводы на практике при создании виртуальной реконструкции реального частично утраченного архитектурного памятника.

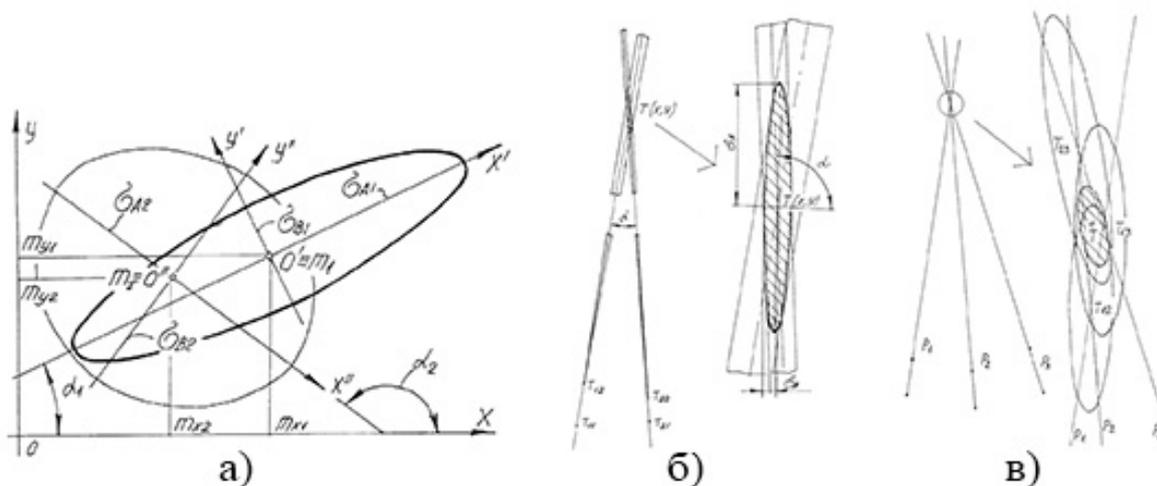


Рисунок 1. – Изображения:

- а) определения меры принадлежности пары двумерных нечетких точек: m – математическое ожидание; σ – среднее квадратичное отклонение;
- б) области возможных пересечений двух прямых. T – точка пересечения пары прямых (точка-область); $T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}$ – точки (эллиптические области), через которые проходят нечеткие прямые; σ – среднее квадратичное отклонение;
- в) определение точки схода вертикальных прямых. P_1, P_2, P_3 – нечеткие прямые; T_{12} – область возможных пересечений прямых P_1, P_2 ; T_{13} – область возможных пересечений прямых P_1, P_3 ; T_{23} – область возможных пересечений прямых P_2, P_3 ; T – область пересечений прямых P_1, P_2, P_3 , [3]

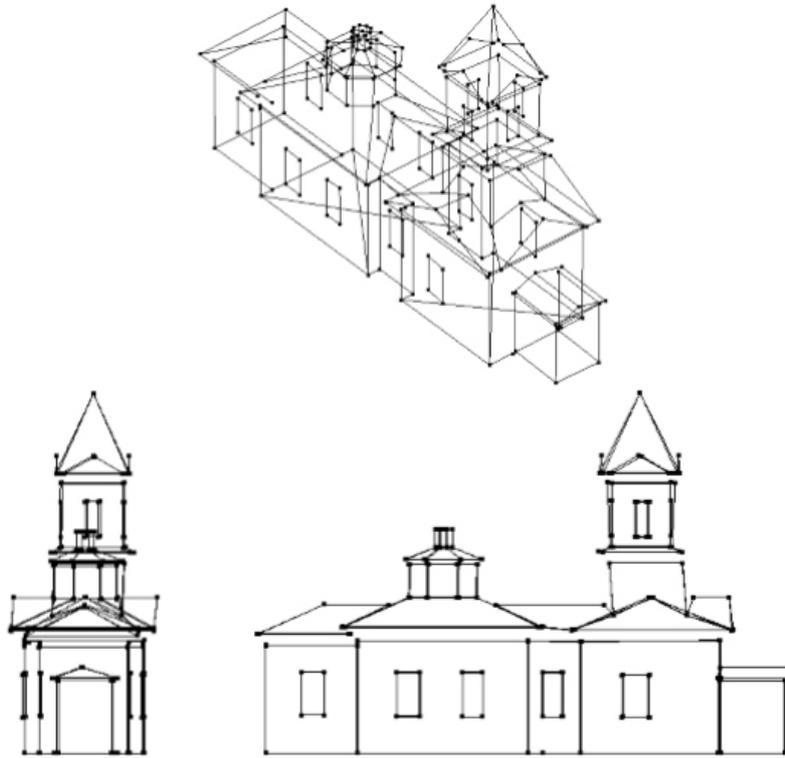


Рисунок 4. – Изображение трехмерной проволочной модели основных архитектурных форм Никольского храма: аксонометрическая проекция (вверху); вид с запада (слева), вид с севера (справа) [4]

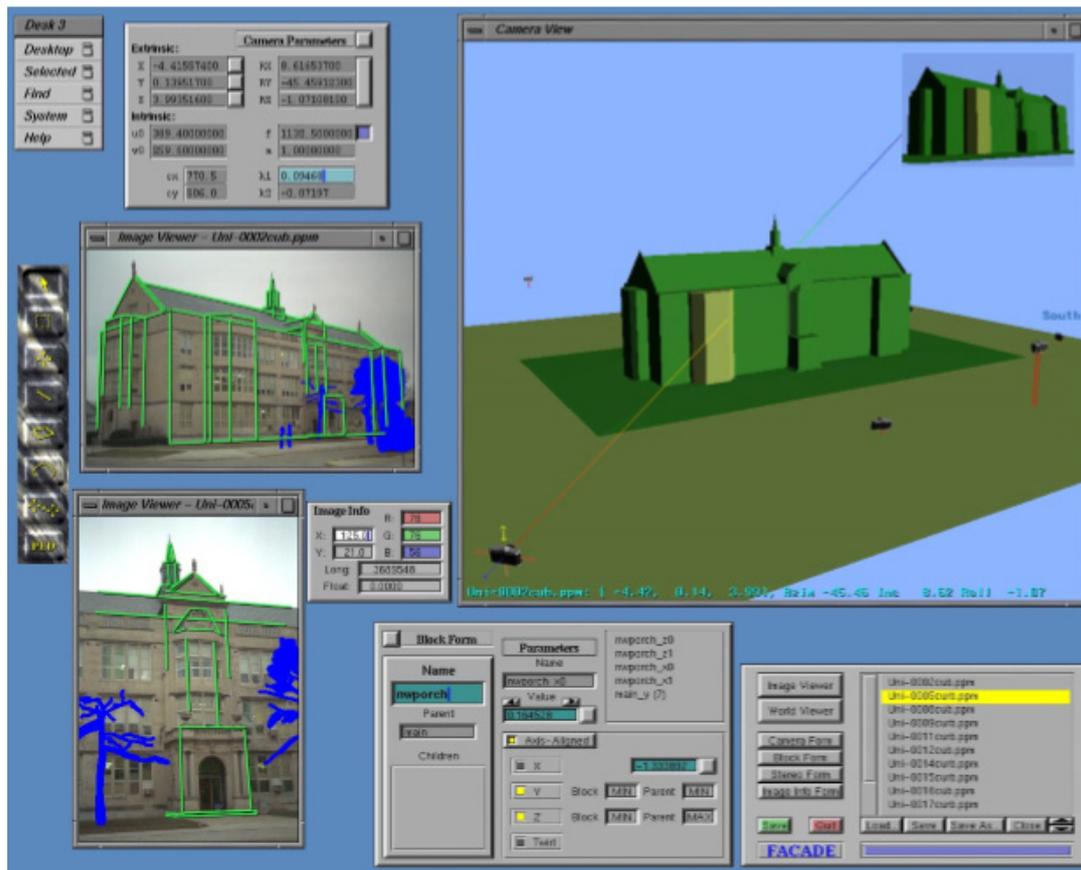


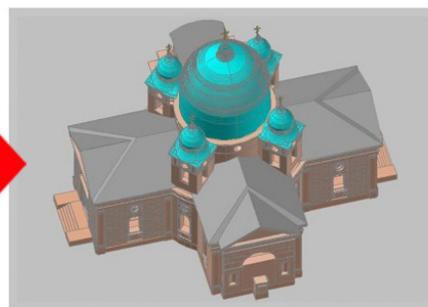
Рисунок 5. – Изображение процесса маркировки и построения геометрии здания по фотографии [5]



сканирование объекта с помощью лазерного сканера

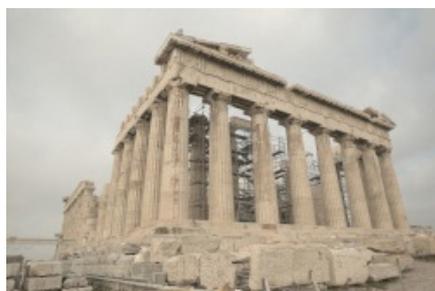


обработка “облака точек”



редактирование модели

Рисунок 6. – Изображение процесса лазерного сканирования здания и обработки модели в графическом редакторе [9]



1

фотографирование
объекта
при естественном
разном освещении

2

обработка модели
созданной из
“облака точек”
по фотографиям



3

готовая
трехмерная
модель



Рисунок 7. – Изображение процесса построения и визуализации Парфенона с применением метода, обрабатывающего фотографии, сделанные при разном естественном освещении [9]

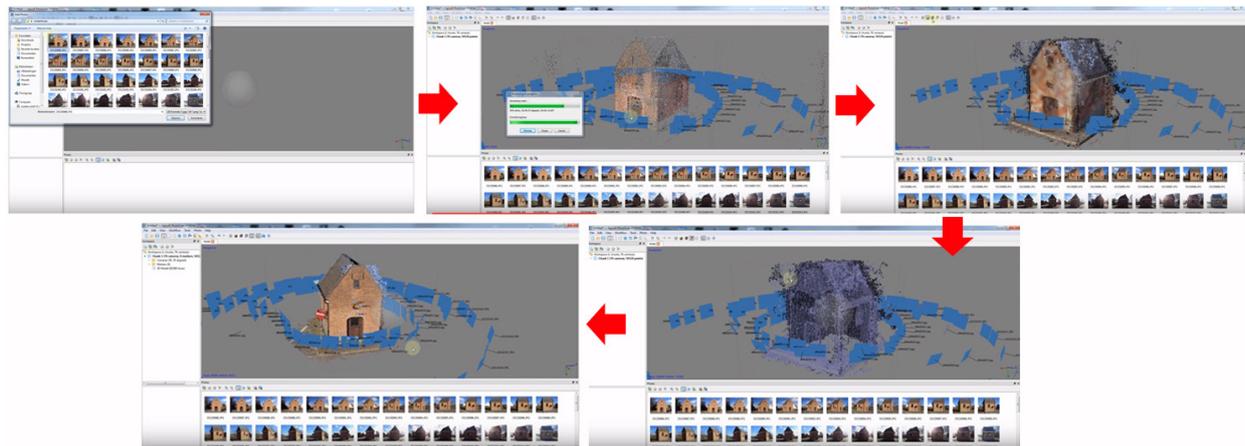


Рисунок 8. – Изображение процесса визуализации архитектурного объекта в графическом редакторе Agisoft, использующем для построения фотограмметрию [8]

Список литературы

1. Марков Б.Г. Автоматизация геометрического моделирования утраченных памятников архитектуры по иконографическим материалам: дисс. канд. техн. наук: 05.13.16 / Петрозаводский государственный университет. – Петрозаводск, 2000. – 146 с.
2. Рачкина Н.Г. Геометрическое обеспечение компьютерной реконструкции архитектурной фотоперспективы: дисс. канд. техн. наук: 05.01.01 / Московский государственный авиационный институт (технический университет). – М., 2000. – 159 с.
3. Марков Б.Г., Марков О.Б., Борисов А.Ю. Особенности геометрического моделирования утраченных памятников архитектуры / Ученые записки Петрозаводского государственного университета. – 2013. – №8. – С. 88 – 92.
4. Крейдун Ю.А., Жилин С.И., Васильев А.А. Построение пространственных моделей утраченных архитектурных памятников по одиночным изображениям / Ползуновский вестник. – 2004. – №3. – С. 83 – 88.
5. Debevec P.E. Modeling and Rendering Architecture from Photographs. Doctoral dissertation. University of California at Berkeley. 1996.
6. About Canoma // CANOMA. Quickly create realistic 3D models from photographs: canoma.com URL: <http://www.canoma.com/> (20.06.15).
7. 3D сканирование объектов и трехмерное моделирование // Клона: klona.ua URL: <http://klona.ua/3d-skanirovanie.html> (25.06.15).
8. Agisoft: agisoft.com URL: <http://www.agisoft.com/> (28.06.15).
9. ScanIMAGER – миллиарды точек в одном окне // ScanIMAGER Professional: scanimager.ru URL: <http://www.scanimager.ru/> (19.06.15).
10. Estimating Surface Reflectance Properties of a Complex Scene under Captured Natural Illumination // USC Institute for Creative Technologies: gl.ict.usc.edu URL: <http://gl.ict.usc.edu/Research/reflectance/> (15.06.15).
11. Thi Porter S., Roussel M., Soressi M. A Simple Photogrammetry Rig for the Reliable Creation of 3D Artifact Models in the Field. Advances in Archaeological Practice, 2016, 4(1), 71 – 86 doi:10.7183/2326-3768.4.1.71

References (transliteration)

1. Markov B.G. Avtomatizacija geometricheskogo modelirovanija utrachennyh pamjatnikov arhitektury po ikonograficheskim materialam [Automation of the lost architectural monuments geometric modeling with iconographic materials]: diss. kand. tehn. nauk: 05.13.16 / Petrozavodskij gosudarstvennyj universitet. – Petrozavodsk, 2000. – 146 p.
2. Rachkina N.G. Geometricheskoe obespechenie komp'juternoj rekonstrukcii arhitekturnoj fotoperspektivy [Geometric support of the architectural photoperfect computer reconstruction]: diss. kand. tehn. nauk: 05.01.01 / Moskovskij gosudarstvennyj aviacionnyj institut (tehničeskij universitet). – M., 2000. – 159 p.
3. Markov B.G., Markov O.B., Borisov A.Ju. Osobennosti geometricheskogo modelirovanija utrachennyh pamjatnikov arhitektury [Features of the lost architectural monuments geometric modeling] / Uchenye zapiski Petrozavodskogo gosudarstvennogo universiteta. – 2013. – no.8. – pp. 88 – 92.
4. Krejdun Ju.A., Zhilin S.I., Vasil'ev A.A. Postroenie prostranstvennyh modelej utrachennyh arhitekturnyh pamjatnikov po odinochnym izobrazhenijam [The spatial models of the lost architectural monuments

- building with single images] / Polzunovskij vestnik. – 2004. – no.3. – pp. 83 – 88.
5. Debevec P.E. Modeling and Rendering Architecture from Photographs. Doctoral dissertation. University of California at Berkeley.1996.
 6. About Canoma // CANOMA. Quickly create realistic 3D models from photographs: canoma.com URL: <http://www.canoma.com/> (20.06.15).
 7. 3D skaniruvanie ob"ektov i trehmernoje modelirovanie [3D scanning and modeling] // Klona: klona.ua URL: <http://klona.ua/3d-skaniruvanie.html> (25.06.15).
 8. Agisoft: agisoft.com URL: <http://www.agisoft.com/> (28.06.15).
 9. ScanIMAGER – milliardi tocek v odnom okne [ScanIMAGER – a milliard of points in a single window] // ScanIMAGER Professional: scanimager.ru URL: <http://www.scanimager.ru/> (19.06.15).
 10. Estimating Surface Reflectance Properties of a Complex Scene under Captured Natural Illumination // USC Institute for Creative Technologies: gl.ict.usc.edu URL: <http://gl.ict.usc.edu/Research/reflectance/> (15.06.15).
 11. Thi Porter S., Roussel M., Soressi M. A Simple Photogrammetry Rig for the Reliable Creation of 3D Artifact Models in the Field. Advances in Archaeological Practice, 2016, no.4(1), 71 – 86 doi:10.7183/2326-3768.4.1.71

Руденко М.П. «Способи віртуальної реконструкції пам'ятників архітектури». Процес створення віртуальної реконструкції архітектурного середовища уявляє собою не тільки науковий, а й культурний інтерес, бо віртуальна реконструкція втрачених пам'ятників архітектури – це внесок у культурну та історичну спадщину суспільства. У статті розглядаються та аналізуються основні способи геометричної побудови частково або повністю втрачених пам'ятників архітектури для їхньої віртуальної реконструкції. Виділено наступні способи побудови об'єкта: способи, що використовують для побудови проєктивну геометрію, способи, що використовують для побудови геометричні примітиви і способи, що використовують для побудови моделювання з «хмари точок». Проводиться системний аналіз кожного способу побудови об'єкта. Виявляються їхні основні переваги та недоліки при створенні віртуальної реконструкції пам'ятника архітектури з метою вибору оптимального рішення для застосування на реальних прикладах.

Ключові слова: пам'ятник архітектури, моделювання, віртуальна реконструкція, фотogrammetрія, візуалізація, 3D модель.

Rudenko M.P. “Techniques of the architectural monuments virtual reconstruction”. The lost architectural monuments 3D reconstruction is a new brunch in a history of architecture, art, archaeology and history in general learning. Using of 3D for the lost architectural environment restoration is a big contribution to the social cultural heritage. Original look of architectural building, complex or the whole city is not always recovered because of many reasons, but the only equipment truly required for the 3D model representation is a digital hardware. Requirements to exact detail of architectural monument visualization are increased, so requirements to the ways of geometric modeling increased too. The process of creating the architectural environment virtual reconstruction is not only scientific interest, but also cultural, as virtual reconstructions of destroyed monuments – contributions to the cultural and historical heritage of the society. The article considers and analyzes the main methods of geometrical construction partly or completely lost monuments of architecture to create their virtual reconstruction. Selected methods of constructing the object: the methods that use for construction the projective geometry methods, using for construction geometric primitives and methods using building simulation from the “point cloud”. A systemic analysis of each way of constructing is done. Their main advantages and disadvantages are identified in creating the monument of architecture virtual reconstruction to select the optimal solution for the application on real samples. Existing ways of the lost architectural monuments geometric modeling and virtual reconstruction do their work depending on the aim of solution, their combine would be the best solution in virtual reconstruction building.

Keywords: architectural monument, modeling, virtual reconstruction, photogrammetry, visualization, 3D model.

Стаття поступила в редакцію 30.06.2015
Рекомендована к публикации канд. техн. наук В.В. Карабчевским

Раздел 4

Актуальные вопросы современной математики

Об одном обобщении бинарной аддитивной задачи с квадратичными формами

Куртова Л.Н.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет
(НИУ «БелГУ»)
kurtova@bsu.edu.ru

Куртова Л.Н. «Об одном обобщении бинарной аддитивной задачи с квадратичными формами». В теории чисел важную роль играют аддитивные задачи. Одной из них является проблема делителей Ингама. Рассматривается бинарная аддитивная задача с квадратичными формами, которая является аналогом классической проблемы делителей. Получена асимптотическая формула для числа решений уравнения, содержащего линейную комбинацию бинарных положительно определенных примитивных квадратичных форм. Причем такие решения ищутся с некоторыми «весами», отвечающими за ограниченность числа решений. Данная задача является обобщением изученной ранее проблемы, где уравнение содержало сумму квадратичных форм. Доказательство основано на круговом методе, когда сумма, являющаяся числом решений изучаемого уравнения, представляется в виде интеграла; на разбиении отрезка интегрирования числами ряда Фарей, при этом выбранные «веса» позволяют использовать функциональное уравнение для двумерного тета-ряда. Используя точные формулы для двойных сумм Гаусса, с применением оценки А. Вейля для суммы Kloostermana проводится оценка одной суммы, содержащей суммы Гаусса.

Ключевые слова: аддитивные задачи, число решений, асимптотическая формула, сумма Kloostermana, квадратичная форма.

Введение

В 1927 году А.Е. Ингам [1] поставил и решил элементарными методами задачу получения асимптотической формулы для числа решений $J(n)$ уравнения:

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 1, \quad x_1 x_2 \leq n,$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 – натуральные числа.

Эта задача получила название бинарной аддитивной проблемы делителей.

Уточнением остаточного члена в асимптотической формуле для $J(n)$ занимались многие математики. Стоит отметить работы Т. Эстермана [2], Д.И. Исмоилова [3], Г.И. Архипова и В.Н. Чубарикова [4].

Рассмотрим бинарную аддитивную задачу с квадратичными формами, которая является аналогом классической проблемы делителей Ингама.

Будем использовать следующие обозначения. Пусть d – отрицательное бесквадратное число, $F = Q(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле, δ_F – дискриминант поля

F ; $Q_i(\bar{m}) = \frac{1}{2} \bar{m}^{-t} A_i \bar{m}$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами A_i , $\det A_i = -\delta_F$, $i = 1, 2$.

Для суммы

$$I(n) = \sum_{Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = 1} \exp\left(-\left(Q_1(\bar{m}) + Q_2(\bar{k})\right)/n\right),$$

представляющей число решений уравнения $Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = 1$ с «весом»

$\exp\left(-\left(Q_1(\bar{m}) + Q_2(\bar{k})\right)/n\right)$, в [5] была получена

асимптотическая формула с остатком $O(n^{3/4+\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное малое число. В [6] изучается число решений уравнения $Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = h$, $h \ll n^\varepsilon$.

В данной работе будет рассмотрено одно обобщение изучаемой проблемы.

Пусть

$$I(n, a, b, h) = \sum_{aQ_1(\bar{m}) - bQ_2(\bar{k}) = h} \exp\left(-\frac{Q_1(\bar{m}) + Q_2(\bar{k})}{n}\right).$$

Ставится вопрос о получении асимптотической формулы для $I(n, a, b, h)$.

Круговым методом с использованием оценки А. Вейля для суммы Kloostermana доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное малое число, δ_F – дискриминант поля F ; a, b, h – натуральные числа, $a \ll n^\varepsilon$, $b \ll n^\varepsilon$, $h \ll n^\varepsilon$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула:

$$I(n, a, b, h) = \frac{4\pi^2 n}{|\delta_F| (a+b)} e^{-\frac{h}{an}} \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-4} \times$$

$$\times \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l / q} G_1(q, a \cdot l, \bar{0}) G_2(q, -b \cdot l, \bar{0}) + O(n^{3/4+\varepsilon}),$$

где $G_i(q, l, \bar{0}) = \sum_{\bar{m} \pmod{q}} \exp(2\pi i l Q_i(\bar{m}) / q)$, $i=1, 2$ – двойные суммы Гаусса, константа в знаке O зависит от a, b, h . Сумма особого ряда асимптотической формулы положительна.

Вспомогательные утверждения

Лемма 1. (Функциональное уравнение для двумерного тета-ряда). Пусть $\text{Im } \tau > 0$, $\bar{x} \in R^2$, $\theta(\tau, \bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in Z^2} \exp(2\pi i Q(\bar{n} + \bar{x}))$. Тогда

$$\theta(\tau, \bar{x}) = \frac{i}{\tau \sqrt{|\delta_F|}} \sum_{\bar{n} \in Z^2} \exp\left(-\frac{\pi i}{\tau} \bar{n} A^{-1} \bar{n} + 2\pi i \bar{n} \bar{x}\right).$$

Доказательство см. в [7, глава VI].

Лемма 2. Пусть $N = [\sqrt{n}]$,

$q, q', q'' \leq N$. Тогда справедливо равенство

$$\int_{-[q(q+q')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi i h x}}{(n^{-1} - 2\pi i a x)(n^{-1} + 2\pi i b x)} dx =$$

$$= \frac{n}{(a+b)} e^{-\frac{h}{an}} + O\left(\frac{qN}{ab}\right).$$

Доказательство. Равенство после некоторых преобразований подынтегральной функции следует из формулы $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}$ [8, глава V] и оценки

$$\int_{[q(q+q')]^{-1}}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i h x}}{(n^{-1} - 2\pi i a x)(n^{-1} + 2\pi i b x)} dx = O\left(\frac{qN}{ab}\right).$$

Лемма 3. (Равенства для произведений двойных сумм Гаусса). d – отрицательное бесквадратное число, $F = Q(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле, δ_F – дискриминант поля F , $D = -\delta_F$. Пусть $Q_1(\bar{m}), Q_2(\bar{k})$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы; $(l, q) = 1$. Справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $(q, D) = 1, (q, a) = 1, (q, b) = 1, l \cdot l^* \equiv 1 \pmod{q}, D \cdot D^* \equiv 1 \pmod{q}, a \cdot a^* \equiv 1 \pmod{q}, b \cdot b^* \equiv 1 \pmod{q}$. Тогда

$$G_1(q, a \cdot l, \bar{m}) G_2(q, -b \cdot l, \bar{k}) =$$

$$= q^2 \exp\left(-2\pi i l^* D^* \left(a^* Q_1'(\bar{m}) - b^* Q_2'(\bar{k})\right) / q\right),$$

где $Q_1'(\bar{m}) = \bar{m}^t D A_1^{-1} \bar{m} / 2, Q_2'(\bar{k}) = \bar{k}^t D A_2^{-1} \bar{k} / 2$.

2. При любых q, D, a, b справедливо неравенство:

$$\left| G_1(q, a \cdot l, \bar{m}) G_2(q, -b \cdot l, \bar{k}) \right| \leq c D(q, a)(q, b) q^2,$$

где c – постоянная.

Доказательство. Первое утверждение леммы не отличается от случая $a = b = 1$ и приводится в [6].

Докажем второе утверждение. Если $(q, D) = 1, (q, a) = 1, (q, b) = 1$, то неравенство следует из первого утверждения леммы.

Пусть $(q, D) = 1, (q, a) > 1, (q, b) > 1$. Заметим, что

$$G_1(q, a \cdot l, \bar{m}) = (q, a)^2 G_1\left(\frac{q}{(q, a)}, \frac{al}{(q, a)}, \frac{\bar{m}}{(q, a)}\right),$$

если \bar{m} делится на (q, a) , и 0 в противном случае. Аналогичное равенство справедливо и для $G_2(q, -b \cdot l, \bar{k})$. Тогда с учетом первого утверждения леммы, можем считать, что

$$\left| G_1(q, a \cdot l, \bar{m}) G_2(q, -b \cdot l, \bar{k}) \right| \leq (q, a)(q, b) q^2.$$

В случае, когда $(q, D) > 1$ требуемая оценка следует из точных формул для сумм Гаусса от степени простого числа, в случае, когда данное простое число является делителем дискриминанта поля $D = -\delta_F$ [9]. В данном случае, помимо множителя $(q, a)(q, b)$ в правой части неравенства появится множитель $\sqrt{(D, q / (q, a))(D, q / (q, b))} \leq D$.

Лемма 4. (Оценка суммы Клоостермана).

Пусть $K(q, u, v) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{2\pi i (u \cdot l + v \cdot l^*) / q}$ – сумма

Клоостермана. Справедлива оценка

$$K(q, u, v) \ll \tau(q) q^{1/2} (u, v, q)^{1/2}.$$

Доказательство см., например, в [10].

Лемма 5. Пусть $q = q_1 q_2, (q_1, q_2), (q_1, D) = 1, (q_1, a) = 1, (q_1, b) = 1; q_2$ – либо 1, либо натуральное число, все простые делители которого делят хотя бы одно из чисел D, a, b . Пусть

$$V(q, \bar{m}, \bar{k}) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l / q} G_1(q, a \cdot l, \bar{m}) G_2(q, -b \cdot l, \bar{k}).$$

Справедливы следующие оценки:

$$V(q_1 q_2, \bar{0}, \bar{0}) \ll D(q, a)(q, b) q_1^2 \sum_{s \setminus (q_1, h)} s \mu\left(\frac{q_1}{s}\right) q_2^3,$$

$$V(q_1 q_2, \bar{m}, \bar{k}) \ll D(q, a)(q, b) q_1^{5/2+\varepsilon} (h, q_1)^{1/2} q_2^3.$$

Доказательство. Функция $V(q, \bar{m}, \bar{k})$ является вполне мультипликативной, поэтому ее можно представить в виде произведения двух функций $V(q_1 q_2, \bar{m}, \bar{k}) = V_1(q_1, \bar{m}, \bar{k}) V_2(q_2, \bar{m}, \bar{k})$, одна из которых зависит от q_1 , а вторая от q_2 , и оценить каждую из них.

Для оценки функции $V_1(q_1, \bar{m}, \bar{k})$ используем точную формулу для произведений сумм Гаусса из леммы 3 и оценку А. Вейля для суммы Kloostermana из леммы 4. Тогда

$$V_1(q_1, \bar{m}, \bar{k}) \ll q_1^2 \left| K \left(q_1, h, D^* \left(a^* Q_1'(\bar{m}) - b^* Q_2'(\bar{k}) \right) \right) \right| \ll \ll q_1^{5/2+\varepsilon} (h, q_1)^{1/2}.$$

В случае, когда $\bar{m} = \bar{0}$, $\bar{k} = \bar{0}$, можем улучшить данную оценку. Имеем:

$$V_1(q_1, \bar{0}, \bar{0}) \ll q_1^2 \left| \sum_{\substack{l_1=1 \\ (l_1, q_1)=1}}^{q_1} e^{-2\pi i h l_1 / q_1} \right| \ll q_1^2 \sum_{s \in (q_1, h)} s \mu \left(\frac{q_1}{s} \right).$$

Функцию $V_2(q_2, \bar{m}, \bar{k})$ оценим тривиально. С учетом неравенства, доказанного в лемме 3, получаем

$$V_2(q_2, \bar{m}, \bar{k}) \ll D(q_2, a)(q_2, b) q_2^2 \left| \sum_{\substack{l_2=1 \\ (l_2, q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i h l_2 / q_2} \right| \ll \ll D(q, a)(q, b) q_2^3.$$

Доказательство завершено.

Схема доказательства теоремы

1. Запишем $I(n, a, b, h)$ в виде интеграла

$$I(n, a, b, h) = \int_0^1 S_1(a, \alpha) S_2(b, \alpha) e^{-2\pi i \alpha h} d\alpha,$$

где $S_1(a, \alpha) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \exp \left((-n^{-1} + 2\pi i a \alpha) Q_1(\bar{m}) \right)$,

$S_2(b, \alpha) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \exp \left((-n^{-1} - 2\pi i b \alpha) Q_2(\bar{k}) \right)$. Пусть

$N = [\sqrt{n}]$. $\xi_{0,1} = [-1/N; 1/N)$. Разобьем промежутки $[1/N; 1-1/N)$ числами ряда Фарея, отвечающего параметру N . Пусть $l''/q'' < l'/q' < l'/q'$ – соседние дроби Фарея, $1 \leq l, q \leq N$, $q' \leq N$, $q'' \leq N$. Определим промежутки $\xi_{l,q} = \left[\frac{l}{q} - \frac{1}{q(q+q'')}, \frac{l}{q} + \frac{1}{q(q+q')} \right)$.

Тогда

$$I(n, a, b, h) = \sum_{q \leq N} \sum_{l=1}^q e^{2\pi i h l / q} \times \int_{-1/[q(q+q'')]^{-1}}^{1/[q(q+q')]^{-1}} S_1(a, l/q+x) S_2(b, l/q+x) e^{-2\pi i h x} dx.$$

2. Каждую из сумм $S_1(a, l/q+x)$ и $S_2(b, l/q+x)$ можем представить как сумму двумерных тета-рядов. Например,

$$S_1(a, l/q+x) = \sum_{s \pmod{q}} \exp \left(2\pi i a l Q_1(\bar{s}) / q \right) \times \theta \left(\left(ax + \frac{i}{2\pi n} \right) q^2, \frac{\bar{s}}{q} \right).$$

Используем функциональное уравнение из леммы 1. Затем выделим слагаемое, которое отвечает вектору $\bar{m} = \bar{0}$. Тогда

$$S_1(a, l/q+x) = \varphi_1 + \Phi_1,$$

где $\varphi_1 = \frac{2\pi}{q^2 \sqrt{D} (n^{-1} - 2\pi i a x)} G_1(q, a \cdot l, \bar{0})$,

$$\Phi_1 = \frac{2\pi}{q^2 \sqrt{D} (n^{-1} - 2\pi i a x)} \times \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^2 \\ m \neq \bar{0}}} \exp \left(-\frac{4\pi^2 Q_1'(\bar{m})}{D q^2 (n^{-1} - 2\pi i a x)} \right) G_1(q, a \cdot l, \bar{m}).$$

Аналогично получаем равенство для $S_2(b, l/q+x)$: $S_2(b, l/q+x) = \varphi_2 + \Phi_2$, где

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{q^2 \sqrt{D} (n^{-1} + 2\pi i b x)} G_2(q, -b \cdot l, \bar{0}),$$

$$\Phi_2 = \frac{2\pi}{q^2 \sqrt{D} (n^{-1} + 2\pi i b x)} \times \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2 \\ \bar{k} \neq \bar{0}}} \exp \left(-\frac{4\pi^2 Q_2'(\bar{k})}{D q^2 (n^{-1} + 2\pi i b x)} \right) G_2(q, -b \cdot l, \bar{k}).$$

3. Подставляем полученные для сумм равенства под знак интеграла. Тогда $I(n, a, b, h) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где интеграл I_1 отвечает за главный член асимптотической формулы, а остальные слагаемые являются остаточными членами.

Вычислим

$$I_1 = \sum_{q \leq N} \sum_{l=1}^q e^{2\pi i h l / q} G_1(q, a \cdot l, \bar{0}) G_2(q, -b \cdot l, \bar{0}) \times \int_{-1/[q(q+q'')]^{-1}}^{1/[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi i h x}}{(n^{-1} - 2\pi i a x)(n^{-1} + 2\pi i b x)} dx.$$

С учетом равенства из леммы 2 получаем

$$I_1 = \frac{4\pi^2 n}{|\delta_F| (a+b)} e^{-\frac{h}{an}} \sum_{q=1}^N q^{-4} \sum_{l=1}^q e^{-2\pi i h l / q} \times G_1(q, a \cdot l, \bar{0}) G_2(q, -b \cdot l, \bar{0}) + O(I_{1,1}),$$

где $I_{1,1} = \frac{N}{abD} \sum_{q \leq N} q^{-3} V(q, \bar{0}, \bar{0})$. Используя

оценку, полученную в лемме 5, можем считать, что $I_{1,1} \ll n^{1/2+\varepsilon}$. При оценивании учитываем, что a, b, h и дискриминант мнимого квадратичного поля δ_F – фиксированные числа.

Кроме того, остаток

$R = \frac{4\pi^2 n}{|\delta_F| (a+b)} e^{-\frac{h}{an}} \sum_{q > N} q^{-4} V(q, \bar{0}, \bar{0})$ так же оценивается, как $O(n^{1/2+\varepsilon})$. Тогда

$$I_1 = \frac{4\pi^2 n}{|\delta_F|(a+b)} e^{-\frac{h}{an}} \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l/q} \times \\ \times G_1(q, a \cdot l, \bar{0}) G_2(q, -b \cdot l, \bar{0}) + O(n^{1/2+\varepsilon}).$$

4. Осталось провести оценку остаточных членов. Рассуждения для каждого из интегралов I_2, I_3, I_4 не сильно отличаются друг от друга. Рассмотрим интеграл I_4

$$I_4 = \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{2\pi i h l/q} \times \int_{-[q(q+q')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \Phi_1 \Phi_2 e^{-2\pi i h x} dx$$

и поменяем в нем порядок суммирования и интегрирования. Переходя к неравенствам, будем использовать лемму 5 для оценки функции $V(q, \bar{m}, \bar{k})$.

При $q \leq n^{1/2-\theta}$ и $|x| \leq [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$, где θ – сколь угодно малое положительное число, действительные части показателей экспоненциальной функции в Φ_1 и Φ_2 не превосходят $-cn^{2\theta}$, а суммы по $\bar{m} \neq \bar{0}$ и $\bar{k} \neq \bar{0}$ оцениваются как $O(\exp(-cn^{2\theta}))$. Интеграл $\int_{-[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2} + 4\pi^2 abx^2} \ll q^{-1} n^{3/2-\theta}$. Тогда одна из сумм, входящих в остаток I_4 имеет оценку:

$$\sum \ll n^{3/2-\theta+\varepsilon} e^{-cn^{2\theta}} \sum_{q_1 q_2 \leq n^{1/2-\theta}} q_1^{-5/2+\varepsilon} q_2^{-2} \ll n^{3/4+\varepsilon}.$$

При $n^{1/2-\theta} < q \leq N$ и $|x| \leq [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$; $q \leq N$ и $-[q(q+q')]^{-1} \leq x \leq -[qn^{1/2+\theta}]^{-1}$, $[qn^{1/2+\theta}]^{-1} \leq x \leq [q(q+q')]^{-1}$ действительные части показателей экспоненциальной функции в Φ_1 и Φ_2 не превосходят $-cQ_1'(\bar{m})$ и $-cQ_2'(\bar{k})$, а суммы по $\bar{m} \neq \bar{0}$ и $\bar{k} \neq \bar{0}$ оцениваются как $O(1)$. Интеграл при $|x| \leq [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$ есть функция $O(n)$, при других значениях x : $O(qn^{1/2+\varepsilon})$. Тогда окончательно получаем оценку $I_4 = O(n^{3/4+\varepsilon})$.

5. Главный член асимптотической формулы представляет собой сумму особой функции, которая является вполне мультипликативной и может быть разложена в произведение по простым числам. Можно показать, что каждый из множителей, входящих в данное произведение будет положителен и зависит от параметров a, b, h, δ_F .

Заключение

Круговым методом с использованием оценки А. Вейля для суммы Клоостермана получена асимптотическая формула с

остаточным членом порядка $n^{3/4+\varepsilon}$ для суммы

$$\sum_{aQ_1(\bar{m})-bQ_2(\bar{k})=h} \exp\left(-\frac{Q_1(\bar{m})+Q_2(\bar{k})}{n}\right),$$

где a, b, h, n – натуральные, причем a, b, h и дискриминант мнимого квадратичного поля δ_F – фиксированные числа.

Список литературы

1. Ingham A.E. Some asymptotic formulae in the theory of numbers // J. London Math. Soc, 1927, V. 2(7). – pp. 202 – 208.
2. Estermann T. Uber die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten // J. Reine Angew. Math, 1931 V. 164. – pp. 173 – 182.
3. Исмоилов Д.И. Об асимптотике представления чисел как разности двух произведений // Докл. АН Тадж. ССР, 1979, Т. 22, №2. – С. 75 – 79.
4. Архипов Г.И., Чубариков В.Н. Об аддитивной проблеме делителей // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика, 2006, №5. – С. 32 – 35.
5. Куртова Л.Н. Об одной бинарной аддитивной задаче с квадратичными формами // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. Математика, 2007, №7 (57). – С. 107 – 121.
6. Куртова Л.Н. Об одном аналоге аддитивной проблемы делителей с квадратичными формами // Чебышевский сборник, 2014, т. 15, Вып. 2. – С. 33 – 49.
7. Ogg A.P. Modular Forms and Dirichlet Series. – N.-Y.: W.A. Benjamin Inc., 1969. – 211 p.
8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного: Учебное пособие для студентов механических специальностей механикоматематических факультетов государственных университетов. – М.: Физматлит, 1958. – 678 с.
9. Гриценко С.А. О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле // Чебышевский сборник, 2003, Т. 4, Вып. 2. – С. 53 – 67.
10. Estermann T. On Kloostermann's sum // Mathematika, 1961, 8. – pp. 83 – 86.

References (transliteration)

1. Ingham A.E. Some asymptotic formulae in the theory of numbers // J. London Math. Soc, 1927, V. 2(7). – pp. 202 – 208.
2. Estermann T. Uber die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten // J. Reine Angew. Math, 1931 V. 164. – pp. 173 – 182.
3. Ismoilov D.I. Ob asimptotike predstavlenija chisel kak raznosti dvuh pro-izvedenij [On the

- asymptotics of the representation of numbers of the two product] // Dokl. AN Tadzh. SSR, 1979, T. 22, 2. – pp. 75 – 79.
4. Arkhipov G.I., Chubarikov V.N. On the Ingham additive divisor problem // Moscow Univ. Math. Bull., 2006, 61(5). – pp. 33 – 36.
 5. Kurtova L.N. Ob odnoj binarnoj additivnoj zadache s kvadraticnymi formami [On a binary additive problem with quadratic forms] // Vestnik SamSSU. Matematika, 2007, 7 (57). – pp. 107 – 121.
 6. Kurtova L.N. Ob odnom analoge additivnoj problemy delitelej s kvadraticnymi formami [About one analog of the additive divisor problem with quadratic forms] // Chebyshevskii Sb., 2014, 15(2). – pp. 33 – 49.
 7. Ogg A.P. Modular Forms and Dirichlet Series. – N.-Y.: W.A. Benjamin Inc., 1969. – 211 p.
 8. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of complex functions]: Uchebnoe posobie dlja studentov mehanicheskikh special'nostej mehaniko-matematicheskikh fakul'tetov gosudarstvennyh universitetov. – M.: Fizmatlit, 1958. – 678 p.
 9. Gritsenko S.A. O funkcional'nom uravnenii odnogo arifmeticheskogo rjada Dirihle [On the functional equation one of arithmetic Dirichlet series] // Chebyshevskii Sb., 2003, 4(2). – pp. 53 – 67.
 10. Estermann T. On Kloostermann's sum // Mathematika, 1961, 8. – pp. 83 – 86.

Куртова Л.Н. «Про одне узагальнення бінарної адитивної задачі з квадратичними формами». У теорії чисел важливу роль відіграють адитивні задачі. Однією з них є проблема дільників Інґама. Розглядається бінарна адитивна задача з квадратичними формами, яка є аналогом класичної проблеми дільників. Отримана асимптотична формула для числа рішень рівняння, що містить лінійну комбінацію бінарних позитивно певних примітивних квадратичних форм. Причому такі рішення шукаються за деякими «вагами», які відповідають за обмеженість числа рішень. Дана задача є узагальненням вивченої раніше проблеми, де рівняння містило суму квадратичних форм. Доказ засновано на круговому методі, коли сума, яка є числом рішень досліджуваного рівняння, представляється у вигляді інтеграла, а також на розбитті відрізка інтегрування числами ряду Фарея, при цьому обрані «ваги» дозволяють використовувати функціональне рівняння для двовимірного тета-ряду. Використовуючи точні формули для подвійних сум Гаусса, із застосуванням оцінки А Вейля для суми Клоостермана проводиться оцінка однієї суми, що містить суми Гаусса.

Ключові слова: адитивні задачі, число рішень, асимптотична формула, сума Клоостермана, квадратична форма.

Kurtova L.N. “About one generality of the binary additive problem with quadratic forms”. In the number theory additive problems is very important. The solution to these problems is concluding to find asymptotic formula for the number of solutions of Diophantine equations. One of them is the Ingham binary additive divisor problem on the representation of natural number as the difference of product of numbers. In present paper one problem with quadratic forms is considered. This problem is analog of the Ingham binary additive divisor problem. The number of solutions of an equation containing a linear combination of binary positive defined primitive quadratic forms is investigated. Moreover, such solutions are sought with some "weights", are responsible for the finite number of solutions. Asymptotic formula of the number of solutions of diophantine equation is received. This problem is a generalization of the problem studied previously, where an equation contained the sum of quadratic forms. Proof based on circular method, when the sum, which is solution of diophantine equation, may be representing as integral. Interval of integration divided by numbers of Farey series. The taking weight coefficient allows using a functional equation of the theta-function. After the transformations sums of the products of Gauss sums is occurred. The exact formula and the estimation for the products of Gauss sums is received. In the process of obtaining estimates it is important to divide the studying sums on a product of two sums, one of which the summation is over the prime to the discriminant of the quadratic field. In this case, the exact formula for the products of Gauss sums is used and the estimation is received by used the estimation by A. Weil of the Kloosterman's sum. The second multiplier, which the summation is not over the prime to the discriminant of the quadratic field, estimated by used the estimation for the products of Gauss sums. The discriminant of the quadratic field is a fixed number. Then this estimation does not grow with the growth of the basic parameter.

Keywords: additive problems of number theory, asymptotic formula, Kloosterman's sum, quadratic form.

Статья поступила в редакцию 17.05.2015
Рекомендована к публикации в журнале «Доклады Академии наук Украины» Г.В. Авериньым

УДК 517.9

Редукция задачи Римана-Гильберта для системы Моисила-Теодореску

Полунин В.А., Солдатов А.П.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет
soldatov@bsu.edu.ru, polunin@bsu.edu.ru

Полунин В.А., Солдатов А.П. «Редукция задачи Римана-Гильберта для системы Моисила-Теодореску». В работе рассматриваются условия разрешимости краевой задачи Римана-Гильберта в ограниченной односвязной области с гладкой границей для трехмерного аналога системы Коши-Римана – эллиптической системы Моисила-Теодореску. Представленная система впервые была предложена и исследована в работах румынских математиков. Она представляет собой линейную систему дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка для четырехкомпонентной вектор-функции в трехмерном пространстве. Целью данной работы является получение условий разрешимости краевой задачи Римана-Гильберта в ограниченной односвязной области трехмерного пространства. При помощи известных условий разрешимости классических задач Дирихле и Неймана доказано необходимое и достаточное условие разрешимости задачи Римана-Гильберта в классе Гельдера. В качестве примера рассмотрен аналог задачи Шварца теории аналитических функций для рассматриваемой эллиптической системы и исследована ее разрешимость. При помощи интегрального представления общего решения краевая задача Римана-Гильберта сведена к исследованию системы сингулярных интегральных уравнений по границе области. В силу слабой особенности матричного ядра соответствующее интегральное уравнение является фредгольмовым и единственным образом разрешимым при выполнении условия ортогональности.

Ключевые слова: система Моисила-Теодореску, задача Шварца, интеграл типа Коши, уравнение Фредгольма.

Введение

Пусть односвязная область $D \subset \mathbb{R}^3$ ограничена гладкой поверхностью S и вектор $n(y) = (n_1, n_2, n_3)$ является единичным вектором внешней нормали к этой поверхности в точке $y \in S$. Для четырехкомпонентной вектор-функции $u(x) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$ в этой области рассмотрим задачу Римана-Гильберта

$$H(y)u^+(y) = f(y), \quad (1)$$

для системы Моисила-Теодореску

$$M \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) u(x) = 0, \quad (2)$$

$$M(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1 & 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ \xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В развернутой форме краевое условие (1) имеет вид:

$$u_1^+(y) = f_1(y),$$

$$u_2^+(y)n_1(y) + u_3^+(y)n_2(y) + u_4^+(y)n_3(y) = f_2(y),$$

где $u^+(y)$ – предельные значения функции $u(y)$ на границе S , $f(y) \in C(S)$ – заданная двухкомпонентная вектор-функция.

Эта задача является аналогом известной задачи Шварца для аналитических функций.

Критерий разрешимости

Напомним [1], что фундаментальным решением дифференциального оператора $M(\partial/\partial x)$ в пространстве \mathbb{R}^3 является матрица-функция $M^T(x)/|x|^3$, где T – символ матричного транспонирования. Поэтому для непрерывной вектор-функции ψ , заданной на поверхности S , интеграл типа Коши

$$(I\psi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{M^T(y-x)}{|y-x|^3} M[n(y)]\psi(y) ds_y, \quad (3)$$

$x \notin S$,

где ds_y – элемент площади на поверхности S и $n(y)$ – единичная внешняя (по отношению к области D) нормаль, определяет вне этой поверхности решение системы (2).

К оператору I в (3) можно применить результаты [2], согласно которым в предположении $S \in C^{1,\mu+0}$ он ограничен $C^\mu(S) \rightarrow C^\mu(D^\pm)$, где для единообразия введены обозначения $D^+ = D$, $D^- = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, и для предельных значений

$$u^\pm(y_0) = \lim_{x \rightarrow y_0, x \in D^\pm} u(x), \quad y_0 \in S,$$

функции $u = I\psi$ справедлив аналог формулы Сохоцкого-Племеля:

$$u^\pm = \pm\psi + u^*, \quad (4)$$

где $u^* = I^*\psi$ определяется сингулярным интегралом

$$(I^* \psi)(y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{M^T(y - y_0)}{|y - y_0|^3} M[n(y)] \psi(y) ds_y,$$

который понимается как предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ интегралов по $S \cap \{|y - y_0| \geq \varepsilon\}$.

Для любого решения $u \in C(\bar{D})$ системы (2) справедлива формула Коши:

$$2u(x) = (Iu^+)(x), \quad x \in D.$$

В частности, оператор I переводит класс $C^\mu(S)$ на все пространство $C^\mu(\bar{D})$ решений системы (2). Однако в представлении $u = I\psi$ плотность ψ определяется, конечно, неединственным образом. Ситуация здесь вполне аналогична с классическими интегралами типа Коши, определяющих аналитические функции, где согласно теореме Н.И. Мусхелишвили соответствующее представление единственно для вещественных плотностей. Аналогичная проблема для системы (2) тесно связана с задачей (1).

Систему (2) по отношению к вектор-функции $u = (u_1, v)$, $v = (u_2, u_3, u_4)$ можно переписать в форме

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \operatorname{rot} v + \operatorname{grad} u_1 = 0, \quad (5)$$

при этом краевое условие (1) примет вид

$$u_1^+ = f_1, \quad v^+ n = f_2, \quad (6)$$

где f_j означают компоненты вектор-функции f . Из соотношений (5), (6), в силу формулы Гаусса-Остроградского, следует, что условие ортогональности

$$\int_S f_2(y) ds_y = 0 \quad (7)$$

необходимо для разрешимости неоднородной задачи (1).

Задачу (1) ниже будем исследовать в классе $C^\mu(\bar{D})$. Для ее решения рассмотрим интегральный оператор $I_0 \varphi = I(H^T \varphi)$ с 2- вектор-функцией $\varphi(y) = (\varphi_1, \varphi_2) \in C^\mu(S)$. С учетом (4) подстановка $u = I_0 \varphi$ в (1) приводит к системе интегральных уравнений

$$\varphi + K\varphi = f, \quad (8)$$

для неизвестной плотности φ , где интегральный оператор

$$(K\varphi)(y_0) = \int_S k(y_0, y) \varphi(y) ds_y, \quad y_0 \in S,$$

определяется матричным ядром

$$k(y_0, y) = \frac{1}{2\pi |y - y_0|^3} \times \begin{pmatrix} n(y)(y - y_0) & 0 \\ n(y)[y - y_0, n(y_0)] & n(y_0)(y - y_0) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где квадратные скобки означают векторное произведение, а произведение без скобок – скалярное.

Можно показать, что в принятом предположении $S \in C^{1, \mu+0}$ это ядро имеет слабую особенность. Более точно, справедливо следующее утверждение [3].

Лемма 1. Пусть $S \in C^{1, \mu}, 0 < \mu < 1$. Тогда функция

$$k_0(y_0, y) = |y - y_0|^2 k(y_0, y) \in C^\mu(S \times S), \\ k_0(y, y) \equiv 0.$$

Теорема 1. Для системы (2) в односвязной области D с границей $S \in C^{2, +0}$ задача (1) однозначно разрешима, причем условие ортогональности (7) необходимо и достаточно для ее разрешимости в классе $C^\mu(\bar{D})$.

Доказательство. Пусть $u = (u_1, v)$, $v = (u_2, u_3, u_4)$ есть решение однородной задачи (1). В силу (6) это решение удовлетворяет условиям:

$$u_1^+ = 0, \quad v^+ n = 0. \quad (10)$$

Поскольку $M(\xi)M^T(\xi) = |\xi|^2$, компоненты этого решения являются гармоническими функциями. Тогда $u_1 = 0$ в области D и система (5) принимает вид:

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \operatorname{rot} v = 0. \quad (11)$$

Поскольку область D односвязна, в соответствии с формулой Стокса из (11) следует, что $v = \operatorname{grad} h$ для некоторой функции h . В силу первого равенства в (11) функция h должна быть гармонической. По отношению к ней второе краевое условие в (10) переходит в условие Неймана, так что функция h должна быть постоянной и, следовательно, $v = 0$. В силу фредгольмовости задачи (1) последнее доказывает ее однозначную разрешимость.

Покажем теперь достаточность условия (7) для разрешимости задачи (1). Убедимся сначала, что пространство решений однородного уравнения (8) одномерно. Пусть $\varphi + K\varphi = 0$, тогда функция $u = I(H^T \varphi)$, рассматриваемая в D , является решением однородной задачи (1), так что по свойству единственности $u = 0$.

Рассмотрим во внешней области $D_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ функцию $w = I(H^T \varphi)$, которая, очевидно, имеет поведение

$$w(x) = O(|x|^{-2}) \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Согласно (4) для нее имеем соотношение

$$-w^- = 2H^T \varphi. \quad (13)$$

Рассмотрим на поверхности S односвязную область Γ с гладким краем $\partial\Gamma$. Так как по предположению $S \in C^{2, +0}$, на Γ можно выбрать пару неколлинеарных касательных векторов $p, q \in C^{1, +0}(\Gamma)$, определяющих 2×4 - матрицу

$$G = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix},$$

умножение которой на матрицу H^T из (1) приводит к нулевой матрице. В силу соотношения (18) функция w , заданная в области D_1 , удовлетворяет на Γ однородному краевому условию

$$Gw^- = 0. \quad (14)$$

Покажем, что матрица G удовлетворяет условию дополнителности [3]. А именно, пусть g^{kr} означает минор второго порядка, составленной из k -го и r -го столбцов матрицы G . В силу [3] это условие заключается в том, что вектор $s = (s_1, s_2, s_3)$ с компонентами $s_1 = g^{12} + g^{34}$, $s_2 = g^{13} - g^{24}$, $s_3 = g^{14} + g^{23}$ не выходит в касательную плоскость всюду на S . Легко видеть, что в рассматриваемом случае $s = [p, q]$ и поэтому указанное условие выполнено.

Убедимся, что функция w непрерывно дифференцируема вплоть до $\Gamma \setminus \partial\Gamma$. С этой целью рассмотрим подобласть $D_0 \subset D_1$ с гладкой границей $\partial D_0 \in C^{2,+0}$, для которой $S \cap \partial D_0 = \Gamma$. При этом матрица-функция G продолжена с сохранением гладкости на ∂D_0 до матрицы G_0 , удовлетворяющей условию дополнителности. Тогда сужение $w_0 = w|_{D_0}$ является решением задачи $G_0(w_0|_{\partial D_0}) = f_0$ с правой частью $f_0 \in C^\mu(\partial D_0)$, обращаемой в нуль на Γ . Функцию w можно рассматривать как слабое решение и на основании теоремы о локальном повышении гладкости [4] отсюда заключаем, что $w \in C^{1,+0}(\overline{D'_0})$, где подобласть $D'_0 \subseteq D_0$ такова, что пересечение $\partial D'_0 \cap \partial D_0$ лежит строго внутри Γ .

Запишем $w = (u_1, v)$, тогда краевое условие (14) для системы (5) можно записать в форме равенства нулю скалярных произведений

$$v^- p = v^- q = 0 \quad (15)$$

на границе S области D_1 .

Рассуждения, аналогичные использованным выше показывают, что $u_1 = 0$ в D_1 . Действительно, по теореме Стокса

$$\int_{\Gamma} (\text{rot} v)^-(x) n(x) ds_x = \int_{\partial\Gamma} v^-(y) e(y) dy,$$

где $e(y)$ есть единичный касательный вектор к контуру $\partial\Gamma$, ориентированный положительно по отношению к n (т.е. обход этого контура, если смотреть из конца вектора n , осуществляется против часовой стрелки). В соответствии с (15) вектор v^- пропорционален n на Γ и, следовательно, подинтегральное выражение в правой части последнего равенства

обращается в нуль. С учетом (5) последнее равенство примет вид:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u_1^-}{\partial n} ds_x = 0.$$

Так как оно верно для любой односвязной области Γ поверхности S , отсюда заключаем, что нормальная производная

$$\frac{\partial u_1^-}{\partial n} = 0.$$

Поскольку гармоническая функция u_1 , представляющая собой первую компоненту вектора $I(H^T \varphi)$, стремится к нулю на бесконечности, отсюда $u_1 = 0$ в D_1 .

Таким образом, система (5) переходит в (11). Хотя область D_1 не является односвязной, однако с учетом (12) можем воспользоваться теми же рассуждениями, которые использовались выше, и функцию v представить в виде $v = \text{grad} h$ с некоторой гармонической функцией, исчезающей на бесконечности. Краевое условие (15) переходит в

$$\frac{\partial h^-}{\partial p} = \frac{\partial h^-}{\partial q} = 0.$$

Эти соотношения равносильны тому, что h^- постоянна на поверхности S . Существует единственная гармоническая функция $h_0 \in C^2(\overline{D_1})$, которая исчезает на бесконечности и граничное значение h_0^- которой тождественно равно 1 на S . Поэтому $h = \lambda h_0$ с некоторым $\lambda \in \mathbb{R}$. Таким образом, $w = (0, \lambda \text{grad} h_0)$ и (13) принимает вид

$$-(0, \lambda \text{grad} h_0)^- = 2(\varphi_1, \varphi_2 n),$$

откуда $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \lambda \psi$ с функцией

$$\psi = -(\text{grad} h_0)^- n = -\frac{\partial h_0^-}{\partial n}. \quad (16)$$

Верно и обратное, функция φ этого типа принадлежит ядру оператора I_0 , где $I_0 \varphi = I(H^T \varphi)$ и, значит, является решением однородного уравнения (8).

По теореме Рисса оператор $1 + K$ фредгольмов индекса нуль, так что коразмерность его образа равна 1. В частности, условие ортогональности (7) не только необходимо, но и достаточно для разрешимости неоднородного уравнения (8).

Редукция задачи

Теорема 2. В условиях теоремы 1 любое решение $u \in C^\mu(\overline{D})$ системы (2) единственным образом представимо в виде $u = I(H^T \varphi)$ с некоторой вектор-функцией $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C^\mu(S)$, удовлетворяющей условию

$$\int_S \varphi_2 \psi ds_y = 0,$$

где ψ фигурирует в (16).

Доказательство. Пусть теперь решение $u \in C^\mu(\bar{D})$ системы (2) задано и $\varphi \in C^\mu(S)$ есть решение уравнения (8) с правой частью $f = Hu^+$. Тогда разность $u - I(H^T \varphi)$ является решением однородной задачи (1) и, следовательно, эта разность равна нулю, что завершает доказательство теоремы.

На основании теоремы 2 для заданных 2×4 -матрицы $B(y) \in C^\mu(S)$ и 2-вектор-функции $f(y) \in C^\mu(S)$ рассмотрим вопрос о редукции общей задачи Римана-Гильберта

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0, \quad B(y)u^+(y) = f(y), \quad y \in S \quad (17)$$

к системе сингулярных интегральных уравнений на границе S области D . Для этого воспользуемся формулой (3), подстановка которой в (17) приводит к системе сингулярных интегральных уравнений

$$G(y_0)\varphi(y_0) + \int_S Q(y_0, y; y - y_0)\varphi(y)ds_y = f(y_0), \quad \int_S \varphi_2 \psi ds_y = 0,$$

где $G(y_0) = (BH^T)(y_0)$ и

$$Q(y_0, y; \xi) = \frac{1}{2\pi} |y - y_0|^{-3} \times \quad (18)$$

$$\times B(y_0)M^T(\xi)M(n(y))H^T(y).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$M^T(\xi)M(n)H^T = \begin{pmatrix} n\xi & 0 \\ [n, \xi]_1 & \xi_1 \\ [n, \xi]_2 & \xi_2 \\ [n, \xi]_3 & \xi_3 \end{pmatrix},$$

где $[n, \xi]_k$ – компоненты векторного произведения $[n, \xi]$. Для дальнейшего удобно матрицу $B = (B_{ij})$ задачи (17) рассматривать в виде:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & e_1 \\ B_{21} & e_2 \end{pmatrix}, \quad e_k = (B_{k2}, B_{k3}, B_{k4}).$$

С учетом этих обозначений имеем

$$G = \begin{pmatrix} B_{11} & e_1 n \\ B_{21} & e_2 n \end{pmatrix},$$

$$Q(y_0, y; \xi) = \frac{1}{2\pi |\xi|^3} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} B_{11}(y_0)n(y)\xi + e_1(y_0)[n(y), \xi] & e_1(y)\xi \\ B_{21}(y_0)n(y)\xi + e_2(y_0)[n(y), \xi] & e_2(y)\xi \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\pi |\xi|^3} \begin{pmatrix} B_{11}(y_0)n(y)\xi + [e_1(y_0), n(y)]\xi & e_1(y)\xi \\ B_{21}(y_0)n(y)\xi + [e_2(y_0), n(y)]\xi & e_2(y)\xi \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача (17) сводится к системе сингулярных интегральных уравнений (18). В частности, для задачи Шварца (17) с матрицей $B = H$ имеем аналогичную (18) систему, в которой

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q(y_0, y; \xi) = \frac{1}{2\pi |\xi|^3} \begin{pmatrix} n(y)\xi & 0 \\ n(y_0)[n(y), \xi] & n(y_0)\xi \end{pmatrix}.$$

В этом случае ядро $Q(y_0, y; \xi)$ имеет слабую особенность и поэтому матричное уравнение (18) является фредгольмовым и однозначно разрешимым при выполнении условия ортогональности (7).

Выводы

В работе представлены условия разрешимости краевой задачи Римана-Гильберта для эллиптической системы Моисила-Теодореску. Получены условия разрешимости краевой задачи Римана-Гильберта в ограниченной односвязной области трехмерного пространства. Приведен пример аналога задачи Шварца теории аналитических функций для рассматриваемой эллиптической системы и исследована ее разрешимость. При помощи интегрального представления общего решения краевая задача Римана-Гильберта сведена к исследованию системы сингулярных интегральных уравнений по границе области.

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1972. – 240 с.
2. Полунин В.А., Солдатов А.П. Трехмерный аналог интеграла типа Коши // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, №3. – С. 366 – 375.
3. Полунин В.А., Солдатов А.П. Задача Римана-Гильберта для системы Моисила-Теодореску в ограниченной области // Неклассические уравнения математической физики. Сб. науч. работ. – Новосибирск: изд-во ин-та математики, 2010. – С. 366 – 375.
4. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. – М.: Наука, 1991. – 336 с.

References (transliteration)

1. Bicadze A.V. Osnovy teorii analiticheskikh funkciy kompleksnogo peremennogo [Fundamentals of the theory of analytic functions of a complex variable]. – М.: Nauka, 1972. – 240 p.
2. Polunin V.A., Soldatov A.P. Trehmernyj analog integrala tipa Koshi [The three-dimensional analogue of the Cauchy integral] //

- Diferencial'nye uravnenija. – 2011. – Т. 47, no 3. – pp. 366 – 375.
3. Polunin V.A., Soldatov A.P. Zadacha Rimana-Gil'berta dlja sistemy Moisila-Teodoresku v ogranichennoj oblasti [Riemann-Hilbert problem for Moasil-Teodorescu system in a bounded region] // Neklassicheskie uravnenija matematicheskoj fiziki. Sb. nauch. rabot. – Novosibirsk: izd-vo in-ta matematiki, 2010. – pp. 366 – 375.
 4. Nazarov S.A., Plamenevskij B.A. Jellipticheskie zadachi v oblastjakh s kusочно gladkoj granicej [Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundary]. – M.: Nauka, 1991. – 336 p

Полунін В.А., Солдатов А.П. «Редукція задачі Рімана-Гільберта для системи Моїсіла-Теодореску» В роботі розглядаються умови можливості розв'язання крайової задачі Рімана-Гільберта в обмеженій однозв'язній області з гладкою межею для тривимірного аналога системи Коши-Рімана – еліптичної системи Моїсіла-Теодореску. Представлена система вперше була запропонована та досліджена в роботах румунських математиків. Вона являє собою лінійну систему диференціальних рівнянь з приватними похідними першого порядку для чотирьохкомпонентної вектор-функції в тривимірному просторі. Підвищений інтерес до вивчення даної системи обумовлюється особливою їхньою значимістю як в математиці, так і в фізиці. У сучасній теорії еліптичних крайових задач центральне місце займає вирішення проблеми знаходження еліптичних систем з фредгольмовими задачами. Ця проблема була поставлена в відомій монографії А.В. Біцадзе. Саме в ході робіт А.В. Біцадзе вперше почалося дослідження крайових задач для тривимірних аналогів системи Коши-Рімана. У цих роботах дослідження стосувалися, головним чином, півпростору. Метою даної роботи є отримання умов розв'язання крайової задачі Рімана-Гільберта в обмеженій однозв'язній області тривимірного простору. За допомогою відомих умов розв'язання класичних задач Діріхле та Неймана доведено необхідна та достатня умова розв'язання задачі Рімана-Гільберта в класі Гельдера. Як приклад розглянуто аналог задачі Шварца теорії аналітичних функцій для даної еліптичної системи і досліджена її розв'язність. Доведено критерій можливості розв'язання цієї задачі в даному класі функцій. За допомогою інтегрального уявлення спільного рішення крайова задача Рімана-Гільберта зведена до дослідження системи сингулярних інтегральних рівнянь щодо границі області. В силу слабкої особливості матричного ядра відповідне інтегральне рівняння є фредгольмовим і єдиним чином вирішуваним при виконанні умови ортогональності.

Ключові слова: система Моїсіла-Теодореску, задача Шварца, інтеграл типу Коши, рівняння Фредгольма.

Polunin V.A., Soldatov A.P. “Riemann-Hilbert problem for Moasil- Teodorescu system”. We consider the boundary conditions for the solvability of the Riemann-Hilbert problem in a bounded simply connected domain with smooth boundary for the three-dimensional analogue of the Cauchy-Riemann system - elliptical system Moasil-Teodorescu. Presented for the first time the system was first proposed and investigated by the Romanian mathematicians. It is a linear system of partial differential equations of the first order for the four-vector function in three-dimensional space. The increased interest in the study of the system caused them a special significance both in mathematics and in physics. In the modern theory of elliptic boundary value problems of the central place is occupied by the problem of finding a solution to the Fredholm elliptic systems tasks. This problem was posed in the famous monograph AV Bitsadze. It is in progress A. Bitsadze first began the study of boundary value problems for three-dimensional analogues of the Cauchy-Riemann system. In these studies, the study focused mainly half. The aim of this work is to provide conditions for the solvability of the Riemann-Hilbert boundary value problem in a bounded simply connected domain of three-dimensional space. With the known conditions of solvability of classical Dirichlet and Neumann proved a necessary and sufficient condition for the solvability of the Riemann-Hilbert problem in the class of Holder. As an example, consider the analogue of the problem Schwartz theory of analytic functions for elliptic system under consideration and investigated its solvability. A criterion for the solvability of this problem in the class of functions. Using the integral representation of the general solution of the boundary value problem of Riemann-Hilbert problem is reduced to the study of a system of singular integral equations on the boundary. Because of the weak features of the kernel matrix corresponding Fredholm integral equation is uniquely soluble and when the orthogonality conditions.

Keywords: Moasil-Teodorescu system, task Schwartz, Cauchy-type integral, Fredholm equation.

Статья поступила в редакцию 28.06.2015
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук А.В. Глушаком

УДК 517.9

О разрешимости системы Ламе теории упругости в изотропной среде

Тарасова О.А., Чернова О.В.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

tarasova_o@bsu.edu.ru, chernova_olga@bsu.edu.ru

Тарасова О.А., Чернова О.В. «О разрешимости системы Ламе теории упругости в изотропной среде». Рассмотрена смешанная задача плоской изотропной теории упругости в полуплоскости, когда на отрезках вещественной оси попеременно задаются либо вектор смещения, либо нормальная компонента тензора напряжений. Для изотропных сред граничные задачи математической теории упругости в областях с гладкой границей хорошо изучены классическим методом сведения к системам сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши. Формула представления решения задачи через пару J -аналитических функций традиционно используется в этих методах, а сами решения эллиптических систем связаны с аналитическими функциями и их производными до некоторого порядка. Такое представление можно значительно упростить, заменив аналитические функции решениями канонических эллиптических систем первого порядка. В данной работе найдено явное представление ядра обобщенного потенциала двойного слоя системы Ламе и исследованы вопросы, связанные с представлением общего решения этой системы через пару J -аналитических функций.

Ключевые слова: система Ламе, изотропная среда, тензоры напряжения и деформации, J -аналитические функции, краевая задача, эллиптическая система, фредгольмов оператор.

Введение

Упругость является основным свойством всех тел природы [1]. Практическое использование человеком свойства упругости тел продолжается века. В 1852 г. Ламе издал первое руководство по теории упругости под заглавием «Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides», ставшее классическим и не утратившее своего значения и поныне.

Основные граничные задачи математической теории упругости для изотропных сред в областях с гладкой границей изучены достаточно хорошо классическим методом сведения к системам сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши [2]. В областях с кусочно-гладкой границей в классической постановке пространств Гельдера с весом эти вопросы исследовались в канонических областях типа клина, полукруга, конуса [3] и др. с помощью различных интегральных преобразований. При эквивалентной редукции краевой задачи для эллиптических систем с постоянными коэффициентами в областях с кусочно-гладкой границей к системе граничных интегральных уравнений наряду с сингулярными интегралами Коши возникают интегралы с ядрами, приближенного-однородными степени -1 .

Теория сингулярных интегральных уравнений такого типа была независимо развита в работах [4], [5].

В классических методах используется формула представления решения через J -аналитические функции. Как показано в [6], решения эллиптических систем связаны с аналитическими функциями, а также их производными до некоторого порядка.

В данной работе рассматривается представление решений системы Ламе с помощью J -аналитических функций в явном виде.

Основные формулы упругости

Согласно [7] состояние среды плоской анизотропной теории упругости характеризуются тензорами напряжения σ и деформации ε , которые представляют собой симметричные 2×2 -матрицы-функции вида:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & \sigma_2 \end{pmatrix},$$
$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$
(1)

где ε_j выражаются через вектор смещения $u = (u_1, u_2)$ по формулам:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial y}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right).\end{aligned}\quad (2)$$

При отсутствии массовых сил матрица σ удовлетворяет уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{(2)}}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

где $\sigma_{(j)}$ означает j -ый столбец матрицы σ .

В линейной теории упругости тензоры σ и ε связаны между собой законом Гука

$$\sigma = \alpha \varepsilon, \quad (4)$$

где тензор модулей упругости α – матрица линейного преобразования, которая симметрична и положительно определена.

В покомпонентной записи соотношения (4) принимают вид:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_4 \varepsilon_2, \\ \sigma_2 &= \alpha_4 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2, \\ \sigma_3 &= 2\alpha_3 \varepsilon_3,\end{aligned}\quad (5)$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

На основании критерия Сильвестра элементы матрицы α должны подчиняться неравенствам $\alpha_j > 0$, $j = 1, 2, 3$, и $\alpha_1 \alpha_2 > \alpha_4^2$, $\alpha_1 \alpha_3 > 0$, $\alpha_2 \alpha_3 > 0$.

Согласно формулам (2) соотношения закона Гука (5) запишем в виде:

$$\sigma_{(i)} = a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{i2} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

с матричными коэффициентами:

$$\begin{aligned}a_{11} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad a_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 - 2\alpha_3 \\ \alpha_3 & 0 \end{pmatrix}, \\ a_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 \\ \alpha_1 - 2\alpha_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

где α_4 связано с α_1 и α_3 равенством $\alpha_4 = \alpha_1 - 2\alpha_3$.

Система Ламе

Подставляя выражение (6) в уравнения равновесия (3), получим для вектора смещения $u = (u_1, u_2)$ эллиптическую систему уравнений второго порядка

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (7)$$

которую называют системой Ламе.

Столбцы тензора напряжений удобно описывать в форме частных производных так называемой сопряженной функции v . В соответствии с (7) эта функция определяется соотношением:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Согласно (8) равенства (6) запишем в форме

$$\sigma_{(1)} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_{(2)} = - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (9)$$

В силу эллиптичности системы (7) ее характеристический многочлен имеет вид:

$$\chi(z) = \det P(z), \quad (10)$$

$$P(z) = a_{11} + (a_{12} + a_{21})z + a_{22}z^2.$$

Уравнение $\chi(z) = 0$ в верхней полуплоскости может иметь либо два различных корня $v_1 \neq v_2$, либо один кратный корень v . Соответственно этим двум случаям примем:

$$1) J = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}, \quad v_1 \neq v_2, \quad (11)$$

$$2) J = \begin{pmatrix} v & i \\ 0 & v \end{pmatrix}.$$

В изотропном случае, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \lambda + 2\mu, \quad \alpha_3 = \mu, \quad \alpha_4 = \lambda \quad (12)$$

с некоторыми положительными λ и μ имеем случай 2) одного кратного корня с $v = i$.

Постановка задачи

Как известно [1], основные краевые условия для системы Ламе в области D на плоскости состоят в задании либо вектора смещений

$$u|_D = f \quad (13)$$

на границе $\Gamma = \partial D$, либо нормальной компоненты $\sigma n = \sigma_{(1)}n_1 + \sigma_{(2)}n_2$ тензора напряжения σ , т.е.

$$(\sigma n)|_\Gamma = g, \quad (14)$$

где $n = (n_1, n_2)$ – единичная внешняя нормаль на Γ . Очевидно, (13) соответствует задаче Дирихле. Согласно (6) можем записать

$$\sigma n = \sum_{i,j=1,2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j,$$

где $x_1 = x, x_2 = y$. Таким образом (14) есть задача Неймана для системы Ламе. Эти задачи носят также название первой и второй краевых задач.

Отметим, что вторая краевая задача (14) может записываться в форме первой по отношению к сопряженной функции v , определенной формулами (8). Тогда из (6) и (8) получим, что $\sigma n = [v[x(s), y(s)]]'$, где $x(s) + iy(s)$ есть естественная параметризация Γ параметром длины дуги s . Следовательно, после интегрирования краевое условие (14) примет вид:

$$v|_{\Gamma} = f_1, \quad (15)$$

где f_1 – первообразная функции g , рассматриваемой как функция длины дуги s на v .

Матрицы B и C

В явном виде матрицы B и C могут быть описаны [8] через корни характеристического многочлена χ .

Запишем равенство (10) в виде: $\chi(z) = g_1(z)g_2(z) - g_3^2(z) = h_1(z) - zh_2(z) + z^2h_3(z)$, где $g_i(z)$ и $h_i(z)$, $i = 1, 2, 3$ квадратные трехчлены:

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \alpha_1 + \alpha_3 z^2, \\ g_2(z) &= \alpha_3 + \alpha_2 z^2, \\ g_3(z) &= (\alpha_3 + \alpha_4)z, \\ h_1(z) &= \beta_2 + \beta_4 z^2, \\ h_2(z) &= -\beta_3 z, \\ h_3(z) &= \beta_4 + \beta_1 z^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_4 & 0 \\ \beta_4 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix} = (\det \alpha) \alpha^{-1}$$

означает присоединенную матрицу к матрице α , фигурирующей в законе Гука, которая также положительно определена.

В явном виде

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 \alpha_3, & \beta_2 &= \alpha_2 \alpha_3, & \beta_3 &= \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_4^2, \\ \beta_4 &= -\alpha_4 \alpha_3, & \beta_5 &= 0, & \beta_6 &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В этих обозначениях, согласно случаю 2) из (11) имеем равенства

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_3 - \alpha_1 & 2\alpha_1 i \\ (\alpha_3 - \alpha_4) i & \alpha_3 - \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$C = \alpha_3 \begin{pmatrix} (\alpha_1 - \alpha_2) 2i & 2(2\alpha_1 - \alpha_3) \\ 2(\alpha_3 - \alpha_1) & 2\alpha_1 i \end{pmatrix}.$$

Как показано в [9], матрицы B и C обратимы.

Отметим, что близкий подход к представлению решений в анизотропном случае рассматривался в [10].

Согласно (16) характеристический многочлен (10) дается равенством

$$\chi(z) = \alpha_3 (\alpha_1 + 2kz^2 + \alpha_2 z^4), \quad (19)$$

$$\text{где } k = \frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_4^2 - 2\alpha_3 \alpha_4}{2\alpha_3}.$$

Легко проверить, что $k + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} > 0$. В самом деле, это неравенство равносильно $(\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} + \alpha_3)^2 > (\alpha_3 + \alpha_4)^2$, которое в силу условия $\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} > |\alpha_4|$ очевидно. Таким образом, для корней биквадратного многочлена (19) в верхней полуплоскости согласно (12) получим следующее выражение:

$$v = i4 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \quad k = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}. \quad (20)$$

В силу условий (12) случай изотропной среды соответствует формулам (18) и (20) с кратным корнем $v = i$, поэтому в явном виде

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} -(\lambda + \mu) & 2(\lambda + 2\mu)i \\ -(\lambda + \mu)i & -(\lambda + \mu) \end{pmatrix} = \\ &= (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} -1 & (\tau + 1) \\ -i & -1 \end{pmatrix}, \\ C &= \mu \begin{pmatrix} 2(\lambda + \mu)i & 4\lambda + 6\mu \\ -2(\lambda + \mu) & 2(\lambda + 2\mu)i \end{pmatrix} = \\ &= \mu(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} 2i & \tau + 3 \\ -2 & (\tau + 1)i \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где положено $\tau = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu)$.

Представление решений

В основе исследования краевых задач для эллиптической системы в области D лежит представление общего решения этой системы через J – аналитические функции.

Будем рассматривать систему Ламе (7) в изотропной среде в верхней полуплоскости области

$$D = \{y > 0\}, \quad (21)$$

которая ограничена гладким контуром Γ .

Введем матрицу $J \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, которая обратима и все ее собственные значения ν имеют положительную мнимую часть, т.е. лежат в верхней полуплоскости. Пусть J имеет вид: $J = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

С матрицей J свяжем эллиптическую систему первого порядка специального вида:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \tag{22}$$

где непрерывно дифференцируемая вектор – функция $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ принадлежит области (21).

Очевидно, при условии $J = i$ соотношение (22) есть условие Коши–Римана, которое определяет аналитические функции.

По этой причине решения $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ системы (22) называем J –аналитическими функциями.

Согласно [8, 11] общее решение u системы Ламе и сопряженная к ней функция v описываются через J –аналитические функции.

Теорема. *Существуют такие обратимые матрицы $B, C \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, что любое решение u системы Ламе (7) и сопряженная к нему вектор–функция v в области D представима в виде*

$$u = \text{Re} B \phi, \quad v = \text{Re} C \phi + \xi, \tag{23}$$

с некоторой J –аналитической функцией ϕ и $\xi \in \mathbb{R}^2$, причем ϕ определена однозначно с точностью до постоянного слагаемого.

Общее решение ϕ системы (22) соответственно двум случаям (11) для матрицы J выражается формулами:

$$\begin{aligned} 1) \phi_k(x, y) &= \psi_k(x + v_k y), k = 1, 2, \\ 2) \phi_1(x, y) &= \psi_1(x + iy) + y \psi'_2(x + iy), \\ \phi_2(x, y) &= \psi_2(x + iy), \end{aligned} \tag{24}$$

где функции ψ_k аналитичны в области $D(v_k) = \{x + v_k y, (x, y) \in D\}$ в случае 1) и в области $D(v)$ в случае 2).

Для изотропной среды, когда выполняются равенства (12) с некоторыми положительными λ, μ имеем случай 2) одного кратного корня с $v = i$ и подстановка (16 – 18) и (24) в (23) приводит к известным формулам Колосова–Мухелишвили [1].

Очевидно, матрицы вида

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{C}$$

коммутируют с клеткой Жордана J в (11), поэтому замена $\phi = M \tilde{\phi}$ не выводит из класса решений системы Дуглиса. Следовательно, полагая $\tilde{B} = BM, \tilde{C} = CM$, соотношения (23) можем переписать по отношению к $\tilde{\phi}$ и \tilde{B}, \tilde{C} .

Другими словами, матрицы B и C определены с точностью до умножения справа на матрицу M . Полагая

$$M = \frac{1}{\lambda + \mu} \begin{pmatrix} -1 & -(\alpha + 1)i \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

в этом случае предыдущие выражения для матриц B и C можем заменить на

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -\alpha \end{pmatrix},$$

$$C = \mu \begin{pmatrix} -2i & \alpha - 1 \\ 2 & -(\alpha + 1)i \end{pmatrix}.$$

В случае 2) из (11) область определения $D(v)$ функций ϕ_k одна и та же, однако согласно (24) в этом случае u и v линейно зависят от ψ и производной ψ' , что вносит также дополнительное осложнение.

Данное препятствие в изотропном случае преодолевалось путем специальных интегральных представлений аналитических функций, предложенных Д.И. Шерманом, Н.И. Мухелишвили и др. [1]. По этой причине [12] удобнее развивать прямой подход к исследованию задач (13), (15), основанный на применении аппарата аналитических функций непосредственно для решений системы Дуглиса (22).

Пусть область D конечна и ограничена простым ляпуновским контуром Γ . Удобно считать, что точка $z = 0$ принадлежит D . Очевидно, задачу (13) можно записать в эквивалентной форме

$$u + \xi_1 = f, u(0) = 0,$$

где $\xi_1 \in \mathbb{R}^l$ подлежит определению относительно пары $(u, \xi), \xi \in \mathbb{R}^2$.

Аналогичным образом можно поступить и по отношению к задаче (15). В соответствии с теоремой эти задачи можем переписать для решений системы (22) в виде

$$\begin{aligned} \text{Re} G \phi^+ + \xi &= f, \\ \phi(0) &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

относительно пары (ϕ, ξ) , где $G = B$ или $G = C$ в соответствии со второй задачей и ϕ^+ означает граничное значение ϕ . Решение поставленной задачи будем искать в классе вектор – функций ϕ , непрерывных по Гельдеру в замкнутой области D .

Исходя из матричного обозначения $(x + iy)_J = x \cdot 1 + y \cdot J$, для $z = x + iy \in \mathbb{C}$ где 1 означает единичную 2×2 –матрицу, и аналогичный смысл имеет обозначение $(dx + idy)_J$ для матричного дифференциала, согласно [12] функцию ϕ можно единственным образом представить в виде

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (t - z)_J^{-1} dt \phi(t) + i \xi_0, \tag{26}$$

$$\xi_0 \in \mathbb{R}^2,$$

где вектор – функция $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ вещественная и непрерывна по Гельдеру на Γ . При этом имеет смысл аналог формулы Сохоцкого – Племяля:

$$2\phi^+(t_0) = \phi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} (t-t_0)^{-1} dt_J \phi(t) + i\xi_0. \quad (27)$$

Удобно сингулярный интеграл с матричным ядром здесь обозначать $(S_J\phi)(t_0)$. При $J=i$ он переходит в классический интеграл Коши $(S\phi)(t_0)$. Подстановка (27) приводит (25) к эквивалентной системе сингулярных уравнений

$$\operatorname{Re}G(\phi + S_J\phi) - (\operatorname{Im}G)\xi_0 + \xi = f,$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} t_J^{-1} dt_J \phi(t) + i\xi_0 = 0.$$

Запишем

$$\frac{1}{\pi i} t_J^{-1} dt_J = b(t) ds_t, \quad (28)$$

с 2×2 – матрицей-функцией $b(t)$, непрерывной по Гельдеру на Γ . Тогда предыдущую систему можем переписать по отношению к паре (ϕ, ξ) :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}G(\phi + S_J\phi) - (\operatorname{Im}G)(\operatorname{Re}b, \phi) + \xi &= f, \\ (\operatorname{Im}b, \phi) &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь (c, ϕ) означает интеграл от $c\phi$ на Γ по длине дуги, в случае вещественной матрицы – функции $c(t)$ этот интеграл принадлежит R^2 .

$$\text{Очевидно, } 2 \operatorname{Re} S_J\phi = S_J\phi - S_{\bar{J}}\phi,$$

где учтено, что вектор – функция ϕ вещественна. Поэтому (29) эквивалентна системе

$$N\phi + \xi = f, \quad (\phi, g_j) = 0, \quad j = 1, 2 \quad (30)$$

относительно пары (ϕ, ξ) , где $2N\phi = G(\phi + S_J\phi) + \bar{G}(\phi - S_{\bar{J}}\phi) - 2(\operatorname{Im}G)(\operatorname{Re}b, \phi)$, а функции g_1 и g_2 представляют собой строки матрицы b .

Условимся писать $N_1 \sim N_2$, если разность представляет собой интегральный оператор вида

$$[(N_1 - N_2)\phi](t_0) = \int_{\Gamma} \frac{k(t_0, t)}{t - t_0} ds_t,$$

где вектор–функция $k(t_0, t)$ непрерывна по Гельдеру на $\Gamma \times \Gamma$ и обращается в ноль при $t=t_0$.

По предположению контур Γ ляпуновский. Как показано в [13] $S_J \sim S$ и, аналогично $S_{\bar{J}} \sim S$. Следовательно,

$$N \sim GP_+ + \bar{G}P_-, \quad 2P_{\pm} = 1 \pm S.$$

Поскольку матрица G постоянна и обратима, сингулярный оператор $GP_+ + \bar{G}P_-$ обратим и обратный к нему выписывается по явной формуле [2] с помощью канонической функции. В результате (30) сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма с

оператором $M = (GP_+ + \bar{G}P_-)^{-1}N \sim 1$ в главной части, к численному решению которой можно применить известные приближенные методы [14].

Аналогичный подход можно реализовать и в случае областей с кусочно-гладкой границей, как показано в [15] по отношению к задаче Дирихле для общих слабо связанных эллиптических систем, однако он уже опирается на аппарат неклассических сингулярных уравнений [16]. Этот подход может охватывать и случай многосвязных областей, как конечных, так и бесконечных. В частности, когда область D является верхней полуплоскостью, решение задачи (13) – (15) может быть записано в явном виде [12].

Именно, пусть функция f удовлетворяет условию Гельдера на расширенной прямой $\bar{R} = R \cup \infty$ (т.е. $f(t)$ и $f(1/t)$ обладают этим свойством на любом конечном отрезке прямой) и обращается в ноль на ∞ . Решение u, v задач (13) – (15) ищется в аналогичном классе для замкнутой полуплоскости \bar{D} . Тогда согласно [12]

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_R B(t-z)^{-1} B^{-1} f(t) dt,$$

$$v(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_R C(t-z)^{-1} C^{-1} f(t) dt.$$

В случае ортотропной среды подстановка в это равенство формул (18) позволяет получить окончательные решения.

Список литературы

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. – 709 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. – 513 с.
3. Шерман Д.И. Плоская задача теории упругости со смешанными предельными условиями // Труды Сейсмологического института, 1938, 88. – С. 51 – 77.
4. Солдатов А.П. К теории сингулярных интегральных операторов классического типа // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15, №3. – С. 529 – 544.
5. Дудучава Р.В. Интегральные уравнения с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики // Труды Тбил. мат. ин-та МН ГССР. 1979. Т. 60. – С. 2 – 136.
6. Бизадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. – 202 с.
7. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 299 с.

8. Солдатов А.П., Тарасова О.А. Смешанная задача плоской теории упругости в полуплоскости // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2015. № 23 (220), Выпуск 41. – С. 5 – 8.
9. Солдатов А.П. Система Ламе плоской анизотропной теории упругости // Доклады РАН, 2002, Т.385, №2. – С. 163 – 167.
10. Митин С.П. О представлении решений анизотропной теории упругости // Дифференциальные уравнения, 1998. Т. 34, №1. – С. 94 – 100.
11. Солдатов А.П. О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференциальные уравнения, 2003. Т. 39. № 5. С. 674 – 676.
12. Солдатов А.П. Эллиптические системы второго порядка на полуплоскости // Известия РАН (сер. математика), 2006, Т. 70, № 6, С. 1233 – 1264.
13. Солдатов А.П., Чернова О.В. Задача Римана-Гильберта для эллиптической системы первого порядка в классах Гельдера // Научные ведомости Белгородского государственного университета. 2009. Т. 13. №17–2. – С. 115.
14. Партон В.З. Интегральные уравнения теории упругости. / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М.: Наука, 1977. – 312 с.
15. Солдатов А.П. Об индексе задачи Дирихле для эллиптических систем на плоскости // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. – №8. – С. 1156 – 1169.
16. Солдатов А.П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М.: Вс. шк., 1991. – 266 с.
- discontinuous presymbols, singular integral equations with fixed singularities and their applications to problems of mechanics] // Trudy Tbil. mat. in-ta MN GSSR. 1979. T. 60. 1979. T.60. pp. 2 – 136.
6. Bitsadze A.V. Kraevye zadachi dlja jellipticheskikh uravnenij vtorogo porjadka [Boundary value problems for second order elliptic equations]. M.: Nauka, 1966. – 202 p.
7. Lehnitsky G.G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela [The theory of an anisotropic elastic body]. Moscow-Leningrad: Gostehizdat, 1950. – 299 p.
8. Soldatov A.P. Tarasova O.A. Smeshannaja zadacha ploskoj teorii uprugosti v poluplosкости [Mixed problem of the plane theory of elasticity in a half] // Scientific statements Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics. 2015. no 23 (220), Issue 41. pp. 5 – 8.
9. Soldatov A.P. Sistema Lamе ploskoj anizotropnoj teorii uprugosti [Lame engine plane anisotropic elasticity theory] // Reports of the Russian Academy of Sciences, 2002, V. 385, no 2, pp. 163 – 167.
10. Mishin S.P. O predstavlenii reshenij anizotropnoj teorii uprugosti [On the representation of anisotropic elasticity theory] Differencial'nye uravnenija, 1998. V. 34, no 1. pp. 94 – 100.
11. Soldatov A.P. O pervoj i vtoroj kraevyh zadachah dlja jellipticheskikh sistem na plosкости [On the first and second boundary value problems for elliptic systems on the plane] // Differencial'nye uravnenija, 2003. V. 39. no 5. pp. 674 – 676.
12. Soldatov A.P. Jellipticheskie sistemy vtorogo porjadka na poluplosкости [Second-order elliptic systems in the half-plane] // Izvestija RAN (ser. matematika), 2006, V. 70, no 6, pp. 1233 – 1264.
13. Soldatov A.P., Chernova O.V. Zadacachа Rimana-Gil'bertа dlja jellipticheskоj sistemy pervogo porjadka v klassah Gel'dera [Riemann Hilbert problem for the elliptic system of first order in the Holder classes]. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. 2009. V. 13. no 17–2. pp. 115.
14. Parton V.Z. Integral'nye uravnenija teorii uprugosti [Integral equations of elastic]. / V.Z. Parton, P.I. Perlin. – M.: Nauka, 1977. – 312 p.
15. Soldatov A.P. Ob indekse zadachi Dirihle dlja jellipticheskikh sistem na plosкости [On the index of the Dirichlet problem for elliptic systems on the plane] // Differencial'nye uravnenija. 2006. V. 42. – no 8. pp. 1156 – 1169.
16. Soldatov A.P. Odnomernye singuljarnye operatory i kraevye zadachi teorii funkcij [Multi-dimensional singular operators and boundary-value problems of function theory]. /A.P. Soldatov // M.: Vs. shk., 1991. – 266p.

References (transliteration)

1. Muskhelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskоj teorii uprugosti [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. M.: Nauka, 1966. – 709 p.
2. Muskhelishvili N.I. Singuljarnye integral'nye uravnenija [Singular integral equations]. M.: Nauka, 1968. – 513 p.
3. Sherman D.I. Ploskaja zadacha teorii uprugosti so smeshannymi predel'nymi uslovijami [Plane problem of elasticity theory with mixed extreme conditions] // Trudy Sejsmologicheskogo instituta, 1938, 88, pp. 51 – 77.
4. Soldatov A.P. K teorii singuljarnyh integral'nyh operatorov klassicheskogo tipа [To the theory of singular integral operators of classical type] // Differencial'nye uravnenija. 1979. V. 15, no 3. pp. 529 – 544.
5. Duduchava R.V. Integral'nye uravnenija s razryvnymi preddimvolami, singuljarnye integral'nye uravnenija s nepodvizhnymi osobennostjami i ih prilozhenija k zadacham mehaniki [Integral equations with

Тарасова О.А., Чернова О.В. «Про можливості розв'язання системи Ламі теорії пружності в ізотропному середовищі». Розглянута змішана задача плоскої ізотропної теорії пружності в півплощині, коли на відрізках речовій осі поперемінно задаються або вектор зміщення, або нормальна компонента тензора напружень. Для ізотропних середовищ граничні задачі математичної теорії пружності, в областях з гладкою межею добре вивчені класичним методом зведення до систем сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші. Формула подання рішення задачі через пару J -аналітичних функцій традиційно використовується в цих методах, а самі рішення еліптичних систем пов'язані з аналітичними функціями та їхніми похідними до деякого порядку. Зазначимо, що таке уявлення можна значно спростити, замінивши аналітичні функції рішеннями канонічних еліптичних систем першого порядку. В даній роботі знайдено явне подання ядра узагальненого потенціалу подвійного шару системи Ламі та досліджені питання, пов'язані з поданням спільного рішення цієї системи через пару J -аналітичних функцій.

Ключові слова: система Ламі, ізотропне середовище, тензори напруги і деформації, J -аналітичні функції, крайова задача, еліптична система, Фредгольмов оператор.

Tarasova O.A., Chernova O.V. "On the solvability of the system of Lamé elasticity in isotropic medium". Considered combined task flat isotropic theory of elasticity in a half-plane, when the segments of the real axis are set alternately to either vector displacement or the normal component of the stress tensor. For isotropic media, boundary problems of mathematical theory of elasticity in domains with smooth boundary are well studied by the classical method of reduction to systems of singular integral equations with Cauchy kernel. Note that if partial derivatives are continuously differentiable vector functions φ satisfy the condition $\partial \varphi / \partial y - J \partial \varphi / \partial x = 0$, where J is a constant $l \times l$ -matrix in which the eigenvalues ν located in the upper half-plane, i.e. $\text{Im } \nu > 0$, it is called a function, analytic on Duglis or to emphasize its dependence on J , J -analytic function. The formula representation of the solution of the problem in a couple J -analytic functions traditionally used in these methods, and the solutions of the elliptic system associated with analytic functions and their derivatives up to a certain order. With the help of various integral transformations for regions with piecewise-smooth boundary, in the classical setting of holder spaces with weight, boundary value problems of mathematical elasticity theory was studied in the canonical regions of the type of wedge, semi-circle, cone etc. With equivalent reduction of the boundary value problem for elliptic systems with constant coefficients in the areas to the system of boundary integral equations in addition to singular integrals arise Cauchy integrals with kernels of degree -1 . Note that such a representation can be greatly simplified by replacing analytic functions by the solutions of the canonical elliptic systems of first order species $\partial \varphi / \partial y - J \partial \varphi / \partial x = 0$. In this paper we found explicit representation of the kernel of the generalized potential of double layer system Lama and studied the issues related to the representation of the General solution of this system using a pair of J -analytic functions.

Keywords: Lamé system, isotropic medium, the stress and strain tensors, J -analytic functions, boundary value problem, elliptic system, Fredholm operator.

Стаття поступила в редакцію 10.06.2015
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук Г.В. Авериньм

О численном решении линейной задачи быстродействия с двумерным управлением

Флоринский В.В.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

flor@bsu.edu.ru

Флоринский В.В. «О численном решении линейной задачи быстродействия с двумерным управлением». В работе рассматривается линейная задача быстродействия с двумерным управлением. Для этой задачи формулируются и доказываются условия оптимальности. Показано, что решение такой задачи сводится к решению двух линейных задач быстродействия с одномерным управлением и общим временем быстродействия. При этом множества достижимости этих задач должны касаться, т.е. иметь одну общую граничную точку, в этой точке существует (возможно не единственная) гиперплоскость, разделяющая эти два множества. Приведен метод преобразования линейной задачи быстродействия к каноническому виду. Предлагается численный метод решения исходной задачи, построенный на аналитическом решении двух линейных задач быстродействия с канонической системой, основанный на применении min-проблемы моментов. Описан алгоритм решения задачи быстродействия с двумерным управлением, а также приведены результаты компьютерной реализации предложенного метода.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, область управляемости, каноническая система, опорный вектор.

Введение

В современной теории оптимального управления одно из центральных мест занимает проблема быстродействия. Поскольку время быстродействия является наиболее естественным критерием оптимальности, задачи на быстродействие стали одним из наиболее распространенных объектов применения различных методов оптимального управления. В последнее время существенное развитие теории линейного быстродействия было достигнуто на основе её связи с классической проблемой моментов. Одним из центральных пунктов в таком подходе стало исследование задачи быстродействия для канонической управляемой системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, & |u| \leq 1, \\ \dot{x}_i = x_{i-1}, & i = \overline{2, n}, \\ x(0) = x, & x(\Theta) = 0, \quad \Theta \rightarrow \min. \end{cases} \quad (1)$$

В.И. Коробовым и Г.М. Склярком в [1] показано, что решение данной задачи эквивалентно степенной проблеме моментов на минимально возможном отрезке (min-проблема моментов), что позволило впервые получить аналитическое решение задачи (1) для системы произвольного порядка n . В [1, 2] даны методы нахождения времени быстродействия Θ , моментов переключения T_1, T_2, \dots, T_{n-1} управления $u(t)$ (точки разрыва функции $u(t)$) и рода управления $\tilde{u} = \pm 1$ – управления на конечном промежутке $[T_{n-1}, \Theta]$.

В данной работе для линейной задачи быстродействия с двумерным управлением

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b_1 u_1 + b_2 u_2, \\ |u_1| \leq 1, \quad |u_2| \leq 1, \quad x(0) &= x_0, \quad x(\Theta) = 0, \quad \Theta \rightarrow \min \end{aligned} \quad (2)$$

доказываются условия оптимальности по быстродействию и предложен численный метод, основанный на использовании аналитического решения задачи (1) и являющийся разновидностью численного метода решения задачи (2), предложенного в работе [3].

Условия оптимальности для линейной задачи быстродействия с двумерным управлением

Рассмотрим задачу быстродействия (2). Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – управления, переводящие точку $x(0)$ в 0. Обозначим через $M_1(\Theta)$ множество точек вида

$$v_0 = - \int_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau,$$

а через $M_2(\Theta)$ – множество точек вида

$$w_0 = - \int_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_2 u_2(\tau) d\tau.$$

Множества $M_1(\Theta)$ и $M_2(\Theta)$ выпуклые и содержат 0 в качестве внутренней точки.

Нетрудно видеть, что множество $M_1(\Theta)$ является областью управляемости в начало координат для системы

$$\dot{x} = Ax + b_1 u_1, \quad |u_1| \leq 1, \quad (3)$$

а множество $M_2(\Theta)$ – областью управляемости в ноль для системы

$$\dot{x} = Ax + b_2 u_2, \quad |u_2| \leq 1. \quad (4)$$

Пусть $M_3(\Theta) = x_0 - M_2(\Theta)$. Тогда $M_3(\Theta)$ – выпуклое множество, содержащее точку x_0 в качестве внутренней точки. Так как области управляемости $M_1(\Theta)$ и $M_2(\Theta)$ удовлетворяют условиям $M_1(\Theta_1) \subset M_1(\Theta_2)$ и $M_2(\Theta_1) \subset M_2(\Theta_2)$ при $\Theta_1 < \Theta_2$, то и $M_3(\Theta_1) \subset M_3(\Theta_2)$ при $\Theta_1 < \Theta_2$.

Теорема. Пусть для системы (2) выполнены следующие условия:

$$\text{rank}(b_1, Ab_1, \dots, A^{n-1}b_1) = n,$$

$$\text{rank}(b_2, Ab_2, \dots, A^{n-1}b_2) = n,$$

множества $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ выпуклые.

Тогда, для того, чтобы время быстрогодействия Θ для задачи (2) было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы пересечение множеств $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ было непустым и не содержало внутренней точки.

Доказательство.

Необходимость. Предположим противное. Пусть пересечение множеств $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ содержит внутреннюю точку. Тогда время Θ не является оптимальным. Действительно, пусть \tilde{x}_0 – общая внутренняя точка этих множеств. Тогда из этой точки можно попасть в 0 за строго меньшее, чем Θ время Θ_1 и, аналогично, из точки $x_0 - \tilde{x}_0$ в 0 – за строго меньшее время Θ_2 , чем Θ . Это значит, что существуют управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ такие, что $|u_1| \leq 1$ и $|u_2| \leq 1$ и такие, что выполняются равенства

$$\tilde{x}_0 = - \int_0^{\Theta_1} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau \quad (5)$$

для $\Theta_1 < \Theta$ и

$$\tilde{x}_0 - x_0 = - \int_0^{\Theta_2} e^{-A\tau} b_2 u_2(\tau) d\tau \quad (6)$$

для $\Theta_2 < \Theta$. Пусть для определенности $\Theta_1 \geq \Theta_2$. Тогда можно положить управление $u_1(\tau) = 0$ на отрезке $[\Theta_2, \Theta_1]$. В этом случае будут справедливы равенство (6) и равенство

$$\tilde{x}_0 = - \int_0^{\Theta_2} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau,$$

т.е. равенство

$$x_0 = - \int_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_1 u_1(\tau) d\tau - \int_0^{\Theta} e^{-A\tau} b_2 u_2(\tau) d\tau$$

будет справедливым при $\Theta = \Theta_2$, а это значит, что из точки x_0 можно попасть в 0 в силу

системы (2) за меньшее время, чем Θ . Необходимость доказана.

Достаточность. Докажем, что, если $M_1(\Theta) \cap M_3(\Theta) \neq \emptyset$ и не содержит внутреннюю точку, то время быстрогодействия Θ оптимально.

Действительно, пусть время Θ не является временем быстрогодействия и пусть Θ_0 – время быстрогодействия. В этом случае $M_1(\Theta_0) \subset M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta_0) \subset M_3(\Theta)$ при $\Theta_0 < \Theta$, но тогда $M_1(\Theta_0) \cap M_3(\Theta_0) = \emptyset$, а это означает, что за меньшее, чем Θ время попасть из точки x_0 в 0 невозможно. Следовательно, Θ – оптимальное по быстроддействию время. Теорема доказана.

Таким образом, время быстрогодействия Θ должно быть таково, что множества $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$ должны иметь общую граничную точку, которую обозначим также через \tilde{x}_0 . В этой точке существует (возможно не единственная) гиперплоскость, разделяющая эти два множества. Следовательно, в этой точке существуют опорные векторы к множествам $M_1(\Theta)$ и $M_3(\Theta)$. Метод нахождения опорного вектора к области управляемости канонической задачи быстрогодействия описан в работах [4, 5]. Таким образом, решение задачи быстрогодействия (2) сводится к решению следующих задач быстрогодействия:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b_1 u_1, & |u_1| \leq 1, \\ x(0) = \tilde{x}_0, & x(\Theta) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

и

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b_2 u_2, & |u_2| \leq 1, \\ x(0) = x_0 - \tilde{x}_0, & x(\Theta) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

и нахождению такой точки \tilde{x}_0 , что время быстрогодействия Θ будет являться общим как для задачи (7), так и для задачи (8), и оно же будет являться временем быстрогодействия для задачи (2).

Преобразование линейной задачи быстрогодействия к каноническому виду

Приведем метод преобразования линейной задачи быстрогодействия к каноническому виду.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (9)$$

где A – вещественная матрица $n \times n$,

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим приведение произвольной матрицы A к форме Фробениуса. Предположим, что для системы (9) выполнено условие

$$\text{rank}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = n. \quad (10)$$

Определим вектор \bar{c} из следующих равенств:

$$\begin{aligned} \bar{c} * b &= 0, \\ \bar{c} * Ab &= 0, \\ &\dots \\ \bar{c} * A^{n-2}b &= 0, \\ \bar{c} * A^{n-1}b &= 1. \end{aligned}$$

В силу предположения (10) эта система имеет единственное решение.

Сделаем замену

$$y = Qx,$$

где матрица Q составлена из векторов $\bar{c} * A^{n-1}, \bar{c} * A^{n-2}, \dots, \bar{c} *$, как из строк:

$$Q = \begin{pmatrix} \bar{c} * A^{n-1} \\ \bar{c} * A^{n-2} \\ \vdots \\ \bar{c} * \end{pmatrix},$$

т.е. $y_i = \bar{c} * A^{n-i}x_i, \quad i = \overline{1, n}$. Умножая систему (9) на матрицу Q , получим систему:

$$Q\dot{x} = QA x + Qb u,$$

которую можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \bar{c} * A^n x + \bar{c} * A^{n-1} b u, \\ \dot{y}_2 = \bar{c} * A^{n-1} x + \bar{c} * A^{n-2} b u, \\ \dots \\ \dot{y}_n = \bar{c} * A x + \bar{c} * b u. \end{cases} \quad (11)$$

По теореме Гамильтона-Кэлли,

$$A^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i,$$

где a_i — коэффициенты характеристического полинома матрицы A

$$\lambda^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i,$$

и учитывая, что

$$\bar{c} * A^i b = \begin{cases} 1, & \text{если } i = n-1, \\ 0 & \text{если } 0 \leq i < n-1, \end{cases}$$

систему (11) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \bar{c} * (a_{n-1} A^{n-1} x + \dots + a_0 x) + u, \\ \dot{y}_2 = y_1, \\ \dots \\ \dot{y}_n = y_{n-1}. \end{cases} \quad (12)$$

В случае, если матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

то, учитывая, что $\lambda^n = 0$, система (12) принимает канонический вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = u, \\ \dot{y}_2 = y_1, \\ \dots \\ \dot{y}_n = y_{n-1}. \end{cases} \quad (14)$$

Матрица Q^{-1} , обратная матрице Q , имеет вид:

$$Q^{-1} = (b, Ab, \dots, A^{n-1}b),$$

откуда из критерия управляемости (10) следует, что если система (9) с матрицей A вида (13) управляемая, то она может быть приведена к каноническому виду (14).

Таким образом, при решении задачи быстродействия (2) системы (7) и (8) приводятся к каноническому виду при помощи матриц Q_1 и Q_2 соответственно и решение задачи (2) сводится к решению двух канонических систем с общим временем быстродействия Θ :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= u_1, & |u_1| &\leq 1, \\ \dot{y}_i &= y_{i-1}, & i &= \overline{2, n}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$y(0) = y_0 = Q_1 \tilde{x}_0, \quad y(\Theta) = 0, \quad \Theta \rightarrow \min,$$

где $y = Q_1 x$ и

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= u_2, & |u_2| &\leq 1, \\ \dot{z}_i &= z_{i-1}, & i &= \overline{2, n}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$z(0) = z_0 = Q_2 (x - \tilde{x}_0), \quad z(\Theta) = 0, \quad \Theta \rightarrow \min,$$

где $z = Q_2 x$.

Численный метод решения задачи быстродействия с двумерным управлением

Опишем теперь численный метод решения задачи быстродействия с двумерным управлением. Для этого рассмотрим задачу быстродействия (2) с матрицей A вида (13). Как было показано, решение этой задачи сводится к решению задач (7) и (8) и нахождению такой точки \tilde{x}_0 , что время Θ является временем быстродействия как для задачи (7) из точки \tilde{x}_0 в 0, так и для задачи (8) из точки $x_0 - \tilde{x}_0$ в 0, и оно же будет временем быстродействия для задачи (2) из точки x_0 в 0.

В работе [3] предложен численный метод решения данной задачи, основанный на поиске точки \tilde{x}_0 на биссектрисе угла между опорными векторами к областям управляемости задач (15)

и (16). В данной работе предлагается метод, основанный на поиске точки \tilde{x}_0 на опорном векторе к одной из областей управляемости задач (15) и (16).

При помощи невырожденных матриц Q_1 и Q_2 приведем задачи (7) и (8) к каноническому виду (15) и (16) соответственно. Обозначим через N_y опорный вектор к области управляемости системы (15) за время Θ_y , а через N_z – опорный вектор к области управляемости системы (16) за время Θ_z .

На отрезке прямой, соединяющей точки x_0 и 0, методом половинного деления находим точку \tilde{x} , в которой $\Theta_y = \Theta_z$. В этой точке находим опорный вектор [3, 4] $N_y = N_y(Q_1\tilde{x}, \Theta_y)$ к области управляемости системы (15) за время Θ_y и опорный вектор $N_z = N_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}), \Theta_z)$ к области управляемости системы (16) за время Θ_z . Следует отметить, что векторы $Q_1^{-1}N_y$ и $Q_2^{-1}N_z$ являются опорными векторами в точке \tilde{x} исходного пространства к областям управляемости систем (7) за время Θ_y и (8) за время Θ_z . Если угол между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$ (обозначим его $\delta = \delta(\tilde{x})$) равен π (вычислять следует $\cos \delta$), то время быстрогодействия задачи (2) равно $\Theta = \Theta_y = \Theta_z$ и $\tilde{x}_0 = \tilde{x}$. Для каждой из систем (15) и (16) находим моменты переключения [1, 2], что и будет являться решением исходной задачи. В противном случае находим биссектрису угла δ . На этой биссектрисе находим точку \tilde{x}_b , ближайшую к точке \tilde{x} , в которой $\cos \delta$ принимает минимальное значение (здесь можно применить метод золотого сечения поиска минимума функции).

Если в точке \tilde{x}_b выполняется неравенство $\Theta_y > \Theta_z$, то в направлении вектора $Q_1^{-1}N_y(Q_1\tilde{x}_b, \Theta_y)$ находим точку \tilde{x}' , в которой $\Theta_y = \Theta_z$; если же в точке \tilde{x}_b $\Theta_y < \Theta_z$, то точку \tilde{x}' , в которой $\Theta_y = \Theta_z$, находим в направлении вектора $-Q_2^{-1}N_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}_b), \Theta_z)$.

Если в найденной точке \tilde{x}' угол δ между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$ равен π , то время быстрогодействия задачи (2) равно $\Theta = \Theta_y = \Theta_z$ и $\tilde{x}_0 = \tilde{x}'$. В противном случае находим биссектрису угла $\delta = \delta(\tilde{x}')$, и процесс

повторяется до тех пор, пока на очередном шаге угол δ между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$ не станет равным π с заданной точностью ε , то есть не будет выполняться неравенство $|\cos \delta + 1| < \varepsilon$.

Приведем описание алгоритма рассмотренного метода.

Шаг 1. Задаем размерность n , начальную точку x_0 , векторы b_1 и b_2 , точность вычислений ε .

Шаг 2. Находим матрицы $Q_1, Q_2, Q_1^{-1}, Q_2^{-1}$.

Шаг 3. Между точками x_0 и 0 методом половинного деления находим точку \tilde{x} , в которой $\Theta_y(Q_1\tilde{x}) = \Theta_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}))$.

Шаг 4. В точке \tilde{x} находим опорные векторы $N_y = N_y(Q_1\tilde{x}, \Theta_y)$ и $N_z = N_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}), \Theta_z)$.

Шаг 5. Находим $\cos \delta$, где $\delta = \delta(\tilde{x})$ – угол между векторами $Q_1^{-1}N_y$ и $-Q_2^{-1}N_z$.

Шаг 6. Если $|\cos \delta + 1| < \varepsilon$, то переходим к шагу 11, иначе переходим к шагу 7.

Шаг 7. Находим биссектрису угла δ и на этой биссектрисе методом золотого сечения находим точки \tilde{x}_b , ближайшую к точке \tilde{x} , в которой $\cos \delta$ принимает минимальное значение.

Шаг 8. Находим в точке \tilde{x}_b время быстрогодействия $\Theta_y = \Theta_y(Q_1\tilde{x}_b)$ и $\Theta_z = \Theta_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}_b))$.

Шаг 9. Если $\Theta_y > \Theta_z$, то в направлении вектора $Q_1^{-1}N_y(Q_1\tilde{x}_b, \Theta_y)$ находим точку \tilde{x} , в которой выполняется равенство $\Theta_y(Q_1\tilde{x}) = \Theta_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}))$, если $\Theta_y < \Theta_z$, то в направлении вектора $-Q_2^{-1}N_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}_b), \Theta_z)$ находим точку \tilde{x} , в которой выполняется равенство $\Theta_y(Q_1\tilde{x}) = \Theta_z(Q_2(x_0 - \tilde{x}))$.

Шаг 10. Переходим к шагу 4.

Шаг 11. Точка \tilde{x} является искомой точкой \tilde{x}_0 . Для каждой из задач (15) и (16) находим род управления \tilde{u}_y и \tilde{u}_z и для каждого из управлений u_y и u_z находим моменты переключений.

Рассмотрим результат применения описанного численного метода к решению задач быстрогодействия.

Для задачи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \\ |u_1| \leq 1, \quad |u_2| \leq 1, \\ x(0) = (1; 1), \quad x(\Theta) = 0, \quad \Theta \rightarrow \min \end{cases}$$

при применении описанного метода после 11 итераций было получено:

точка $\tilde{x}_0 \approx (-0,153346; 0,507258)$;
 время быстрогодействия $\Theta \approx 1,2875073$;
 момент переключения для управления u_1 : $T_1 \approx 0,5670808$;
 момент переключения для управления u_2 : $T_1 \approx 1,2204268$;
 род управления (управление на конечном промежутке): $\tilde{u}_1 = +1, \tilde{u}_2 = +1$.

Изменения поведения областей управляемости для каждой из задач (7) и (8) представлены на следующих рисунках.

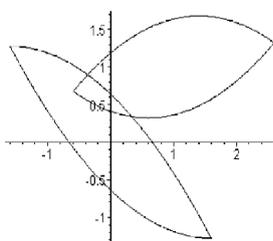


Рис. 1.

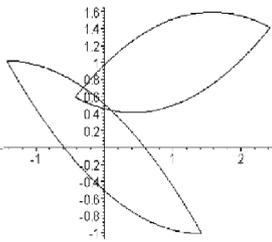


Рис. 2

На рисунке 1 показано начальное положение областей управляемости после выполнения шага 3 алгоритма при $\Theta \approx 1,597$. На рисунке 2 – положение областей после первой итерации при $\Theta \approx 1,425$.

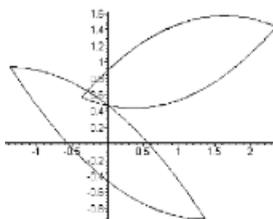


Рис. 3

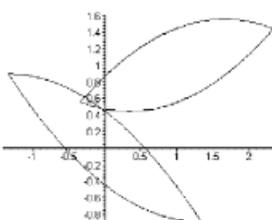


Рис. 4

На рис 3 и 4 – положение областей управляемости соответственно после двух итерация (при $\Theta \approx 1,366$) и трех итераций (при $\Theta \approx 1,338$).

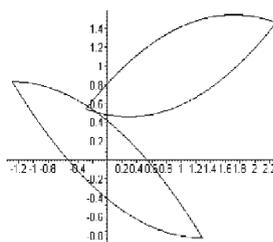


Рис. 5

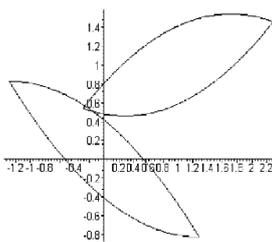


Рис. 6

На рисунках 5 и 6 показано положение областей управляемости после десяти итераций (при $\Theta \approx 1,289$) и после последней, одиннадцатой, итерации (при $\Theta \approx 1,2875$).

Приведем результаты численного решения описанным методом для задачи быстрогодействия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_2 + u_2, \\ \dot{x}_4 = x_3, \\ |u_1| \leq 1, \quad |u_2| \leq 1, \\ x(0) = x_0, \quad x(\Theta) = 0, \quad \Theta \rightarrow \min. \end{cases}$$

Так для начальной точки $x_0 = (0; 1; 1; 1)$ точка

$\tilde{x}_0 \approx (-0,230497; -0,229331; 0,461084; 1,174799)$;
 время быстрогодействия $\Theta \approx 4,965695$;

моменты переключения для управления u_1 : $T_1 \approx 0,611052, T_2 \approx 2,524571, T_3 \approx 4,281118$,

моменты переключения для управления u_2 : $T_1 \approx 1,455239, T_2 \approx 3,459045, T_3 \approx 4,965696$,

род управления (управление на конечном промежутке):

$\tilde{u}_1 = +1, \tilde{u}_2 = +1$.

Список литературы

1. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов // Мат. сборник. – 1987. – 134(176), № 2(10). – С. 186 – 206.
2. Коробов В.И., Скляр Г.М., Флоринский В.В. Методы построения оптимальных по быстродействию управлений для канонических управляемых систем // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1999. – Т. 6, № 3/4. – С. 264 – 287.
3. Флоринский В.В. Решение линейной задачи быстрогодействия с двумерным управлением // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2015. – №5 (202). Вып. 38. – С. 89 – 95.
4. Коробов В.И., Скляр Г.М., Флоринский В.В. Многочлен минимальной степени для определения всех моментов переключения в задаче быстрогодействия // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2000. – Т.7, № 3. – С. 308 – 320.
5. Коробов В.И., Скляр Г.М., Флоринский В.В. Минимальный полином для нахождения моментов переключения и опорного вектора к области управляемости // Дифференциальные уравнения. 2002. – Т. 38, – С. 16 – 19.

References (transliteration)

1. Korobov V.I., Skljjar G.M. Optimal'noe bystrodejstvie i stepennaja problema momentov [Time optimality and the power moment problem] // Mat. sbornik. – 1987. – 134(176), no. 2(10). – pp. 186 – 206.
2. Korobov V.I., Skljjar G.M., Florinskij V.V. Metody postroenija optimal'nyh po bystrodejstviju upravlenij dlja kanonicheskikh upravljajemyh sistem [Methods of construction of time-optimal controls for canonical control systems] // Matematicheskaja fizika, analiz, geometrija. – 1999. – T. 6, no. 3/4. – pp. 264 – 287.
3. Florinskij V.V. Reshenie linejnoy zadachi bystrodejstvija s dvumernym upravleniem [The solution of the linear time-optimal problem with the two-dimensional control] // Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Matematika. Fizika. – 2015. – no. 5(202). Issue 38. – pp. 89 – 95.
4. Korobov V.I., Skljjar G.M., Florinskij V.V. Mnogochlen minimal'noj stepeni dlja opredelenija vseh momentov perekljuchenija v zadache bystrodejstvija [The minimal polynomial for determining of all points of switching in the time optimal control problem] // Matematicheskaja fizika, analiz, geometrija. – 2000. – T. 7, no. 3. – pp. 308 – 320.
5. Korobov V.I., Skljjar G.M., Florinskij V.V. Minimal'nyj polinom dlja nahozhdenija momentov perekljuchenija i opornogo vektora k oblasti upravljajemosti [The minimal polynomial for determining the switching times and the support vector to the controllability domain] // Differencial'nye uravnenija. 2002. – T. 38, – pp. 16 – 19.

Флоринський В.В. «Про чисельне рішення лінійної задачі швидкодії з двовимірним управлінням». В роботі розглядається лінійна задача швидкодії з двовимірним управлінням. Для цієї задачі формулюються та доводяться умови оптимальності. Показано, що вирішення такої задачі зводиться до вирішення двох лінійних задач швидкодії з одновимірним управлінням і загальним часом швидкодії. При цьому множини досяжності цих задач повинні торкатися, тобто мати одну загальну граничну точку, в цій точці існує (можливо не єдина) гіперповерхня, яка розділяє ці дві множини. Наведено метод перетворення лінійної задачі швидкодії до канонічного виду. Запропоновано чисельний метод розв'язання вихідної задачі, який побудовано на аналітичному рішенні двох лінійних задач швидкодії з канонічною системою та засновано на застосуванні *мін-проблеми моментів*. Описано алгоритм рішення задачі швидкодії з двовимірним управлінням, а також наведено результати комп'ютерної реалізації запропонованого методу.

Ключові слова: оптимальне управління, задача швидкодії, область керованості, канонічна система, опорний вектор.

Florinsky V.V. “On the numerical solution of linear time-optimal problem with two-dimensional control”. This the paper considers the problem of linear performance with two-dimensional control. For this problem are formulated and proved optimality conditions. It is shown that the solution of this problem reduces to solving two linear problems of performance with one-dimensional control, and overall time performance. The attainability of these objectives should relate to, i.e. have one common boundary point, at this point there is a (possibly not unique) hyperplane separating these two sets. Given the method of converting the linear time-optimal control problem to the canonical form. A numerical method for solving the original problem, built on analytical solution of two linear problems of performance with the canonical system based on the application of the *min-problem*. The described algorithm for solving the time-optimal problem with two-dimensional control, as well as the results of the computer implementation of the proposed method.

Keywords: optimal control, time-optimal problem, set of controllability, canonical system, support vector.

Статья поступила в редакцию 23.06.2015
Рекомендована к публикации в-ром техн. наук Г.В. Авериньм

О числе простых чисел в арифметической прогрессии с разностью специального вида

Шевцова М.В.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет
shevtsova@bsu.edu.ru

Шевцова М.В. «О числе простых чисел в арифметической прогрессии с разностью специального вида». Изучены особенности распределения простых чисел в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени фиксированного простого числа, на основе оценок сумм значений характера по модулю $D = p_0^m$. Получено уточнение границы изменения разности арифметической прогрессии в многомерной проблеме делителей Дирихле в арифметических прогрессиях для случаев $k=2$ и $k=3$ с использованием элементарных методов, то есть не прибегая к средствам математического анализа. Также рассмотрена задача о равномерной оценке остаточного члена асимптотической формулы для суммы значений функции делителей в арифметической прогрессии с разностью указанного вида. Определена граница изменения основного растущего параметра k , при которой данная формула нетривиальна. Эта проблема решена на основе оценки «коротких» сумм значений характера по модулю $D = p_0^m$. В результате выведена асимптотическая формула для числа простых чисел, лежащих в арифметической прогрессии с разностью, равной степени фиксированного простого числа. Получено незначительное уточнение остаточного члена этой формулы и границы изменения разности прогрессии. Задача решена элементарными методами; средства математического анализа, а именно контурное интегрирование, применяются только для оценки сумм по простым числам.

Ключевые слова: разность арифметической прогрессии, проблема делителей Дирихле, асимптотическая формула для числа простых чисел.

Введение

В теории чисел важную роль играет распределение простых чисел в арифметических прогрессиях.

Пусть при $(l, D) = 1$ $\pi(X, D, l)$ означает число простых чисел, не превосходящих X и сравнимых с l по модулю D . Из расширенной гипотезы Римана следует, что

$$\pi(X, D, l) = \frac{LiX}{\varphi(D)} \left(1 + O\left(e^{-\ln^{0.1} X}\right) \right),$$

где $D \leq X^{1/2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ – произвольно мало.

Но безусловная граница изменения D гораздо меньше: при $D \leq (\ln X^A)$, $A > 0$ – константа, $c=c(A) > 0$, справедлива формула:

$$\pi(X, D, l) = \frac{LiX}{\varphi(D)} + O\left(Xe^{-c\sqrt{\ln X}}\right), \quad (1)$$

которая известна в литературе как формула Зигеля-Вальфиша [1].

Специальный вид разности $D = p_0^m$, $p_0 \geq 3$ – фиксированное простое число, позволяет получить асимптотическую формулу для $\pi(X, D, l)$ при гораздо больших D .

История исследования простых чисел в арифметических прогрессиях

В 1955 г. А.Г. Постников обнаружил [2], что существует многочлен с целыми коэффициентами

$$f(u) = u + a_2 u^2 + \dots + a_{m-1} u^{m-1}$$

степени $m-1$ такой, что для любого первообразного корня g по модулю p_0^m при любом целом u справедливо сравнение

$$\frac{\text{ind}_g(1 + p_0)}{p_0 - 1} \equiv \Lambda f(u) \pmod{p_0^{m-1}},$$

где $(\Lambda, p_0) = 1$ и Λ – корень сравнения

$$\frac{\text{ind}_g(1 + p_0)}{p_0 - 1} \equiv \Lambda f(1) \pmod{p_0^{m-1}}.$$

Данное наблюдение позволило представить сумму значений неглавного характера по модулю D , равному степени нечетного простого числа, как сумму Вейля специального вида. Это открытие замечательно тем, что суммы Вейля, даже очень короткие (а вместе с ними и очень короткие суммы значений характера), допускают нетривиальные оценки.

Идея А.Г. Постникова позволила решить некоторые проблемы теории чисел, к которым в общем случае не было никаких подходов.

К таким задачам относится получение асимптотической формулы для $\pi(X, D, l)$ при возможно большем значении D .

В 1964 г. Ю.В. Линник, М.Б. Барбан и Н.Г. Чудаков [3] доказали следующий асимптотический закон, справедливый при $D = p_0^m \leq X^{3/8-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ – произвольно малое число, $M > 0$ – произвольно большое число):

$$\pi(X, D, l) = \frac{LiX}{\varphi(D)} \left(1 + O(\ln^{-M} X) \right). \quad (2)$$

Доказательство этой теоремы основано на плотностной технике и поэтому требует информации о распределении нулей L -функции Дирихле в критической полосе.

Используя идею А.Г. Постникова, авторы получили оценку для суммы значений неглавного характера по модулю $D = p_0^m$:

$$\sum_{\nu \leq a} \chi(\nu) \ll a^{1/2} D^{1/6} \ln D. \quad (3)$$

Эта оценка дала возможность Ю.В. Линнику, М.Б. Барбану и Н.Г. Чудакову вывести новую плотностную теорему:

$$N(\sigma, T, \chi) \ll T^3 D^{(8/3)(1-\sigma)} \ln^{13} D, \quad (4)$$

где $N(\sigma, T, \chi)$ – число нулей $L(s, \chi)$ в прямоугольнике $\sigma \leq \beta < 1$, $|\gamma| \leq T$, $\rho = \beta + it$ – нуль $L(s, \chi)$ в полосе $0 < \beta < 1$.

Используя оценку (4), авторы получили формулу (2) для больших D по сравнению с (1).

В монографии А.А. Карацубы [1] приводится следующая формула, справедливая при $D = p_0^m \leq X^{1/9}$:

$$\psi(X, D, l) = \frac{X}{\varphi(D)} \left(1 + O\left(e^{-c(\ln \ln X)^2} \right) \right), \quad (5)$$

где $c > 0$ – константа.

Доказательство (5) осуществляется на основе плотностной техники. Отметим, что, хотя оценка остаточного члена точнее, чем в (2), граница изменения D гораздо меньше.

Другая задача, в которой исследования А.Г. Постникова нашли свое применение, – это проблема делителей Дирихле в арифметических прогрессиях.

Пусть $\tau_k(n)$ – число решений в целых положительных числах n_1, \dots, n_k уравнения $n_1 \cdot \dots \cdot n_k = n$.

Рассмотрим сумму

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ n \equiv l \pmod{D}}} \tau_k(n). \quad (6)$$

В работе А.Ф. Лаврика [4] получена асимптотическая формула для суммы (6) при $k \geq 4$ с произвольной разностью D :

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ n \equiv l \pmod{D}}} \tau_k(n) = \frac{XP_{k-1}(\ln X)}{\varphi(D)} + R,$$

где $R \ll \frac{1}{\varphi(D)} X^{1-1/c_1} D^{k/c_2}$, c_1, c_2 –

константы, $P_{k-1}(z)$ – многочлен степени $k-1$ от переменной z . Эта формула нетривиальна при $D \leq X^{c_3/k}$.

Если $k < 4$, то последний результат существенно усилен.

Г. Иванец [5] на основе модулярной техники получил асимптотическую формулу в случае $k=2$, справедливую при $D \leq X^{2/3-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ – произвольно мало), и совместно с Дж. Фридендером [6] – для $k=3$, справедливую при $D \leq X^{1/2+1/230}$.

В 1979 г. М.М. Петечук [7] усилил результат А.Ф. Лаврика и получил асимптотическую формулу для суммы (6) при фиксированном $k \geq 2$ и $D = p_0^m \leq X^{3/8-\varepsilon}$:

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ n \equiv l \pmod{D}}} \tau_k(n) = \frac{XP_{k-1}(\ln X)}{\varphi(D)} + O\left(\frac{X^{1-\phi}}{\varphi(D)} \right), \quad (7)$$

где $(l, D) = 1$, $P_{k-1}(\ln X)$ – многочлен степени $k-1$ с коэффициентами, зависящими от k и p_0 , $\phi = \min\left\{ \frac{\varepsilon}{16}, \frac{\beta}{k^3} \right\}$, $\beta > 0$ – константа, зависящая от p_0 .

Формула остаточного члена (7) получена с применением оценки «короткой» суммы значений характера по модулю $D = p_0^m$, основанной на работе А.Г. Постникова. Доказательство (7) проводится без применения средств комплексного анализа. Оно опирается на метод работы А.А. Карацубы [8], позволяющий оценивать остаточный член асимптотической формулы по схеме решения тернарной аддитивной задачи.

Многомерная проблема делителей Дирихле в арифметических прогрессиях

Рассмотрим проблему делителей Дирихле в арифметической прогрессии с разностью, равной степени простого числа.

Элементарными методами нами была доказана следующая теорема.

Теорема 1. При $(l, D) = 1$ имеет место формула:

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ n \equiv l \pmod{D}}} \tau_k(n) = \frac{XP_{k-1}(\ln X)}{\varphi(D)} + R. \quad (8)$$

При $k = 2$ (8) справедлива для $D \leq X^{1/2-\varepsilon_1}$ ($\varepsilon_1 > 0$ – сколь угодно малое число).

При $k = 3$ (8) справедлива для $D \leq X^{4/9-\varepsilon_2}$ ($\varepsilon_2 > 0$ – сколь угодно малое число).

Таким образом, получено уточнение границы изменения разности арифметической прогрессии в многомерной проблеме делителей Дирихле в арифметических прогрессиях для случаев $k = 2$ и $k = 3$.

Рассмотрим также задачу о равномерной оценке остаточного члена асимптотической формулы для суммы (6) при $D = p_0^m \leq X^{3/8-\varepsilon}$. В этой задаче нами определена граница изменения основного растущего параметра k , при которой данная формула нетривиальна.

Теорема 2. При $(l, D) = 1$, $D = p_0^m \leq X^{3/8-\varepsilon}$ справедлива формула:

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ n \equiv l \pmod{D}}} \tau_k(n) = \frac{XP_{k-1}(\ln X)}{\varphi(D)} + R, \quad (9)$$

$$\text{где } R \leq \frac{X^{1-\phi}}{\varphi(D)} (k-1)^{7(k-2)} e^{c(k-2)} (\ln X)^{2k-2},$$

$P_{k-1}(\ln X)$ – многочлен степени $k-1$ с коэффициентами, зависящими от k и p_0 ,

$$\phi = \min\left\{\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\gamma}{5k^3}\right\}, \quad \gamma > 0, \quad c > 0 \text{ – константы.}$$

Заметим, что, поскольку главный член является величиной порядка $\frac{X}{\varphi(D)} (\ln X)^{k-1}$, то

$$\text{формула (9) нетривиальна при } k \leq \left(\frac{\ln X}{\ln \ln X}\right)^{1/4}.$$

Асимптотический закон распределения простых чисел в арифметических прогрессиях

Рассмотрим проблему распределения простых чисел в арифметической прогрессии с разностью, равной степени фиксированного простого числа. Основной результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 3. При $(l, D) = 1$, $D = p_0^m \leq X^{3/8} e^{-(\ln \ln X)^2}$ справедлива формула:

$$\pi(X, D, l) = \frac{LiX}{\varphi(D)} + O\left(\frac{X}{\varphi(D)} e^{-\phi(\ln \ln X)^2}\right),$$

где $0 < \phi < 1$ – константа.

По сравнению с теоремой Ю.В. Линника, М.Б. Барбана и Н.Г. Чудакова получено незначительное уточнение остаточного члена и верхней границы изменения D . Наше доказательство существенно отличается тем, что

не использует информации о распределении нулей L -функции Дирихле в критической полосе, а использует лишь теорему о границе нулей, принадлежащую В.Н. Чубарикову [11], доказательство которой элементарно.

Вывод асимптотической формулы осуществляется, в основном, по схеме работ М.М. Петечука [7] и А.А. Карацубы [8]. Однако в эту схему пришлось внести изменения, поскольку нам необходимо оценивать не только суммы значений характера, но и суммы значений характера по простым числам.

При доказательстве теоремы возникают короткие по сравнению с модулем характера суммы двух видов:

$$1) \sum_{N < n \leq 2N} \chi(n); \quad 2) \sum_{N < n \leq 2N} \mu(n)\chi(n).$$

Первые – это суммы значений характера по сплошному промежутку. Их мы оцениваем как суммы Вейля, согласно технике

$$\text{Постникова: } \sum_{N < n \leq 2N} \chi(n) \ll N^{1-\gamma/r^2}, \quad r = \frac{\ln D}{\ln N}, \text{ где}$$

$0 < \gamma < 1$ – константа.

Оценка сумм второго вида представляет отдельную задачу, когда параметр N «очень маленький», то есть самая длинная сумма оказывается короткой.

Пользуясь определением функции Мебиуса, мы представляем эту сумму в виде:

$$\sum_{N < n \leq 2N} \mu(n)\chi(n) = 1 + \sum_{l=1}^{L_0} (-1)^l S_l,$$

$$\text{где } S_l = \sum_{N\delta_l \leq 2N} \chi(\delta_l), \quad \delta_l \text{ – бесквадратное}$$

число, имеющее ровно l простых делителей, $L_0 = \lceil \log_2 N \rceil$.

Применяя решето Виноградова, мы сводим сумму S_l к сумме значений характера по простым числам:

$$\sum_{N' < p \leq 2N'} \chi(p).$$

Эту сумму не удастся нетривиально оценить, используя метод тригонометрических сумм И.М. Виноградова, в силу мультипликативности функции характера. Поэтому здесь мы применяем теорему В.Н. Чубарикова [11] о границе нулей L -функции Дирихле: для произвольного неглавного характера χ по модулю $D = p_0^m$ $L(s, \chi)$ не имеет нулей в области

$$\sigma > 1 - \frac{b_1}{(\ln D)^{2/3} (\ln \ln D)^2}, \quad |t| < e^{b_2 (\ln \ln D)^2},$$

где b_1, b_2 – положительные константы.

На основе этой теоремы мы получаем оценку логарифмической производной L – функции в области

$$\sigma > 1 - \frac{c_1}{2(\ln D)^{2/3}(\ln \ln D)^2},$$

$$|t| < e^{c_2(\ln \ln D)^2},$$

$$\left| \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right| \ll (\ln D)^{5/3} (\ln \ln D)^2.$$

Далее, применяя формулу Перрона и метод контурного интегрирования, приходим к следующему неравенству:

$$\sum_{N^c < p \leq 2N^c} \chi(p) \ll N^c e^{-c(\ln \ln D)^2},$$

где $0 < c < 1$ – константа.

Последний результат и определяет в конечном счете оценку остаточного члена асимптотической формулы для $\pi(X, D, l)$.

Выводы

Подведем итоги данной работы. Нами было рассмотрено три задачи, относящиеся к проблематике распределения значений арифметических функций в арифметической прогрессии с разностью D , равной степени простого числа.

Для случаев $k = 2$ и $k = 3$ в многомерной проблеме делителей Дирихле была уточнена граница изменения D .

Также получена равномерная оценка остаточного члена в асимптотической формуле для числа значений функции делителей в арифметической прогрессии с разностью указанного вида.

Основной итог работы заключается в получении формулы для $\pi(X, D, l)$. В этой формуле по сравнению с предшествующими результатами достигнуто незначительное улучшение остаточного члена и границы изменения разности арифметической прогрессии. Но основное отличие заключается в методике доказательства этой теоремы. Доказательство проводится элементарно, за исключением оценки сумм по простым числам, где были использованы аналитические методы.

Список литературы

1. Карацуба А.А. Распределение произведений простых сдвинутых чисел в арифметических прогрессиях // Доклад АН СССР. – 1970. – Т. 192, № 4. – С. 724 – 727.
2. Постников А.Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа // Изв. АН СССР, сер. Матем. – 1955. – Т. 19, № 1. – С. 11 – 16.
3. Линник Ю.В., Барбан М.Б., Чудаков Н.Г. О простых числах в арифметической прогрессии с разностью, равной степени простого числа // Acta arithm. J. – 1964. – vol. 9, no 4. – pp. 375 – 390.

4. Лаврик А.Ф. Функциональное уравнение для L-функций Дирихле и задача делителей в арифметических прогрессиях // Известия АН СССР, сер. Матем. – 1966. – Т. 30. – С. 433 – 448.
5. Iwaniec H., Kowalsky E. Analytic number theory. – American Mathematical Society, Colloquium Publications. – V. 53, 2004. – 615 p.
6. Friedlander J., Iwaniec H. Incomplete Kloosterman sums and divisor problem // Ann. Math. – 1985. – 121. – pp. 319 – 350.
7. Петечук М.М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого нечетного числа // Известия АН СССР, сер. Матем. – 1979. – Т. 43, № 4. – С. 892 – 908.
8. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. – М.: Наука, 1983. – 239 с.
9. Виноградов А.И., Линник Ю.В. Оценка суммы числа делителей в коротком отрезке арифметической прогрессии // Успехи матем. наук. – 1957. – Т. 12, вып. 4(76). – С. 277 – 280.
10. Марджанишвили К.К. Оценка одной арифметической суммы // Доклад АН СССР. – 1939. – Т. 22, № 7. – С. 391 – 393.
11. Чубариков В.Н. Уточнение границы нулей L-рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа // Вестник Московского университета. – 1973. – № 2. – С. 46 – 52.

References (transliteration)

1. Karacuba A.A. Raspredelenie proizvedenij prostyh sdvinytyh chisel v arifmeticheskikh progressijah [The distribution of products of prime numbers shifted in arithmetic progressions] // Doklad AN SSSR. – 1970. – Т. 192, no 4. – pp. 724 – 727.
2. Postnikov A.G. O summe harakterov po modulju, ravnomu stepeni prostogo chisla [On the sum of characters modulo a power of a prime number] // Izv. AN SSSR, ser. Matem. - 1955. – Т. 19, no 1. – pp. 11 – 16.
3. Linnik J.V., Barban M.B., Chudakov N.G. O prostyh chislah v arifmeticheskoy progressii s raznost'ju, ravnnoj stepeni prostogo chisla [On prime numbers in arithmetic progressions whose difference is a power of a prime number] // Acta arithm. J. – 1964. – vol. 9, no 4. – pp. 375 – 390.
4. Lavrik A.F. Funkcional'noe uravnenie dlja L-funkcij Dirihle i zadacha delitelej v arifmeticheskikh progressijah [Functional equation for Dirichlet L-functions and the problem of divisors in arithmetic progressions] // Izvestija AN SSSR, ser. Matem. – 1966. – Т. 30. – pp. 433 – 448.
5. Iwaniec H., Kowalsky E. Analytic number theory. – American Mathematical Society,

- Colloquium Publications. – V. 53, 2004. – 615 p.
6. Friedlander J., Iwaniec H. Incomplete Kloosterman sums and divisor problem // Ann. Math. – 1985. – 121. – pp. 319 – 350.
 7. Petechuk M.M. Summa znachenij funkicii delitelej v arifmeticheskikh progressijah s raznost'ju, ravnoj stepeni prostogo nechetnogo chisla [The sum of values of divisor function in arithmetic progressions whose difference is a power of a prime odd number] // Izvestija AN SSSR, ser. Matem. – 1979. – T. 43, no 4. – pp. 892 – 908.
 8. Karacuba A.A. Osnovy analiticheskoj teorii chisel [Fundamentals of analytic number theory]. – M.: Nauka, 1983. – 239 p.
 9. Vinogradov A.I., Linnik J.V. Ocenka summy chisla delitelej v korotkom otrezke arifmeticheskoy progressii [Estimate of the sum of divisors in a short segment of an arithmetic progression] // Uspehi matem. nauk. – 1957. – T. 12, Issue. 4(76). – pp. 277 – 280.
 10. Mardzhanishvili K.K. Ocenka odnoj arifmeticheskoy summy [Evaluation of one of the arithmetic sum] // Doklad AN SSSR. – 1939. – T. 22, no 7. – pp. 391 – 393.
 11. Chubarikov V.N. Utochnenie granicy nulej L-rjadov Dirihle po moduluju, ravnomu stepeni prostogo chisla [Clarification of the boundaries of zero Dirichlet L-series modulo a power of a prime number] // Vestnik Moskovskogo universiteta. – 1973. – no 2. – pp. 46 – 52.

Шевцова М.В. «Про число простих чисел в арифметичній прогресії з різницею спеціального вигляду». Вивчено особливості розподілу простих чисел в арифметичних прогресіях з різницею, яка дорівнює мірі фіксованого простого числа, на основі оцінок сум значень характеру по модулю $D = p_0^m$. Отримано уточнення границі зміни різниці арифметичної прогресії в багатовимірній проблемі дільників Дирихле в арифметичних прогресіях для випадків $k=2$ і $k=3$ з використанням елементарних методів, тобто не удаючись до засобів математичного аналізу. Також розглянута задача про рівномірну оцінку залишкового члена асимптотичної формули для суми значень функції дільників в арифметичній прогресії з різницею вказаного вигляду. Визначена границя зміни основного зростаючого параметра k , при якій дана формула нетривіальна. Ця проблема вирішена на основі оцінки «коротких» сум значень характеру за модулем $D = p_0^m$. В результаті виведена асимптотична формула для числа простих чисел, які є в арифметичній прогресії з різницею, що дорівнює міри фіксованого простого числа. Отримано незначне уточнення залишкового члена цієї формули і границі зміни різниці прогресії. Задача вирішена елементарними методами; засоби математичного аналізу, а саме контурна інтеграція, застосовуються лише для оцінки сум за простими числами.

Ключові слова: різниця арифметичної прогресії, проблема дільників Дирихле, асимптотична формула для числа простих чисел.

Shevtsova M. “On the number of primes in arithmetic progression with difference of a special type”. The peculiarities of distribution of primes in arithmetic progressions whose difference is a power of a fixed prime number are researched on the basis of estimates of the sums of values of character on the module $D = p_0^m$. A clarification of the boundary of the difference of arithmetic progression in the multidimensional Dirichlet divisor problem in arithmetic progressions for the cases $k = 2$ and $k = 3$ is received with use of elementary methods, without resorting to means of the mathematical analysis. The problem of the uniform evaluation of the remainder of the asymptotic formula is also considered for the sum of values of divisor function in arithmetic progression with difference of this kind. Boundary changes main growing parameter k , at which this formula is non-trivial, are defined. This problem is solved on the basis of the estimate of the “short” sums of values of character on the module $D = p_0^m$. An asymptotic formula for the number of primes lying in arithmetic progression with the difference equal to the degree of a fixed prime number is derived. Insignificant clarification of the remainder term of this formula and the boundary of change of a difference of a progression is received. The problem is solved by elementary methods, means of the mathematical analysis, namely planimetric integration, are applied only to an estimate of the sums on primes. It is not possible to estimate this sum nontrivially because of multiplication of function of character. So we receive an estimate of a logarithmic derivative of Dirichlet L-function in a special area using the theorem of boundary of zero Dirichlet L-function by V. N. Chubarikov. Applying planimetric integration the formula of the remainder term is received.

Keywords: the difference of the arithmetic progression, the problem of Dirichlet divisors, asymptotic formula for the number of prime numbers.

Статья поступила в редакцию 05.06.2015

Рекомендована к публикации в журнале «Доклады Академии наук Украины» Г.В. Авериним

Сведения об авторах на русском языке



Аверин Геннадий Викторович, д.т.н., проф. В 1980 году закончил Николаевский кораблестроительный институт им. адмирала С.О. Макарова, по квалификации инженер-механик. В 1994 году защитил докторскую диссертацию, с 2005 года профессор по кафедре компьютерных систем мониторинга. Ведет преподавательскую деятельность в Донецком национальном техническом университете и Белгородском государственном национальном исследовательском университете. Является автором более 150 публикаций, 15 монографий и учебных пособий. Последняя монография «Системодинамика» издана в 2014 году. Область научных интересов: системный анализ и теория систем, математическое моделирование и интеллектуальный анализ данных, экологический мониторинг, информационные системы в области охраны окружающей среды и глобалистики.



Андрюхин Александр Иванович, к.т.н., с.н.с. Закончил математический факультет Донецкого государственного университета, защитил кандидатскую диссертацию в области вычислительной техники в Харьковском национальном университете радиоэлектроники. С 1999 года и по настоящее время доцент кафедры прикладной математики и информатики Донецкого национального технического университета. Научные интересы: проектирование и диагностирование современных сверхбольших интегральных схем и нейроморфных устройств, проблемы программирования и искусственного интеллекта. Опубликовано более 80 научных работ. Является автором книги «Моделирование и диагностирование дискретных систем на переключательном уровне».



Аноприенко Александр Яковлевич, к.т.н., доц. В 1979 году закончил Донецкий политехнический институт, по квалификации инженер-системотехник. В 1987 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук в Институте проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины (г. Киев). В 1989 – 1990 гг. прошёл 10-месячную научную стажировку по линии Немецкой службы академических обменов (DAAD) в Институте высокопроизводительных и распределенных суперЭВМ Штутгартского университета (Германия). С сентября 2014 г. – и.о. ректора ДонНТУ. Является автором более 300 публикаций, 7 монографий и учебных пособий. Область научных интересов: интернет-технологии, компьютерное моделирование, закономерности развития и применения компьютерных технологий.



Бельков Дмитрий Валерьевич, к.т.н., доц. В 1987 году закончил Донецкий политехнический институт, по квалификации инженер-системотехник. В 2004 году защитил кандидатскую диссертацию, с 2004 года доцент кафедры вычислительной математики и программирования факультета компьютерных наук и технологий Донецкого национального технического университета. Является автором более 20 научных публикаций. Область научных интересов: анализ и моделирование трафика компьютерных сетей, обеспечение качества обслуживания компьютерных сетей, управление трафиком компьютерных сетей, методы размещения файлов распределенных систем, сетевые процессоры.



Голубева Оксана Валерьевна, к.ф.-м.н., доц. В 1996 году закончила Витебский государственный университет, по квалификации учитель математики и информатики. В 2002 году защитила кандидатскую диссертацию по специальности «Математическая логика, алгебра и теория чисел». По окончании аспирантуры работает в Полоцком государственном университете (Республика Беларусь). С 2012 года занимает должность заведующего кафедрой технологий программирования. Является автором 50 научных публикаций. Направления научных исследований: создание информационно-образовательных систем поддержки учебного процесса на основе облачных технологий, разработка алгоритмов и методов оптимизации слабо формализуемых систем.



Достлев Юрий Сергеевич. Ведущий инженер, по совместительству старший преподаватель кафедры компьютерной инженерии факультета компьютерных наук и технологий Донецкого национального технического университета. Является автором более 30 публикаций. Область научных интересов: системы реального времени, исследование динамических характеристик параметров реальных объектов, создание компьютерных комплексов автоматизированного контроля и управления технологическими процессами. Научно-техническая деятельность: проектирование и исследование аппаратно-программных комплексов систем реального времени и систем автоматического управления технологическими процессами в различных областях.



Едемская Евгения Николаевна. В 1982 году закончила Донецкий политехнический институт, по квалификации инженер-математик. С 2001 года старший преподаватель кафедры вычислительной математики и программирования факультета компьютерных наук и технологий Донецкого национального технического университета. Является автором более 20 научных публикаций. Область научных интересов: анализ и моделирование трафика компьютерных сетей, обеспечение качества обслуживания компьютерных сетей, управления трафиком компьютерных сетей, методы размещения файлов распределенных систем, математическое моделирование экономических процессов.



Ехилевский Степан Григорьевич, д.т.н., проф. В 1980 году закончил Донецкий государственный университет, по квалификации физик-преподаватель. В 1992 году защитил кандидатскую диссертацию, в 2003 – докторскую. С 1998 по 2004 годы – профессор Донецкого национального технического университета. С 2004 года – декан факультета информационных технологий Полоцкого государственного университета (Республика Беларусь). Является автором более 130 научных публикаций. Направления научных исследований: создание новых методов моделирования сорбционной активности регенеративных патронов изолирующих дыхательных аппаратов, совершенствование конструкций дыхательных аппаратов за счёт оптимизации теплового режима и защитного ресурса аппаратов.



Звягинцева Анна Викторовна, к.т.н., доц. В 1999 году закончила факультет экологии и химической технологии по специальности «Экология и охрана окружающей среды», в 2007 году получила квалификацию магистра программного обеспечения автоматизированных систем в Донецком национальном техническом университете (ДонНТУ). В 2006 году защитила кандидатскую диссертацию по специальности «Экологическая безопасность». С 2007 года доцент кафедры компьютерных систем мониторинга факультета компьютерных наук и технологий ДонНТУ, в настоящее время является докторантом. Опубликовано более 70 научных работ, в том числе 4 монографии и 1 учебное пособие. Научная работа связана с развитием методов комплексной оценки и оценки рисков сложных систем. Научные интересы: системный анализ, теория опасности и риска, экологический мониторинг и безопасность техногенных систем.



Куртова Лилиана Николаевна, к.ф.-м.н. В 2005 году закончила Белгородский государственный университет, по квалификации математик, преподаватель по специальности «математика». В 2014 году защитила кандидатскую диссертацию на тему «Бинарные аддитивные задачи с квадратичными формами» по специальности «Математическая логика, алгебра и теория чисел». В настоящее время работает старшим преподавателем кафедры общей математики Института инженерных технологий и естественных наук НИУ «БелГУ». Является автором более 10 публикаций. Область научных интересов: аналитическая теория чисел, аддитивные задачи, оценка тригонометрических сумм. Занимается получением асимптотических формул для числа решений различных диофантовых уравнений и изучением свойств этих решений.



Лебедев Владимир Николаевич, заведующий лабораторией динамических измерений Донецкого национального университета. В 1985 году закончил аспирантуру Донецкого государственного университета по специальности «Механика жидкости и газа». Основным направлением научной деятельности является термоанемометрия газовых потоков, разработка и исследование измерителей скорости, температуры и расхода газовых потоков, а также средств их исследования и градуировки. По данной тематике опубликовано более 20 статей и получено 3 авторских свидетельства СССР.



Пастухов Дмитрий Феликсович, к.ф.-м.н., доц. В 1993 году закончил физический факультет Московского государственного университета (МГУ), по квалификации физик-исследователь. В 1997 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Физика атмосферы и гидросферы». В настоящее время доцент кафедры технологий программирования факультета информационных технологий Полоцкого государственного университета (Республика Беларусь). Является автором 17 научных публикаций. Область научных интересов: численные методы, математическое моделирование, уравнения математической физики и физические процессы.



Пастухов Юрий Феликсович, к.ф.-м.н., доц. В 1993 году закончил механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (МГУ) по специальности «Математика, прикладная математика». В 1997 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Дифференциальная геометрия и топология». В настоящее время доцент кафедры технологий программирования факультета информационных технологий Полоцкого государственного университета (Республика Беларусь). Является автором 12 научных публикаций. Область научных интересов: криптографические методы, математическое моделирование, дифференциальная геометрия.



Полунин Виктор Александрович, к.ф.-м.н. В 2008 году окончил магистратуру Белгородского государственного университета, по квалификации математик, преподаватель высшей школы. В 2011 году защитил кандидатскую диссертацию по специальности «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление». С 2010 по 2014 г. работал ассистентом, впоследствии старшим преподавателем кафедры математического анализа факультета математики и естественнонаучного образования педагогического института НИУ «БелГУ». С 2014 года доцент кафедры общей математики института инженерных технологий и естественных наук НИУ «БелГУ». Область научных интересов: функциональный и комплексный анализ, краевые задачи для эллиптических систем, дифференциальные уравнения. Является автором 7 научных публикаций.



Польщиков Константин Александрович, к.т.н., доц. В 1997 году закончил Харьковский военный университет по специальности «Радиоэлектронные устройства, системы и комплексы». В 2003 году защитил кандидатскую диссертацию по специальности «Телекоммуникационные системы и сети», в 2006 году присвоено звание доцента по кафедре технического обеспечения связи и автоматизированных систем управления. В настоящее время работает в должности доцента кафедры информационных систем Белгородского государственного национального исследовательского университета. Является автором более 100 научных публикаций и 1 монографии. Область научных интересов: управление потоками информации в телекоммуникационных сетях, методы и системы искусственного интеллекта, имитационное и аналитическое моделирование.



Пометун Екатерина Дмитриевна, аспирант кафедры физики неравновесных процессов, метрологии и экологии им. И.Л. Повха Донецкого национального университета. В 2014 году защитила магистерскую работу по теме «Исследование теплоотдачи термистора в режиме датчика термометра и термоанемометра в динамических условиях» и получила квалификацию «Магистр» по специальности «Метрология». Основной областью научных интересов является метрология, исследование динамических характеристик измерительных преобразователей температуры, механика жидкости газа и плазмы. По этой тематике опубликовано 15 статей.



Руденко Мария Павловна, аспирант кафедры компьютерных систем мониторинга факультета компьютерных наук и технологий Донецкого национального технического университета. В 2009 году закончила Донбасскую национальную академию строительства и архитектуры по специальности «Архитектура зданий и сооружений». С 2012 года работает ассистентом кафедры компьютерных систем мониторинга. Область научных интересов: трехмерное моделирование, история архитектуры и искусства, виртуальная реконструкция архитектурной среды. Область научной деятельности: разработка новых информационных методов для построения виртуальной архитектурной среды.



Солдатов Александр Павлович, д.ф.-м.н., проф., заслуженный деятель науки Российской Федерации, действительный член Международной академии наук высшей школы. В 1971 году закончил Новосибирский государственный университет по специальности «Математика», в 1975 году защитил кандидатскую диссертацию в Математическом институте АН СССР им. В.А. Стеклова, а в 1981 году – докторскую диссертацию в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. Является известным специалистом в области дифференциальных уравнений с частными производными, автором более 80 научных статей и двух монографий. В его работах по уравнениям смешанного типа исследован ряд известных краевых задач. В 1994–1995 годах предложены новые корректные постановки смешанных задач для модельного уравнения Лаврентьева-Бицадзе.



Струнилин Владимир Николаевич. В 1980 году закончил Донецкий политехнический институт, по квалификации инженер-системотехник. В 1991 году окончил аспирантуру при Ленинградском институте точной механики и оптики. В 2002 году прошёл стажировку по линии Немецкой службы академических обменов (DAAD) в Институте высокопроизводительных и распределенных суперЭВМ Штутгартского университета (Германия). Работал ассистентом, старшим преподавателем на кафедре компьютерной инженерии Донецкого национального технического университета (ДонНТУ). С 2007 года заместитель декана, а с 2014 года – декан факультета компьютерных наук и технологий ДонНТУ. Является автором более 50 публикаций. Область научных интересов: САПР, автоматизация проектирования компьютерных систем.



Судаков Сергей Никитович, д.т.н. В 1971 году закончил математический факультет Донецкого государственного университета. С 1977 года работает в Институте прикладной математики и механики (г. Донецк). В настоящее время является ведущим научным сотрудником отдела технической механики. В 1983 году защитил кандидатскую диссертацию по специальности «Теоретическая механика», а в 2009 – докторскую диссертацию по той же специальности. Научные интересы лежат в области динамики твердых и деформируемых тел с полостями, заполненными жидкостью, а также в области проблем небесной механики. Является автором более 60 научных работ.



Тарасова Оксана Александровна. В 2009 году закончила физико-математический факультет Белгородского государственного университета по квалификации математик, в 2012 году – аспирантуру при Белгородском государственном университете по специальности «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление». В настоящее время работает старшим преподавателем кафедры общей математики института Инженерных технологий и естественных наук Белгородского государственного национального исследовательского университета. Является автором 17 научных работ. Область научных интересов: эллиптические системы, функциональный анализ, модели изотропных сред и процессов упругости, система Ламе.



Флоринский Владимир Вячеславович, к.ф.-м.н., доц. В 1977 году закончил механико-математический факультет Харьковского государственного университета, по специальности «Математика». В 2002 году защитил кандидатскую диссертацию по специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в Белгородском государственном университете, с 2003 года являлся доцентом кафедры математического анализа Белгородского государственного университета. В настоящее время работает доцентом кафедры общей математики Института инженерных технологий и естественных наук Белгородского государственного национального исследовательского университета. Является автором более 30 научных работ. Область научных интересов: математическая теория оптимального управления, численные методы, математическое моделирование.



Хоруженко Андрей Сергеевич. В 1999 году закончил Донецкий государственный институт искусственного интеллекта по специальности «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», по квалификации инженер-программист. Работал в отделе распознавания зрительных образов Института проблем искусственного интеллекта. В 2001–2004 годах являлся аспирантом по специальности «Экологическая безопасность», с 2013 года – старший преподаватель кафедры компьютерных систем мониторинга ДонНТУ. В 2006 году прошел двухмесячную стажировку в НТУУ «КПИ». Имеет более 20 публикаций. Область научных интересов: обработка и распознавание изображений, организация высшего образования, экологическая безопасность, экологический мониторинг, управление IT-проектами.



Чердникова Ольга Юрьевна, к.т.н. В 1995 году закончила Донецкий государственный технический университет, по квалификации инженер-программист. В 2013 году защитила кандидатскую диссертацию по специальности «Автоматизация процессов управления», с этого же года работает доцентом кафедры компьютерной инженерии Донецкого национального технического университета. Является автором более 20 научных публикаций. Область научных интересов: моделирование динамических процессов, создание компьютерных комплексов автоматизированного контроля и управления технологическими процессами.



Чернова Ольга Викторовна. В 2004 году закончила физико-математический факультет Белгородского государственного университета, по квалификации математик, преподаватель математики. В 2007 году закончила аспирантуру при Белгородском государственном университете по специальности «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление». В настоящее время работает старшим преподавателем кафедры общей математики института Инженерных технологий и естественных наук Белгородского государственного национального исследовательского университета. Является автором 15 научных работ. Область научных интересов: эллиптические системы, краевые задачи, сингулярные интегральные уравнения, функциональный анализ.



Шевцова Мария Витальевна, к.ф.-м.н. В 2003 году закончила физико-математический факультет Белгородского государственного университета, по квалификации учитель математики и информатики. С 2007 года работала на кафедре алгебры, теории чисел и геометрии НИУ «БелГУ» в должностях ассистента и старшего преподавателя. В 2012 году защитила кандидатскую диссертацию по специальности «Математическая логика, алгебра и теория чисел». В настоящее время занимает должность доцента кафедры общей математики Белгородского государственного национального исследовательского университета. Является автором 13 научных публикаций. Область научных интересов: аналитическая теория чисел, распределение простых чисел в арифметических прогрессиях, изучение оценок сумм значений последовательностей чисел.

Сведения об авторах на украинском языке



Аверін Геннадій Вікторович, д.т.н., проф. У 1980 році закінчив Миколаївський кораблебудівний інститут ім. адмірала С.О. Макарова, за кваліфікацією інженер-механік. У 1994 році захистив докторську дисертацію, з 2005 року професор по кафедрі комп'ютерних систем моніторингу. Веде викладацьку діяльність в Донецькому національному технічному університеті та Белгородському державному національному дослідницькому університеті. Є автором понад 150 публікацій, 15 монографій та навчальних посібників. Остання монографія «Системодинаміка» видана в 2014 році. Область наукових інтересів: системний аналіз і загальна теорія систем, математичне моделювання та інтелектуальний аналіз даних, екологічний моніторинг, інформаційні системи в галузі охорони навколишнього середовища та глобалістики.



Андрюхін Олександр Іванович, к.т.н., с.н.с. Закінчив математичний факультет Донецького державного університету, захистив кандидатську дисертацію в галузі обчислювальної техніки в Харківському національному університеті радіоелектроніки. З 1999 року та по теперішній час доцент кафедри прикладної математики та інформатики Донецького національного технічного університету. Наукові інтереси: проектування та діагностування сучасних надвеликих інтегральних схем та нейроморфних пристроїв, проблеми програмування та штучного інтелекту. Опубліковано понад 80 наукових робіт. Є автором книги «Моделювання та діагностування дискретних систем на перемикаючому рівні».



Анопрієнко Олександр Якович, к.т.н., доц. У 1979 році закінчив Донецький політехнічний інститут, за кваліфікацією інженер-системотехнік. У 1987 році захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук в Інституті проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України (м. Київ). У 1989–1990 рр. пройшов 10-місячне наукове стажування по лінії Німецької служби академічних обмінів (DAAD) в Інституті високопродуктивних і розподілених суперЕОМ Штутгартського університету (Німеччина). З вересня 2014 року – в.о. ректора ДонНТУ. Є автором більше 300 публікацій, 7 монографій та навчальних посібників. Область наукових інтересів: інтернет-технології, комп'ютерне моделювання, закономірності розвитку та застосування комп'ютерних технологій.



Бельков Дмитро Валерійович, к.т.н., доц. У 1987 році закінчив Донецький політехнічний інститут, за кваліфікацією інженер-системотехнік. У 2004 році захистив кандидатську дисертацію, з 2004 року доцент кафедри обчислювальної математики та програмування факультету комп'ютерних наук і технологій Донецького національного технічного університету. Є автором понад 20 наукових публікацій. Область наукових інтересів: аналіз і моделювання трафіку комп'ютерних мереж, забезпечення якості обслуговування комп'ютерних мереж, управління трафіком комп'ютерних мереж, методи розміщення файлів розподілених систем, мережеві процесори.



Голубева Оксана Валеріївна, к.ф.-м.н., доц. У 1996 році закінчила Вітебський державний університет, за кваліфікацією вчитель математики та інформатики. У 2002 році захистила кандидатську дисертацію за спеціальністю «Математична логіка, алгебра та теорія чисел». По закінченню аспірантури працює в Полоцькому державному університеті (Республіка Білорусь). З 2012 року займає посаду завідувача кафедри технологій програмування. Є автором 50 наукових публікацій. Напрями наукових досліджень: створення інформаційно-освітніх систем підтримки навчального процесу на основі хмарних технологій, розробка алгоритмів і методів оптимізації слабо формалізованих систем.



Достлев Юрій Сергійович. Провідний інженер, за сумісництвом старший викладач кафедри комп'ютерної інженерії факультету комп'ютерних наук і технологій Донецького національного технічного університету. Є автором понад 30 публікацій. Область наукових інтересів: системи реального часу, дослідження динамічних характеристик параметрів реальних об'єктів, створення комп'ютерних комплексів автоматизованого контролю та управління технологічними процесами. Науково-технічна діяльність: проектування та дослідження апаратно-програмних комплексів систем реального часу та систем автоматичного управління технологічними процесами в різних областях.



Едемська Євгенія Миколаївна. У 1982 році закінчила Донецький політехнічний інститут, за кваліфікацією інженер-математик. З 2001 року старший викладач кафедри обчислювальної математики та програмування факультету комп'ютерних наук і технологій Донецького національного технічного університету. Є автором понад 20 наукових публікацій. Область наукових інтересів: аналіз і моделювання трафіку комп'ютерних мереж, забезпечення якості обслуговування комп'ютерних мереж, управління трафіком комп'ютерних мереж, методи розміщення файлів розподілених систем, математичне моделювання економічних процесів.



Схілевський Степан Григорович, д.т.н., проф. У 1980 році закінчив Донецький державний університет, за кваліфікацією фізик-викладач. У 1992 році захистив кандидатську дисертацію, в 2003 – докторську. З 1998 по 2004 роки – професор Донецького національного технічного університету. З 2004 року – декан факультету інформаційних технологій Полоцькому державного університету (Республіка Білорусь). Є автором понад 130 наукових публікацій. Напрями наукових досліджень: створення нових методів моделювання сорбційної активності регенеративних патронів ізолюючих дихальних апаратів, вдосконалення конструкцій дихальних апаратів завдяки оптимізації теплового режиму та захисного ресурсу апаратів.



Звягінцева Ганна Вікторівна, к.т.н., доц. У 1999 році закінчила факультет екології та хімічної технології за спеціальністю «Екологія та охорона навколишнього середовища», в 2007 році отримала кваліфікацію магістра програмного забезпечення автоматизованих систем в Донецькому національному технічному університеті (ДонНТУ). У 2006 році захистила кандидатську дисертацію за спеціальністю «Екологічна безпека». З 2007 року доцент кафедри комп'ютерних систем моніторингу факультету комп'ютерних наук і технологій ДонНТУ, нині є докторантом. Оpubліковано понад 70 наукових робіт, в тому числі 4 монографії та 1 навчальний посібник. Наукова робота пов'язана з розвитком методів комплексної оцінки і оцінки ризиків складних систем. Наукові інтереси: системний аналіз, теорія безпеки і ризику, екологічний моніторинг і безпека техногенних систем.



Куртова Ліліана Миколаївна, к.ф.-м.н. У 2005 році закінчила Белгородський університет, за кваліфікацією математик, викладач за спеціальністю «математика». У 2014 році захистила кандидатську дисертацію на тему «Бінарні адитивні задачі з квадратичними формами» за спеціальністю математична логіка, алгебра і теорія чисел. Нині працює старшим викладачем кафедри загальної математики Інституту інженерних технологій та природничих наук НДУ «БелДУ». Є автором понад 10 публікацій. Область наукових інтересів: аналітична теорія чисел, адитивні задачі, оцінки тригонометричних сум. Займається отриманням асимптотичних формул для числа рішень різних діофантових рівнянь і вивченням властивостей цих рішень.



Лебедев Володимир Миколайович, завідувач лабораторією динамічних вимірювань Донецького національного університету. У 1985 році закінчив аспірантуру Донецького державного університету за спеціальністю «Механіка рідини і газу». Основним напрямком наукової діяльності є термоанемометрія газових потоків, розробка та дослідження вимірювачів швидкості, температури і витрати газових потоків, а також засобів їхнього дослідження та градування. За даною тематикою опубліковано понад 20 статей та отримано 3 авторських свідоцтва СРСР.



Пастухов Дмитро Феліксович, к.ф.-м.н., доц. У 1993 році закінчив фізичний факультет Московського державного університету (МДУ), за кваліфікацією фізик-дослідник. У 1997 році захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю «Фізика атмосфери та гідросфери». Нині доцент кафедри технологій програмування факультету інформаційних технологій Полоцького державного університету (Республіка Білорусь). Є автором 17 наукових публікацій. Область наукових інтересів: чисельні методи, математичне моделювання, рівняння математичної фізики і фізичні процеси.



Пастухов Юрій Феліксович, к.ф.-м.н., доц. У 1993 році закінчив механіко-математичний факультет Московського державного університету ім. М.В. Ломоносова (МДУ), за кваліфікацією «Математика, прикладна математика». У 1997 році захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю «Диференціальна геометрія та топологія». Нині доцент кафедри технологій програмування факультету інформаційних технологій Полоцького державного університету (Республіка Білорусь). Є автором 12 наукових публікацій. Область наукових інтересів: криптографічні методи, математичне моделювання, диференціальна геометрія.



Полунін Віктор Олександрович, к.ф.-м.н. У 2008 році закінчив магістратуру Белгородського державного університету, за кваліфікацією математик, викладач вищої школи. У 2011 році захистив кандидатську дисертацію за спеціальністю «Диференціальні рівняння, динамічні системи і оптимальне управління». З 2010 по 2014 рр. працював асистентом, згодом старшим викладачем кафедри математичного аналізу факультету математики та природничо-наукової освіти педагогічного інституту НДУ «БелДУ». З 2014 року доцент кафедри загальної математики інституту інженерних технологій та природничих наук НДУ «БелДУ». Область наукових інтересів: функціональний та комплексний аналіз, крайові задачі для еліптичних систем, диференціальні рівняння. Є автором 7 наукових публікацій.



Польщиків Костянтин Олександрович, к.т.н., доц. У 1997 році закінчив Харківський військовий університет за спеціальністю «Радіоелектронні пристрої, системи та комплекси». У 2003 році захистив кандидатську дисертацію за спеціальністю «Телекомунікаційні системи та мережі», в 2006 році присвоєно вчене звання доцента по кафедрі технічного забезпечення зв'язку та автоматизованих систем управління. Нині доцент кафедри інформаційних систем Белгородського державного університету. Є автором понад 100 наукових публікацій та 1 монографії. Область наукових інтересів: управління потоками інформації в телекомунікаційних мережах, методи та системи штучного інтелекту, імітаційне та аналітичне моделювання.



Пометун Катерина Дмитрівна, аспірант кафедри фізики нерівноважних процесів, метрології та екології ім. І.Л. Повха Донецького національного університету. У 2014 році захистила магістерську роботу за темою «Дослідження тепловіддачі термістора в режимі датчика термометра та термоанемометра в динамічних умовах» і отримала кваліфікацію «Магістр» за спеціальністю «Метрологія». Основною областю наукових інтересів є метрологія, дослідження динамічних характеристик вимірювальних перетворювачів температури, механіка рідини газу та плазми. За цією тематикою опубліковано 15 статей.



Руденко Марія Павлівна, аспірант кафедри комп'ютерних систем моніторингу факультету комп'ютерних наук і технологій Донецького національного технічного університету. У 2009 році закінчила Донбаську національну академію будівництва та архітектури за спеціальністю «Архітектура будівель і споруд». З 2012 року працює асистентом кафедри комп'ютерних систем моніторингу. Область наукових інтересів: тривимірне моделювання, історія архітектури і мистецтва, віртуальна реконструкція архітектурного середовища. Область наукової діяльності: розробка нових інформаційних методів для побудови віртуального архітектурного середовища.



Солдатов Олександр Павлович, д.ф.-м.н., проф., заслужений діяч науки Російської Федерації, дійсний член Міжнародної академії наук вищої школи. У 1971 році закінчив Новосибірський державний університет за спеціальністю «Математика», в 1975 році захистив кандидатську дисертацію в Математичному інституті АН СРСР ім. В.А. Стеклова, а в 1981 році – докторську дисертацію в Московському державному університеті ім. М.В. Ломоносова. Є відомим фахівцем в області диференціальних рівнянь з приватними похідними, автором понад 80 наукових статей та двох монографій. В його роботах по рівнянням змішаного типу досліджена низка відомих крайових задач. У 1994 – 1995 роках запропоновані нові коректні постановки змішаних задач для модельного рівняння Лаврентьєва-Біцадзе.



Струнілін Володимир Миколайович. У 1980 році закінчив Донецький політехнічний інститут, за фахом інженер-системотехнік. У 1991 році закінчив аспірантуру при Ленінградському інституті точної механіки і оптики. У 2002 році пройшов стажування по лінії Німецької служби академічних обмінів (DAAD) у Інституті високопродуктивних і розподілених суперЕОМ Штутгартського університету (Німеччина). Працював асистентом, старшим викладачем на кафедрі комп'ютерної інженерії Донецького національного технічного університету (ДонНТУ). З 2007 року заступник декана, а з 2014 року – декан факультету комп'ютерних наук і технологій ДонНТУ. Є автором понад 50 публікацій. Область наукових інтересів: САПР, автоматизація проектування комп'ютерних систем.



Судаков Сергій Микитович, д.т.н. В 1971 році закінчив математичний факультет Донецького державного університету. З 1977 року працює в Інституті прикладної математики і механіки (м. Донецьк). Нині є провідним науковим співробітником відділу технічної механіки. У 1983 році захистив кандидатську дисертацію за спеціальністю «Теоретична механіка», а в 2009 – докторську дисертацію за тією же спеціальністю. Наукові інтереси лежать в області динаміки твердих і деформованих тіл з площинами, заповненими рідиною, а також в області проблем небесної механіки. Є автором понад 60 наукових робіт.



Тарасова Оксана Олександрівна. У 2009 році закінчила фізико-математичний факультет Белгородського державного університету, за кваліфікацією математик, в 2012 році – аспірантуру при Белгородському державному університеті за спеціальністю «Диференціальні рівняння, динамічні системи і оптимальне управління». Нині працює старшим викладачем кафедри загальної математики Інституту інженерних технологій і природничих наук Белгородського державного національного дослідницького університету. Є автором 17 наукових робіт. Область наукових інтересів: еліптичні системи, функціональний аналіз, моделі ізотропних середовищ та процесів пружності, система Ламі.



Флоринський Володимир В'ячеславович, к.ф.-м.н., доц. У 1977 році закінчив механіко-математичний факультет Харківського державного університету за спеціальністю «математика». У 2002 році захистив кандидатську дисертацію за спеціальністю «Математичне моделювання, чисельні методи та комплекси програм» у Белгородському державному університеті, з 2003 року доцент кафедри математичного аналізу Белгородського державного університету. Нині працює доцентом кафедри загальної математики Інституту інженерних технологій і природничих наук Белгородського державного національного дослідницького університету. Є автором понад 30 наукових робіт. Область наукових інтересів: математична теорія оптимального управління, чисельні методи, математичне моделювання.



Хоруженко Андрій Сергійович. У 1999 році закінчив Донецький державний інститут штучного інтелекту за спеціальністю «Програмне забезпечення обчислювальної техніки і автоматизованих систем», за кваліфікацією інженер-програміст. Працював у відділі розпізнавання зорових образів Інституту проблем штучного інтелекту. У 2001 – 2004 роках був аспірантом за фахом «Екологічна безпека», з 2013 року – старший викладач кафедри комп'ютерних систем моніторингу. У 2006 році пройшов двомісячне стажування в НТУУ «КПІ». Має понад 20 публікацій. Область наукових інтересів: обробка та розпізнавання зображень, організація вищої освіти, екологічна безпека, екологічний моніторинг, управління IT-проектами.



Череднікова Ольга Юріївна, к.т.н. У 1995 році закінчила Донецький державний технічний університет, за кваліфікацією інженер-програміст. У 2013 році захистила кандидатську дисертацію за спеціальністю «Автоматизація процесів управління», з цього ж року працює доцентом кафедри комп'ютерної інженерії Донецького національного технічного університету. Є автором понад 20 наукових публікацій. Область наукових інтересів: моделювання динамічних процесів, створення комп'ютерних комплексів автоматизованого контролю та управління технологічними процесами



Чернова Ольга Вікторівна. У 2004 році закінчила фізико-математичний факультет Белгородського державного університету, за кваліфікацією математик, викладач математики. В 2007 році закінчила аспірантуру при Белгородському державному університеті за спеціальністю «Диференціальні рівняння, динамічні системи і оптимальне управління». Нині працює старшим викладачем кафедри загальної математики інституту Інженерних технологій та природничих наук Белгородського державного національного дослідницького університету. Є автором 15 наукових робіт. Область наукових інтересів: еліптичні системи, крайові задачі, сингулярні інтегральні рівняння, функціональний аналіз.



Шевцова Марія Віталіївна, к.ф.-м.н. У 2003 році закінчила фізико-математичний факультет Белгородського державного університету, за кваліфікацією вчитель математики і інформатики. З 2007 року працювала на кафедрі алгебри, теорії чисел і геометрії НДУ «БелДУ» на посадах асистента та старшого викладача. У 2012 році захистила кандидатську дисертацію за фахом «Математична логіка, алгебра та теорія чисел». Нині займає посаду доцента кафедри загальної математики Белгородського державного національного дослідницького університету. Є автором 13 наукових публікацій. Область наукових інтересів: аналітична теорія чисел, розподіл простих чисел в арифметичних прогресіях, вивчення оцінок сум значень послідовностей чисел.

Сведения об авторах на английском языке



Gennadiy Averin, Doctor of Engineering Sciences, Full Professor. In 1980 he graduated from Admiral Makarov Nikolaev Shipbuilding Institute with a qualification of engineer-mechanic. In 1994 defended his doctoral thesis, since 2005 he is a Full Professor at the Department of Computer Monitoring Systems of the Donetsk National Technical University (DonNTU). Now he lead teaching activity simultaneously in DonNTU and in the Belgorod State National Research University (BelSU). He is the author of over 150 publications, 15 monographs and textbooks. The latest monograph “Systemodynamics” was published in 2014. Area of scientific interests: system analysis and systems theory, mathematical modeling and data mining, environmental monitoring and information systems in the field of environmental protection and global studies.



Alexander Andryukhin, Candidate of Engineering Sciences, Senior Research Officer. He graduated from the mathematical faculty of Donetsk State University, defended his candidate’s thesis in computer sciences at Kharkiv National University of Radio Electronics. Since 1999 he is an Associate Professor at the Department of Applied Mathematics and Informatics of Donetsk National Technical University. Research interests: design and diagnostics of modern ultralarge integrated circuits and neuromorphic devices, the problems of programming and artificial intelligence. Published more than 80 scientific papers. He is the author of the book “Modeling and diagnosis of discrete systems at the switching level”.



Alexander Anoprienko, Candidate of Engineering Sciences, Docent. In 1979 he graduated from Donetsk Polytechnic Institute as a system engineer. In 1987 he defended the dissertation on competition of a scientific degree of Candidate of Engineering Sciences at the Institute of Modeling Problems in Power Engineering of NAS of Ukraine (Kyiv). In 1989 – 1990 he had the 10-month research internship through the German Academic Exchange Service (DAAD) at the Institute for High Performance and Distributed Supercomputers at Stuttgart University (Germany). Since September 2014 – acting rector of Donetsk National Technical University. He is the author of over 300 publications, 7 monographs and textbooks. Research interests: internet technologies, computer simulation, patterns of development and use of computer technologies.



Dmitry Belkov, Candidate of Engineering Sciences, Docent. In 1987 he graduated from Donetsk Polytechnic Institute with a qualification of system engineer. In 2004 defended his thesis, since 2004 he is an Associate Professor at the Department of Computational Mathematics and Programming of the Faculty of Computer Sciences and Technologies in DonNTU. He is the author of over 20 scientific publications. Research interests: analysis and modeling of traffic in computer networks, QoS in computer networks, traffic management of computer networks, methods of file allocation in distributed systems, network processors.



Oksana Golubeva, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent. In 1996 she graduated from the Vitebsk State University with a qualification of mathematics and informatics teacher. In 2002 defended her candidate thesis by specialty “Mathematical logic, algebra and theory of numbers”. After finishing graduate school she works at the Polotsk State University (Republic of Belarus). Since 2012 she holds a position of the Head of the Programming Technologies Department. She is the author of more than 50 scientific publications. Scientific researches directions: information and education systems for educational process support on the cloud computing basis creation, algorithms and optimization methods for poorly formalized systems development.



Yuri Dostlev. Senior Engineer, part-time Senior Lecturer at the Department of the Computer Engineering of the Faculty of Computer Sciences and Technologies of the Donetsk National Technical University. He is the author of over 30 publications. Research interests: real-time systems, research of dynamic characteristics of real objects, creation of computer complexes for the automated control and management of technological processes. Scientific and technical activities: design and research of hardware and software of real-time systems, automatic control systems of technological processes in various fields.



Evgeniya Edemskaya. In 1982 she graduated from the Donetsk Polytechnic Institute with a qualification of engineer-mechanic. Since 2001 she is a Senior Lecturer at the Department of Computational Mathematics and Programming of the Faculty of Computer Sciences and Technologies of the Donetsk National Technical University. Is the author of over 20 scientific publications. Research interests: analysis and simulation of network traffic, QoS and traffic management of computer networks, methods of file allocation in distributed systems, mathematical modeling of economic processes.



Stepan Ekhilevsky, Doctor of Engineering Sciences, Full Professor. In 1980 he graduated from the Donetsk State University as physics teacher. In 1992 defended his candidate thesis, in 2003 – doctoral thesis. From 1998 he is a Full Professor of the Donetsk National Technical University, since 2004 – the Dean of Faculty of Information Technologies at the Polotsk State University (Republic of Belarus). He is the author of more than 130 scientific publications. Directions of scientific researches: creation of new methods of modeling of dynamic sorption activity of regenerative cartridges of the isolating respiratory devices, improvement of designs of respiratory devices due to optimization of the thermal mode and a protective resource of devices.



Anna Zviagintseva, Candidate of Engineering Sciences, Docent. In 1999 she graduated from the Faculty of Ecology and Chemical Technologies on specialty “Ecology and Environmental Protection”, in 2007 received a master's degree in Software of Automated Systems at the Donetsk National Technical University. In 2006 defended her thesis on the specialty “Environmental security”, since 2007 is Associate Professor at the Department of Computer Monitoring Systems of the Faculty of Computer Sciences and Technologies. Published more than 70 scientific works papers, including 4 monographs and 1 manual. Her scientific work is related to the development of methods for integrated risk assessment of complex systems. Research interests: system analysis, theory of hazards and risks, environmental monitoring and security of technological systems.



Liliana Kurtova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences. In 2005 she graduated from the State Educational Institution of Higher Professional Education “Belgorod State University” with a qualification of mathematician, tutor on the specialty “Mathematics”. In 2014 she defended her thesis “Binary additive problems with quadratic forms” by specialty “Mathematical Logic, Algebra and Number Theory”. Currently she is a Senior Lecturer at the Department of General Mathematics in the Institute of Engineering Technology and Science of the Belgorod State National Research University. She is the author of more than 10 scientific publications. Research interests: analytical theory of numbers, additive problems, estimation of trigonometric sums. Now she is working to obtain asymptotic formulas for the number of solutions of Diophantine equations and research the properties of these solutions.



Vladimir Lebedev, Head of the Laboratory of Dynamic Measurements at the Donetsk National University. In 1985 he graduated from the post-graduate of the Donetsk State University by speciality "Fluid and Gas Mechanics". Main scientific activities is fluid mechanics, the development and research of speed meters, temperature and flow rate of gas streams, as well as their means of research and calibration. On this subject he published over 20 scientific papers and got 3 certificates of authorship in the USSR.



Dmitry Pastuhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent. In 1993 he graduated from the Physics Faculty of Lomonosov Moscow State University with a qualification of physicist-researcher. In 1997 he defended the dissertation for degree of the candidate of physical and mathematical sciences by specialty "Atmosphere and Hydrosphere Physics". Currently he is an Associate Professor at the Programming Technologies Department of the Faculty of Information Technologies in the Polotsk State University (Republic of Belarus). He is the author of more than 20 scientific publications. Area of scientific interests: numerical methods, mathematical modeling, equations of mathematical physics and physical processes.



Yury Pastuhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent. In 1993 he graduated from the Faculty of Mechanics and Mathematics of Lomonosov Moscow State University by specialty "Mathematics, Applied Mathematics". In 1997 he defended the dissertation for degree of the candidate of physical and mathematical sciences by specialty "Differential Geometry and Topology". Currently he is an Associate Professor at the Programming Technologies Department of the Faculty of Information Technologies in the Polotsk State University (Republic of Belarus). He is the author of 12 scientific publications. Area of scientific interests: cryptographic methods, mathematical modeling, differential geometry.



Victor Polunin, Candidate of Physical and Mathematical Sciences. In 2008 he graduated from the magistracy of the Belgorod State University as a mathematician, the teacher of the higher school. In 2011 defended his thesis by specialty "Differential Equations, Dynamical Systems and Optimal Control". From 2010 to 2014 he worked as an Assistant, then a Senior Lecturer at the Department of Mathematical Analysis of the Faculty of Mathematics and Natural Scientific Education in the Pedagogical Institute of Engineering Technology and Science of Belgorod State National Research University (BelsU). Since 2014 he is an Associate Professor at the Department of General Mathematics in the Institute of Engineering Technology and Natural Science of BelsU. Research interests: functional and complex analysis, boundary value problems for elliptic systems, differential equations. He is the author of 7 scientific publications.



Konstantyn Polschikov, Candidate of Engineering Sciences, Docent. In 1997 he graduated from the Kharkov Military University by specialty "Radio- Electronic Devices, Systems and Complexes". In 2003 defended his thesis by specialty "Telecommunication of Systems and Networks", in 2006 was awarded the title of Docent at the Department of Technical Communication and Automated Control Systems. He is currently working as Associate Professor at the Department of Information Systems of Belgorod State National Research University. He is the author of over 100 scientific publications and 1 monograph. Area of scientific interests: information control in telecommunication networks, the methods and systems of artificial intelligence, simulation and analytical modeling.



Katerina Pometun, Postgraduate Student at the Department of Physics of Nonequilibrium Processes, Metrology and Ecology named after I. Povh in the Donetsk National University (DonNU). She defended her master's thesis "Investigation of heat thermistor sensor mode and thermometer thermometers in dynamic conditions" and graduated from the magistracy of DonNU by specialty "Metrology" in 2014. The main areas of research are metrology, the investigation of the dynamic characteristics of temperature transmitters, mechanical liquid gas and plasma. She published 15 papers on these subjects.



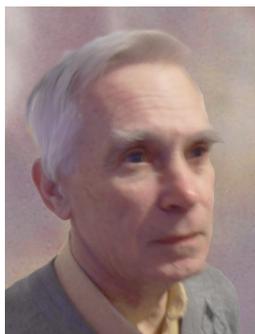
Maria Rudenko, Postgraduate Student at the Computer Monitoring Systems of the Faculty of Computer Sciences and Technologies of Donetsk National Technical University. In 2009 she graduated from Donbas National Academy of Architecture and Engineering by specialty "Architecture of Buildings and Constructions". Since 2012 she is an Assistant at the Department of Computer Monitoring Systems. Research interests: three-dimensional modeling, history of art and architecture, virtual reconstruction of the architectural environment. Area of research: development of new information methods for creating of virtual architectural environment.



Alexander Soldatov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Honored Scientist of the Russian Federation, Member of the International Higher Education Academy of Sciences. In 1971 he graduated from the Novosibirsk State University by specialty "Mathematics", in 1975 he defended candidate's thesis at Steklov Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences, and in 1981 – his doctoral thesis at Lomonosov Moscow State University. He is a professional in the field of differential equations with partial derivatives, the author of over 80 scientific articles and two books. In his works on equations of mixed type are investigated a number of known boundary value problems. In 1994 – 1995 he proposed new correct formulations of mixed problems for model equations Lavrent'ev-Bitsadze.



Vladimir Strunilin. In 1980 he graduated from the Donetsk Polytechnic Institute as a system engineer. In 1991 he graduated from the graduate school at the Leningrad Institute of Precision Mechanics and Optics. In 2002 he had the training through the German Academic Exchange Service (DAAD) at the Institute of High Performance and Distributed Supercomputers at Stuttgart University (Germany). He worked as an Assistant, Senior Lecturer at the Department of Computer Engineering of the Donetsk National Technical University (DonNTU). Since 2007 the deputy dean, from 2014 to the present time he is Dean of the Faculty of Computer Science and Technologies of DonNTU. He is the author of over 50 publications. Research interests: computer-aided design/drafting, digital systems design automation.



Sergey Sudakov, Doctor of Engineering Sciences. In 1971 he graduated from the Faculty of Mathematics of Donetsk State University. Since 1977 he works at the Institute of Applied Mathematics and Mechanics in Donetsk. Currently he is a Leading Researcher at the Department of Technical Mechanics. In 1983 he defended his candidate's thesis by specialty "Theoretical Mechanics", and in 2009 – doctoral thesis by the same specialty. His research interests are in the field of dynamics of solids and deformable bodies with cavities filled with fluid and as well as problems in celestial mechanics. He has published over 60 scientific papers.



Oksana Tarasova. In 2009 she graduated from the Physico-mathematical Faculty of the Belgorod State University (BelSU) with a qualification of mathematician, in 2012 he graduated from the graduate school at the BelSU by specialty “Differential Equations, Dynamical Systems and Optimal Control”. She is currently working as Senior Lecturer at the Department of General Mathematics of the Institute of Engineering Technology and Natural Sciences of Belgorod State National Research University. She is the author of 17 scientific works. Research interests: elliptic systems, functional analysis, model of isotropic medium and elastic processes, the Lamé system.



Vladimir Florinsky, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor. In 1977 he graduated from mechanical-mathematical faculty of Kharkov State University by specialty “Mathematics”. In 2002 he defended his thesis by specialty “Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes” in at the Belgorod State University, since 2003 he is an Assistant Professor of at the Mathematical Analysis Department of the Belgorod State University. Currently he is an Assistant Professor at the Department of General Mathematics of the Institute of Engineering Technology and Natural Sciences of Belgorod State National Research University. He is the author of over 30 scientific works. Research interests: mathematical theory of optimal control, numerical methods, mathematical modeling.



Andrei Khoruzhenko. In 1999 he graduated from Donetsk State Institute of Artificial Intelligence by specialty “Software of Computers and the Automated Systems” with a qualification “engineer-programmer”. He worked at the Department of Visual Images Recognition at the Institute of Artificial Intelligence Problems (Donetsk). During 2001 – 2004 he was a Postgraduate by specialty “Environmental Safety”, since 2013 – Senior Lecturer at Department of Computer Monitoring Systems of DonNTU. In 2006 he had the two-month internship at the NTUU “KPI”. He is the author of more than 20 publications. Research interests: image processing and pattern recognition, higher education administration, environmental security, environmental monitoring, IT-projects management.



Olga Cherednikova, Candidate of Engineering Sciences. In 1995 she graduated from Donetsk State Technical University with a qualification of engineer-programmer. In 2013 she defended her thesis by specialty “Automation of Control Processes” and from the same year she is an Associate Professor at the Department of Computer Engineering of Donetsk National Technical University. She is the author of over 20 scientific publications. Research interests: modeling of dynamic processes, creation of computer systems of automated process control and management.



Olga Chernova. In 2004 she graduated from the Physics and Mathematics Faculty of the Belgorod State University with a qualification of mathematician, teacher of mathematics. In 2007 she graduated from the graduate school at BelSU by specialty “Differential Equations, Dynamical Systems and Optimal Control”. Currently she is a Senior Lecturer at the Department of General Mathematics of the Institute of Engineering Technology and Natural Sciences of Belgorod State National Research University. He is the author of 15 scientific works. Research interests: elliptic system, boundary value problems, singular integral equations, functional analysis.



Maria Shevtsova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences. In 2003 she graduated from Physics and Mathematics Faculty of Belgorod State University with a qualification of teacher of mathematics and informatics. Since 2007 she worked at the Department of Algebra, Number Theory and Geometry of BelSU as an Assistant and Senior Lecturer. In 2012 she has defended the candidate's thesis by specialty "Mathematical Logic, Algebra and Number Theory". Now she is an Associate Professor at the Department of General Mathematics of Belgorod National Research University. She is the author of over 13 scientific publications. Research interests: analytic number theory, distribution of primes in arithmetic progressions, study of estimates of the values of the sums of number sequences.

Научное издание

**Системный анализ и информационные технологии
в науках о природе и обществе
Сборник научных трудов**

(на русском, украинском, английском языках)

№1(8)–2(9)'2015

Ответственный за выпуск *А.В. Звягинцева*
Технические редакторы *В.Н. Беловодский, А.С. Хоруженко*
Компьютерная верстка *В.А. Павлий*
Дизайн обложки *В.В. Бойко*

Подписано к печати 27.10.2015. Формат 60×84 ¹/₈.
Бумага офсетная. Печать ризографическая.
Усл. печ. лист. 9,7. Уч.-изд. лист. 6,9.
Тираж 100 экз.

Адрес редакции: 83001, г. Донецк, ул. Артема, 58, ГВУЗ «ДонНТУ», 4-й учебный корпус,
к. 20, а. Тел.: +38 (062) 301-08-51 E-mail: anna_zv@ukr.net, averin.gennadiy@gmail.com
URL: <http://sait.csm.donntu.org>; <http://csm.donntu.org/ru/node/120>;
<http://sait.donntu.org>; <http://cmd.donntu.org/ru/node/120>

Издатель Государственное высшее учебное заведение «Донецкий национальный технический университет»
83001, г. Донецк, ул. Артема, 58. Тел.: +38 (062) 301-08-67, +38 (062) 301-09-67

Свидетельство о государственной регистрации субъекта издательского дела:
серия ДК №2982 от 21.09.2007

Отпечатано ООО фирма «ДРУК-ИНФО»
83001, г. Донецк, ул. Артема, 58, к. 113, тел.: +38 (062) 335-64-55



95 лет Донецкому национальному техническому университету

ДонНТУ – признанное в мире высшее учебное заведение в сфере науки и образования, активно осуществляющее международное научно-техническое сотрудничество с более чем 80 известными университетами из 25-ти стран мира и 32 иностранными фирмами, являющееся членом 24-х ведущих международных образовательных ассоциаций.

С момента основания в 1921 году старейший технический вуз Донбасса подготовил свыше 230 тысяч инженерно-технических кадров различной квалификации, из которых: 160 тысяч – специалисты и магистры, 60 тысяч – бакалавры, 15 тысяч – младшие специалисты; подготовлено около 2,5 тысяч иностранных специалистов из 70-ти стран мира.

1943

– В Донецке 7 сентября фашисты заживо сожгли более 40 преподавателей и сотрудников ДИИ и членов их семей за участие в антифашистской борьбе.
– В Донбасс с Прокопьевска вернулась группа преподавателей ДИИ, в декабре возобновившая занятия в частично восстановленном 3-ем учебном корпусе.

1945

– Коллектив ДИИ обратился к дончанам с предложением восстановить центральную улицу города – ул. Артема.
– В ДИИ создана Центральная лаборатория по откачке воды из шахт Донбасса.

1950

– К началу 1950 – 1951 учебного года восстановлены студенческий городок и 3-ий учебный корпус.

1955

– Введён в эксплуатацию 5-ый учебный корпус.
– Впервые в Донецке создан джазовый оркестр (под руководством студента ДИИ).

1960

– ДИИ реорганизован в Донецкий политехнический институт (ДПИ).

1965

– На базе 4-го общежития открыт санаторий-профилакторий.
– В ДПИ прошел Всесоюзный семинар маркшейдеров.

1970

– Созданы деканат по обучению иностранных граждан, кафедра русского языка как иностранного и отдел внешних связей.
– Введена новая форма учета успеваемости студентов – аттестация.

1972

– На базе электротехнического факультета создан факультет вычислительной техники и автоматизированных систем управления (ВТ и АСУ).

1973

– Введен в эксплуатацию корпус химико-технологического факультета.
– Завершено строительство 9-го общежития.

1975

– На всех выпускающих кафедрах в план учебной работы включена учебно-исследовательская работа студентов (УИРС).

1925

1930

1935

1940

1945

1955

1950

1960

1965

1970

1975

1995

1980

1990

2005

2015

1921

– Открыт Донецкий горный техникум (ДГТ), в 1926 г. реорганизованный в Донецкий горный институт (ДГИ).

1930

– Вечерний металлургический техникум при ДГИ реорганизован в Донецкий металлургический институт (ДМИ).
– Созданы кафедры: горной механики, электротехники, химии топлива, органической химии, сопротивления материалов, проведения и крепления горных выработок.

1935

– На базе ДГИ и ДМИ создан Донецкий индустриальный институт (ДИИ) с 4-мя факультетами: горно-механический, металлургический, углехимический, горный.

1925

– В ДГТ состоялся первый выпуск горных инженеров.
– Создана кафедра общей химии и лаборатория аналитической химии.

1940

– В ДИИ открыты геологоразведочная и маркшейдерская специальности.

1941

– ДИИ награждён орденом Трудового Красного Знамени.
– Часть студентов и преподавателей, а также оборудование ДИИ эвакуированы на восток СССР (в г. Прокопьевск).

1977

– на базе факультета ВТ и АСУ созданы 2 самостоятельных факультета: вычислительной техники и автоматизированных систем управления.

1990

– Утвержден Устав ДПИ.
– Создан Донецкий технический колледж.

1993

– ДПИ реорганизован в Донецкий государственный технический университет (ДонГТУ).
– Создан немецкий технический факультет.

1994

– Создан Горный институт.
– Создан Горловский автомобильный институт.

1996

– В музее истории (9-ый учебный корпус) состоялась презентация уникальной картины «История Донецкого государственного технического университета» размером 5x8 м (художник Е. Колмыков).

1995

– Создан английский технический факультет.
– Создан Институт международного сотрудничества.

2003

– ДонНТУ принят в Евразийскую ассоциацию университетов.

2005

– Впервые заседание Ученого Совета проходило в Новом Малом зале заседаний Ученого Совета – 1.203.

Факультет компьютерных наук и технологий

Тел: +38062 345-09-35

<http://cs.donntu.org>

© 1972-2015



Кафедра компьютерных систем
мониторинга

Тел: +3 8062 301-08-51

Web site: <http://csm.donntu.org>

E-mail: anna_zv@ukr.net

© 2003-2015